

# 目次

<b>第 1 章</b>	<b>数学の基礎</b>	<b>5</b>
1.0.1	行列の微分公式	5
1.1	Kronecker 積	5
1.2	凸集合と凸関数	6
1.2.1	アフィン集合、凸集合、円錐	6
1.2.2	超平面、半空間、楕円体、多面体	10
1.2.3	分離超平面と支持超平面	14
1.2.4	アフィン関数	19
1.2.5	凸関数	20
1.3	楕円法	24
1.4	内点法	28
1.4.1	LMI の解析中心	28
1.4.2	中心経路による方法	29
<b>第 2 章</b>	<b>時間域特性と周波数域特性の関係</b>	<b>31</b>
2.1	Parseval 定理	31
2.1.1	Fourier 変換と逆変換	31
2.1.2	畳み込み積分	32
2.1.3	Parseval 定理	32
2.1.4	Parseval 定理の証明	33
2.2	KYP 補題	34
2.2.1	有界実補題への応用	35
2.2.2	正実補題への応用	35
2.2.3	KYP 補題の証明*	37
2.3	関数の内積	42
<b>第 3 章</b>	<b>プラント集合のモデル化</b>	<b>45</b>
3.1	パラメータ変動の扱い	45
3.1.1	パラメータベクトルのポリトープ集合	47
3.1.2	行列ポリトープ	49
3.2	位相情報を持つ不確かさ	51
3.2.1	セクター内の静的非線形性	51
3.2.2	正実な不確かさ	52

3.3	LPV モデルと非線形システム . . . . .	53
3.3.1	非線形系の LPV モデルへの変換 . . . . .	54
<b>第 4 章</b>	<b>ロバスト解析 2: Lyapunov 法</b>	<b>59</b>
4.1	Lyapunov 安定理論 . . . . .	59
4.1.1	漸近安定の条件 . . . . .	60
4.1.2	Lyapunov 方程式 . . . . .	61
4.1.3	状態収束率の条件 . . . . .	64
4.2	2 次安定性 . . . . .	64
4.2.1	2 次安定性の条件 . . . . .	65
4.2.2	ポリトープ系の 2 次安定性 . . . . .	65
4.3	2 次安定化 . . . . .	67
4.3.1	状態フィードバック . . . . .	67
4.3.2	出力フィードバック . . . . .	68
4.4	Lur'e システム . . . . .	68
4.4.1	円盤定理 . . . . .	71
4.4.2	Popov 条件 . . . . .	75
4.5	受動システム . . . . .	78
<b>第 5 章</b>	<b>ロバスト解析 3: IQC 法</b>	<b>79</b>
5.1	IQC とは . . . . .	79
5.2	IQC 定理 . . . . .	81
5.3	IQC 定理の証明* . . . . .	83
5.4	IQC の応用例 . . . . .	85
<b>第 6 章</b>	<b>極の領域配置</b>	<b>89</b>
6.1	凸領域とその特徴づけ . . . . .	89
6.1.1	LMI 領域の特徴づけ . . . . .	90
6.2	システムの極が LMI 領域に含まれる条件 . . . . .	91
6.3	複合 LMI 領域 . . . . .	97
6.4	設計例: マス・バネ系 . . . . .	100
6.5	ロバスト極配置 . . . . .	100
6.6	フィードバック設計 . . . . .	102
<b>第 7 章</b>	<b>ゲインスケジュール制御</b>	<b>103</b>
7.1	ゲインスケジュール制御の一般構造 . . . . .	103
7.2	LFT 型時変パラメータモデル . . . . .	103
7.3	一輪車の姿勢安定化制御 . . . . .	106
7.3.1	モデル . . . . .	106
7.3.2	ジャイロアクチュエータ . . . . .	108
7.3.3	運動方程式 . . . . .	109

7.3.4	線形近似モデル . . . . .	110
7.3.5	LPV モデル . . . . .	110
7.3.6	制御設計 . . . . .	112
7.3.7	重みと制御器 . . . . .	114
7.3.8	実験結果 . . . . .	115
7.4	アフィン構造モデル . . . . .	119
7.5	設計事例：電力安定化制御 . . . . .	122
7.5.1	2-パラメータ LPV モデル . . . . .	122
7.5.2	多目的制御設計 . . . . .	123
7.5.3	シミュレーション . . . . .	126



# 第1章 数学の基礎

## 1.0.1 行列の微分公式

$A, B, X$  を適当な次元を持つ行列とする。以下の微分公式が成り立つ。

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial X} \text{Tr}(AXB) &= A^T B^T \\ \frac{\partial}{\partial X} \text{Tr}(AX^T B) &= BA \\ \frac{\partial}{\partial X} \text{Tr}(AX^{-1}B) &= -(X^{-1}BAX^{-1})^T \\ \frac{\partial}{\partial X} \det(X) &= \frac{\partial}{\partial X} \det(X^T) = \det(X)(X^T)^{-1} \\ \frac{\partial}{\partial X} \log \det(X) &= (X^T)^{-1}\end{aligned}$$

## 1.1 Kronecker 積

行列  $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$  と  $B \in \mathbb{F}^{p \times q}$  の Kronecker 積 (Kronecker product) は以下のように定義される  $(mp \times nq)$  の行列だ。

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1p}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mp}B \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

行列  $A$  を 1 列目から順番に縦に並べて作ったベクトルを

$$\text{vec}(A) = [a_{11} \ \cdots \ a_{m1} \ \cdots \ a_{1n} \ \cdots \ a_{mn}]^T \quad (1.2)$$

で表すことにする。また、Kronecker 和 (Kronecker sum) は次に定義された行列演算だ。

$$A \oplus B = A \otimes I_m + I_n \otimes B \quad (1.3)$$

Kronecker 積と Kronecker 和の性質を以下にまとめる。これらの成立に関しては、例えば  $2 \times 2$  の行列で確認すればよい。

### 1. スカラ $\alpha$ に対して

$$\alpha(A \otimes B) = (\alpha A) \otimes B = A \otimes (\alpha B)$$

2.  $A \in \mathbb{F}^{l \times m}$ ,  $B \in \mathbb{F}^{p \times q}$  と  $C \in \mathbb{F}^{m \times n}$ ,  $D \in \mathbb{F}^{q \times r}$  に対して

$$(AC) \otimes (BD) = (A \otimes B)(C \otimes D)$$

3.  $\lambda_i, \mu_j$  ( $i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$ ) をそれぞれ正方行列  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{F}^{m \times m}$  の固有値、 $x_i, y_j$  をその対応する固有ベクトルとすると、以下が成り立つ。

(a)  $A \otimes B$  の固有値は  $\lambda_i \mu_j$  ( $i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$ ) であり、その対応する固有ベクトルは  $x_i \otimes y_j$  だ。

(b) Kronecker 和  $A \oplus B$  の固有値は  $\lambda_i + \mu_j$  ( $i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$ ) であり、その対応する固有ベクトルは  $x_i \otimes y_j$  だ。

4. 適当な次元を有する行列  $A, B, C$  に対して

$$\text{vec}(ABC) = (A \otimes C)\text{vec}(B)$$

5. 行列  $A(t), B(t)$  の各要素がスカラー変数  $t$  に関して微分可能な場合、以下の微分性質が成り立つ。

$$\frac{d}{dt}(A(t) \otimes B(t)) = \left(\frac{d}{dt}A(t)\right) \otimes B(t) + A(t) \otimes \left(\frac{d}{dt}B(t)\right)$$

## 1.2 凸集合と凸関数

### 1.2.1 アフィン集合、凸集合、円錐

#### アフィン集合

$\mathbb{R}^n$  空間上の2点(ベクトル) $x_1 \neq x_2$  が与えられたとき、任意の実数  $\theta \in \mathbb{R}$  を用いて作った新しい点

$$y = \theta x_1 + (1 - \theta)x_2 = x_2 + \theta(x_1 - x_2)$$

の集合が点  $x_1, x_2$  を通る直線となる(2次元の場合を想像してみよう。図 1.1 参照<sup>1</sup>)。  $x_1, x_2$  のどれかが原点でない限りこの直線は原点を通らない。  $\theta = 0$  のとき  $y = x_2$ 、  $\theta = 1$  のとき  $y = x_1$  となる。特に、  $\theta$  が区間  $[0, 1]$  内で値をとる場合、集合は  $x_1$  と  $x_2$  間の線分をなす。上式において、2本のベクトル  $x_1, x_2$  を線形結合する係数の和が1に等しいのが特徴だ。これは線形結合の特殊ケースであり、アフィン結合 (affine combination) と呼ばれる。

<sup>1</sup>本来ならば、  $x_1, x_2$  はすべてベクトルなので、原点から点  $x_1, x_2$  までを結ぶベクトルで書くべきだ。しかし、これ以降論ずる集合は必ずしも原点を含まないため、原点から出発するベクトルをいちいち描くのは面倒だ。このため、原点を省きベクトル先端の点だけを描くのは一般的だ。また、このような作図法では多次元空間の集合も簡単に表現できるメリットを持つ。

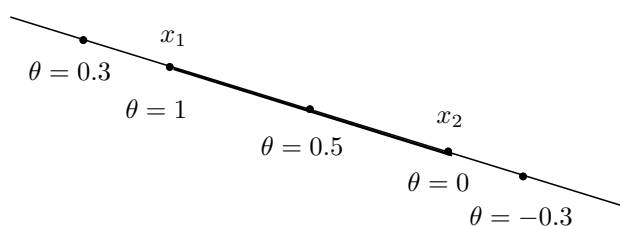


図 1.1: アフィン集合

集合  $C \subset \mathbb{R}^n$  上の任意の 2 点  $x_1, x_2$  をアフィン結合した点が再び  $C$  に属するとき、 $C$  をアフィン集合 (affine set) と呼ぶ。すなわち、任意の  $\theta \in \mathbb{R}$  について  $\theta x_1 + (1 - \theta)x_2 \in C$  が成り立つ。注意すべきは、アフィン集合は一定方向に沿って無限に伸びるため有界ではない。

例 1 線形代数方程式  $Ax = b$  の解集合はアフィン集合だ。これは次のようにして容易に理解できる。 $x_1, x_2$  を二つの解とすると、これらのアフィン結合  $\theta x_1 + (1 - \theta)x_2$  を  $A$  で写像すると

$$\begin{aligned} A(\theta x_1 + (1 - \theta)x_2) &= \theta Ax_1 + (1 - \theta)Ax_2 \\ &= \theta b + (1 - \theta)b \\ &= b \end{aligned}$$

となり、方程式を満たす。

アフィン集合の概念を 2 点以上のアフィン結合に拡張できる。例えば、 $\theta_1 + \dots + \theta_k = 1$  を満たす係数  $\theta_i \in \mathbb{R}$  で  $k$  個の点  $x_1, \dots, x_k \in C$  をアフィン結合して新しい点  $\theta_1 x_1 + \dots + \theta_k x_k$  を作る。集合  $C$  がアフィンであれば、構成した点  $\theta_1 x_1 + \dots + \theta_k x_k$  もまた集合  $C$  に含まれることが帰納法で示せる (演習問題)。

三つの相異なる点  $x_1, x_2, x_3$  のアフィン結合は平面を作る。一般に、何個かの点のアフィン結合は超平面<sup>2</sup>を構成する。つまり、アフィン集合は超平面だ。ただし、アフィン集合は必ずしも原点を含まないため、部分空間ではない。これを原点まで平行移動すると、部分空間になる。具体的には、集合  $C$  をアフィンとし、 $x_0 \in C$  とする。このとき、

$$V = C - x_0 = \{x - x_0 | x \in C\} \quad (1.4)$$

が部分空間となる。すなわち、 $V$  が線形結合に関して閉じている。これを示すために、 $v_1, v_2 \in V$  とし、 $\alpha, \beta$  を任意の実数とする。すると、 $x_1 = v_1 + x_0$ 、 $x_2 = v_2 + x_0$  は共に  $C$  内の点となる。次の点

$$\alpha v_1 + \beta v_2 + x_0 = \alpha(x_1 - x_0) + \beta(x_2 - x_0) + x_0 = \alpha x_1 + \beta x_2 + (1 - \alpha - \beta)x_0$$

<sup>2</sup>超平面の詳細については、1.2.2 節を参照。

が3点  $x_0, x_1, x_2$  のアフィン結合なので、 $C$  に属する。よって、 $(\alpha x_1 + \beta x_2 + x_0) - x_0 = \alpha v_1 + \beta v_2 \in V$  が成り立ち、 $V$  は部分空間となる。

(1.4) 式から分かるように、アフィン集合  $C$  は逆に部分空間  $V$  と一つの点  $x_0 \in C$  を用いて以下のように表現できる。

$$C = V + x_0 = \{x = v + x_0 | v \in V\} \quad (1.5)$$

### 凸集合

さらに、アフィン結合において結合係数を非負の実数に限定した場合、すなわち、 $\theta_i \geq 0$  かつ  $\theta_1 + \dots + \theta_k = 1$  で  $x_i \in C$  を結合したものが再び  $C$  に属する場合、つまり

$$\theta_1 x_1 + \dots + \theta_k x_k \in C$$

のとき、集合  $C$  は凸集合 (convex set) と呼ばれる。このような結合は凸結合 (convex combination) と呼ばれる。二つの点  $x_1, x_2$  の凸結合は線分、三つの点  $x_1, x_2, x_3$  で作った凸結合は平面三角形となる。一般に、凸集合は閉集合とは限らない。また、凸結合において結合係数が非負かつ総和1の制約のもとで、各係数  $\theta_i$  が値をとる範囲は区間  $[0, 1]$  に限定される。

凸集合の特徴は、任意の二つの点を結ぶ線分上のすべての点が必ず凸集合に含まれることだ (図 1.2 左)。なぜなら、任意の  $\theta \in [0, 1]$  に対して  $x_1, x_2 \in C$  ならば  $\theta x_1 + (1 - \theta)x_2 \in C$  となるからだ。アフィン集合はその中の2点をつなぐ直線上の点をすべて含むので、2点間の線分も当然含む。ゆえに、アフィン集合は自動的に凸集合になる。

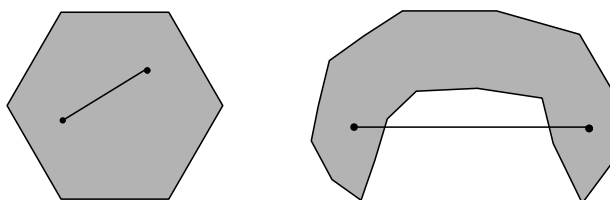


図 1.2: 凸集合 (左) と非凸集合 (右)

さらに、ある必ずしも凸でない集合  $C$  中の有限個の点  $x_i$  ( $i = 1, \dots, k$ ) を凸結合して作った集合

$$\text{conv}C = \{\theta_1 x_1 + \dots + \theta_k x_k | x_i \in C, \theta_i > 0, \theta_1 + \dots + \theta_k = 1\} \quad (1.6)$$

が集合  $C$  の凸包 (convex hull) という。ただし、結合される点の数  $k$  は任意だ。これは閉凸集合であり、しかも集合  $C$  を内包する凸集合の中で最も小さい集合だ。例えば、図 1.2 右の凸でない集合の凸包は図 1.3 のようになる。



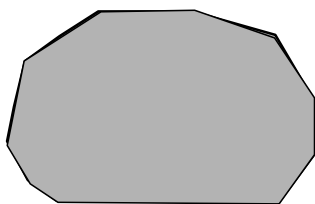


図 1.3: 非凸集合の凸包

## 円錐

次に円錐について説明する。ある集合  $C$  が、任意の係数  $\theta \geq 0$  に関して、 $x \in C$  ならば  $\theta x \in C$  となるとき、円錐 (cone)<sup>3</sup> と呼ぶ。係数  $\theta$  が非負実数に限定されるため、 $\theta x$  は  $x$  方向上に伸び縮みはするが、 $-x$  方向へは伸びない (図 1.4 参照)。特に、凸である円錐を凸円錐 (convex cone) という。凸円錐  $C$  について、凸性により 2 点  $x_1, x_2 \in C$  を凸結合した点が  $C$  に入り、これをさらに (正) 係数倍したのも  $C$  に入るため、任意の  $\theta_1, \theta_2 \geq 0$  について

$$\theta x_1 + \theta_2 x_2 \in C$$

が成立する。2次元の凸円錐は形が切り分けられたパイにそっくりだ (図 1.4)。また、係数  $\theta_1, \dots, \theta_k \geq 0$  で結合した点  $\theta_1 x_1 + \dots + \theta_k x_k$  は円錐結合 (conic combination) と呼ぶ。

集合  $C$  の円錐包 (conic hull) とは、 $C$  の点に関する円錐結合全体のことだ。すなわち、

$$\{\theta_1 x_1 + \dots + \theta_k x_k \mid x_i \in C, \theta_i > 0, i = 1, \dots, k\}$$

これは集合  $C$  を内包できる凸円錐の中で最も小さい凸円錐だ。

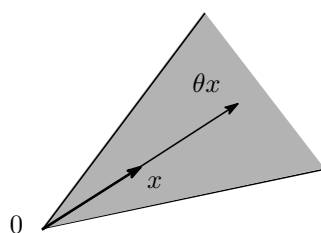


図 1.4: 円錐

<sup>3</sup>その形状はとうもろこしに似ていることから英語ではコーンと呼ばれる。

### 1.2.2 超平面、半空間、楕円体、多面体

#### 超平面

超平面 (hyperplane) とは、ベクトル  $a \in \mathbb{R}^n$  とスカラー  $b \in \mathbb{R}$  について、方程式  $a^T x = b$  を満たすすべての点  $x \in \mathbb{R}^n$  の集合を言う。つまり、集合

$$\{x \in \mathbb{R}^n | a^T x = b\}$$

のことだ。2次元空間の場合、この集合は法線ベクトル  $a$  を持つ直線であり、3次元空間の場合は法線ベクトル  $a$  を持つ平面だ。このことは、次のように説明できる。 $x_0$  を超平面の一つの点とすると、超平面上のすべての点は

$$a^T(x - x_0) = b - b = 0$$

となるから、ベクトル  $a$  は超平面上の2点を結ぶベクトル  $x - x_0$  に直交する。よって、 $a$  は超平面の法線ベクトルだ。

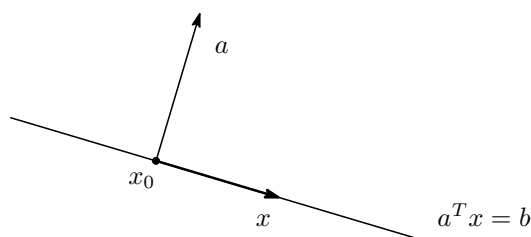


図 1.5: 超平面

例 2 下記のベクトル  $a$  とスカラー  $b$

$$a = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, b = 1$$

に関する超平面は

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1 \Rightarrow x_3 = 1 - (x_1 + x_2)$$

であり、図 1.6 に示される。図より分かるように  $a$  は超平面の法線ベクトルだ。

後で法線ベクトルと超平面の交点を求める場面が出てくるので、ここで計算法を述べておく。法線  $a$  に係数  $\beta > 0$  をかけて伸ばしていくと、いずれ超平面と交わる。この交点は  $x_0 = \beta a$  と置ける。すると、

$$b = a^T(\beta a) = \beta \|a\|^2 \Rightarrow \beta = \frac{b}{\|a\|^2}$$

よって、交点は  $x_0 = \frac{b}{\|a\|^2} a$  となる。

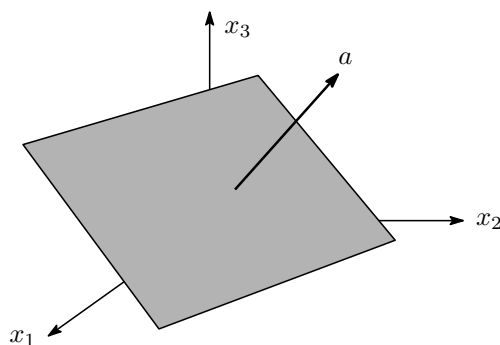


図 1.6: 超平面

### 半空間

一つの超平面は、空間を二つの半空間に分ける。ここでいう (閉) 半空間 (half space) とは集合  $\{x|a^T x \leq b\}$  や  $\{x|a^T x \geq b\}$  のことを指す (図 1.7)。これはつまり、線形不等式の解集合だ。半空間は凸集合だが (なぜかを考えよう)、アフィン集合ではない。なぜなら、図 1.7 に示されるように超平面  $a^T x = 0$  より反対側に延ばせないからだ。

また点  $x_0$  を  $a^T x_0 = b$  を満たす点、すなわち超平面  $\{x|a^T x = b\}$  上の一つの点とすると、半空間  $\{x|a^T x \leq b\}$  は次のように表せる。

$$\{x|a^T(x - x_0) \leq 0\}$$

これは幾何学的に、超平面上の点  $x_0$  から半空間  $\{x|a^T x \leq b\}$  上の点  $x$  に向かうベクトルが超平面の法線ベクトル  $a$  と鈍角をなすことを意味する (図 1.8)。よって、半空間  $\{x \in \mathbb{R}^n | a^T x \leq b\}$  は  $a$  の反対側に位置する。一方、半空間  $\{x \in \mathbb{R}^n | a^T x \geq b\}$  は  $a$  と同じ側にある。明らかに、この二つの半平面間の境界線は超平面  $\{x|a^T x = b\}$  だ。注意すべきは、半空間は線形結合に関して閉じていないため部分空間ではない。

### 楕円体

楕円体とは、集合

$$\mathcal{E} = \{x|(x - x_c)^T P^{-1}(x - x_c) \leq 1\} \quad (1.7)$$

のことだ (図 1.9)。ただし、 $x_c$  は楕円体の中心であり、行列  $P = P^T$  は正定だ。 $\lambda_i$  を  $P$  の固有値とすると、 $\sqrt{\lambda_i}$  は楕円体の半軸の長さを表す。例えば、3次元空間の場合  $P$  はユニタリ行列  $U$  で以下のように対角化できる。

$$UPU^T = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

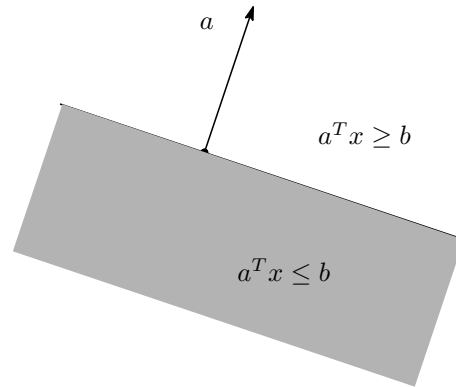


図 1.7: 半空間

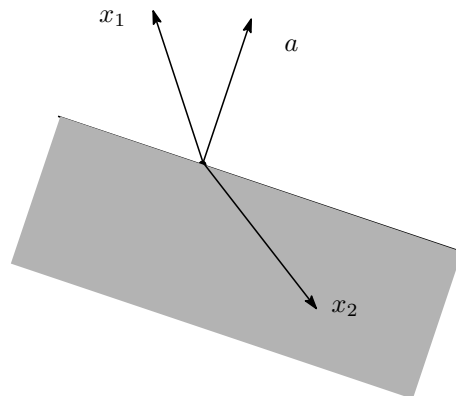


図 1.8: 上部の半空間  $a^T(x - x_0) \geq 0$  内のベクトル  $x_1 - x_0$  は  $a$  と鋭角をなし、下部の半空間  $a^T(x - x_0) \leq 0$  内のベクトル  $x_2 - x_0$  は  $a$  と鈍角をなす

すると、回転座標変換  $y = Ux$  を施すと  $y$  座標上において上記集合は

$$\begin{aligned} (Ux)^T \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & & \\ & \frac{1}{\lambda_2} & \\ & & \frac{1}{\lambda_3} \end{bmatrix} (Ux) &= y^T \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & & \\ & \frac{1}{\lambda_2} & \\ & & \frac{1}{\lambda_3} \end{bmatrix} y \\ &= \frac{y_1^2}{\lambda_1} + \frac{y_2^2}{\lambda_2} + \frac{y_3^2}{\lambda_3} \\ &\leq 1 \end{aligned}$$

となる。確かに、 $\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \sqrt{\lambda_3}$  は半軸長になっている。また、この3次元楕円体の体積は

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = \det P$$

に比例することから推測できるように、 $n$ 次元楕円体の体積は

$$\text{vol}(\mathcal{E}) = \det P \quad (1.8)$$

で与えられる。ただし、ここで楕円体の次元に依存する定係数を省いた。

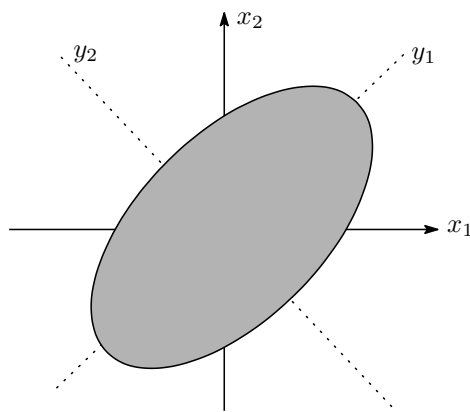


図 1.9: 2次元の場合の楕円体:回転した座標系  $y$  上では正楕円になる

## 多面体

多面体 (polyhedron)

$$\mathcal{P} = \{x \mid a_i^T x \leq b_i, i = 1, \dots, m, c_j^T x = d_j, j = 1, \dots, p\}$$

は、定義式から明らかなように多数の半空間と超平面の交わりだ (図 1.10)。アフィン集合、線分、半空間はすべて多面体だ。容易に理解できるように、多面体が凸だ。(演習問題)

例えば、3次元空間の第1象限

$$\{x \in \mathbb{R}^3 | x_i \geq 0 \forall i = 1, 2, 3\}$$

は多面体だ。これは三つの半空間  $x_1 \geq 0$ 、 $x_2 \geq 0$  と  $x_3 \geq 0$  の交わりだ。なお、この集合は円錐でもある。

さらに、有界の多面体はポリトープ (polytope) と呼ばれる。例えば、3次元空間中の立方体

$$0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 1, 0 \leq x_3 \leq 1$$

が六つの半空間の交わりで、明らかに有界だ。

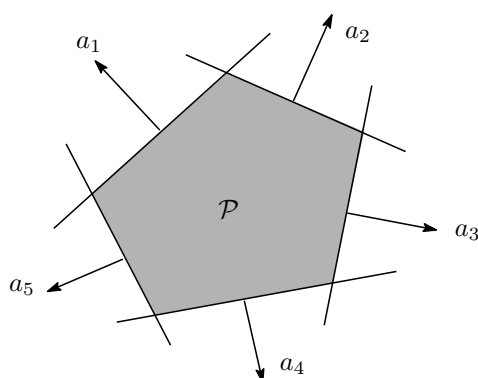


図 1.10: 多面体  $P$  は法線ベクトル  $a_i$  を持つ半空間の交わりだ

### 1.2.3 分離超平面と支持超平面

分離超平面

図 1.11 に示す 2次元平面に二つの凸集合  $C, D$  があり、互いに交わらない場合を考える。直観的にはこの二つの凸集合の間に 1本の直線を通すことができる。すなわち、直線で凸集合  $C, D$  を分けることができる。これは次のように示せる。

まず、簡単のため凸集合  $C$  と  $D$  を共にコンパクト (有界閉集合) と仮定しておく。両者が交わらないから  $C \cap D = \emptyset$  となる。 $u \in C, v \in D$  の 2点間の距離は  $\|u - v\|_2$  となるが、集合間の距離はその下限として定義される。

$$\text{dist}(C, D) = \inf\{\|u - v\| \mid u \in C, v \in D\} \quad (1.9)$$

これは 2点間の最短距離にほかならないので、 $C \cap D = \emptyset$  及びコンパクト性より零ではない。また、 $C, D$  はコンパクトなので、必ず点  $c \in C, d \in D$  が存在し

$$\|c - d\| = \text{dist}(C, D) > 0$$

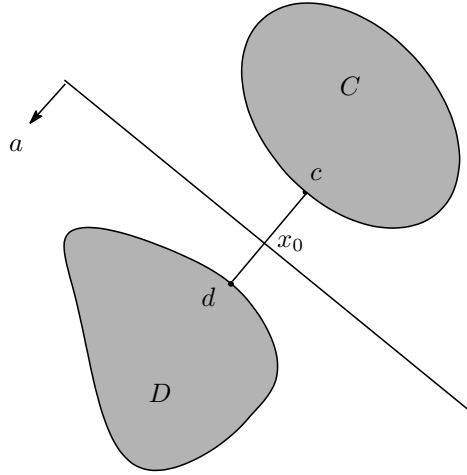


図 1.11: 分離超平面

を満たす。図 1.11 から分かるように、点  $c$  と  $d$  を結ぶ線分の中点を通り、ベクトル  $d - c$  に直交する直線がこの二つの集合を分けられそう。この直線  $\{x | a^T x = b\}$  の法線ベクトルは  $a = d - c$  であり、後は定数  $b$  を求めればよい。そこで、点  $c$  と  $d$  を結ぶ線分の中点が  $x_0 = (c + d)/2$  であること<sup>4</sup>に注目すると

$$b = a^T x_0 = \frac{1}{2}(d - c)^T(c + d) = \frac{\|d\|_2^2 - \|c\|_2^2}{2}$$

が得られる。この直線によって平面は二つに分かれることを以下に示す。 $a$  方向側の開半平面は  $a^T x > b$  で特徴づけられ、反対側の開半平面は  $a^T x < b$  を満たす。

$D$  が開半平面  $a^T x > b$  に含まれることを背理法で示す。つまり、逆に  $u \in D$  について

$$\begin{aligned} 0 &\geq a^T u - b = (d - c)^T u - \frac{(d - c)^T(d + c)}{2} \\ &= (d - c)^T \left( u - \frac{1}{2}(d + c) \right) = (d - c)^T \left( u - d + \frac{1}{2}(d - c) \right) \\ &= (d - c)^T(u - d) + \frac{1}{2}\|d - c\|^2 \end{aligned}$$

になったとする。 $\|c - d\| > 0$  より、これは  $(d - c)^T(u - d) < 0$  を意味する。ところが、距離関数<sup>5</sup> $\|d + t(u - d) - c\|_2^2$  の変数  $t \in \mathbb{R}$  に関する導関数は

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|d + t(u - d) - c\|_2^2 \Big|_{t=0} &= 2(u - d)^T(d + t(u - d) - c) \Big|_{t=0} \\ &= 2(d - c)^T(u - d) < 0 \end{aligned}$$

<sup>4</sup>図 1.11 に適当に原点を設け、ベクトル  $c + d$  を描いてみれば分かる。

<sup>5</sup>この距離関数は、集合  $D$  上の 2 点  $u, d$  の間の線分上の点と集合  $C$  の点  $c$  との距離を表す。

を満たす。よって、十分に小さい  $t$  ( $0 < t < 1$ ) について次式が成立する。

$$\|d + t(u - d) - c\| < \|d - c\|$$

しかし、 $u, d \in D$  および  $D$  の凸性により  $d + t(u - d) = tu + (1 - t)d \in D$  となる。この点と  $c$  の間の距離は最短距離よりも短くなり、矛盾だ。 $C$  が開半平面  $a^T x < 0$  に属することも同様に示せる。

以上で、直線  $a^T x = b$  が凸集合  $C, D$  を分離できたことを示した。いまの場合明らかに、二つの半平面は境界線  $a^T x = b$  を挟んで互いに交わらない。

より高い次元の空間では交わらない凸集合を分離する直線が超平面に変わり、これが分離超平面 (separating hyperplane) と呼ばれる。以上の証明は空間の次元によらないので、任意次元の空間に対しても同様に成り立つ。

ただし、 $C$  と  $D$  のどちらかが開集合、もしくは非有界の場合、境界線  $a^T x = b$  に限りなく近づくことがあり得るため、

$$C \subset \{x | a^T x \leq b\}, D \subset \{x | a^T x \geq b\} \quad (1.10)$$

までしか言えない。

分離超平面の使い方としては、元問題を互いに交わらない二つの集合に帰着できるとき、これをさらに分離超平面の存在性へ変換できる。このようにして、直接解くことの難しい問題を比較的解きやすい問題に変換することができる。変換された新しい問題は双対問題 (dual problem) と呼ばれる。

例 3 厳密な線形不等式の代替定理。不等式

$$Ax < b, A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m \quad (1.11)$$

が可解の条件を探そう。明らかに本条件が成立しないことは次の二つの集合が交わらないことと等価だ。

$$C = \{y = b - Ax | x \in \mathbb{R}^n\}, D = \{y \in \mathbb{R}^m | y > 0\}$$

$C$  はアフィン、 $D$  は凸なので、分離超平面が存在する。つまり、ある  $\lambda \in \mathbb{R}^m, \mu \in \mathbb{R}$  について (1)  $C$  上で  $\lambda^T y \leq \mu$ 、(2)  $D$  上で  $\lambda^T y \geq \mu$  が同時に成り立つ<sup>6</sup>。

これらをさらに簡単化していく。条件 (1) はすべての  $x \in \mathbb{R}^n$  に対して

$$\lambda^T (b - Ax) \leq \mu \Leftrightarrow \lambda^T Ax \geq \lambda^T b - \mu$$

を満たすことを意味する。二番目の不等式左辺は  $x$  の線形関数であり、勾配  $\lambda^T A$  が零でなければすべての実数値を取れる。よって、下有界のためには  $\lambda^T A = 0$  でなければならない。これより  $\lambda^T b \leq \mu$  も得られる。また、条件 (2) は任意の  $y > 0$  (限りなく零に近づくことができる) に対して成立するため

<sup>6</sup>法線ベクトルは零ベクトルであってはいけないため、 $\lambda \neq 0$  だ。



に、 $\mu \leq 0$  となる必要がある。また、 $y > 0$  より  $\lambda \geq 0$ ,  $\lambda \neq 0$  となる。以上をまとめると、厳密な線形不等式が解を持たないための条件は

$$\lambda \geq 0, \lambda \neq 0, A^T \lambda = 0, \lambda^T b \leq 0 \quad (1.12)$$

を満たすベクトル  $\lambda$  が存在することだ。

これで元問題を解けたわけではないが、解きやすくしてくれる可能性がある。例えば、今の例題では代数方程式  $A^T \lambda = 0$  のすべての解が分かっているので、その中から 1 本のスカラ不等式  $\lambda^T b \leq 0$  を満たす零でないベクトル  $\lambda \geq 0$  を探せばよくなる。A が正則の場合、 $A^T \lambda = 0$  が零解  $\lambda = 0$  しか持たないので、この条件は成り立たない。このとき、元問題は解を持つ。実際、すべての解は  $c \prec b$  を満たす任意のベクトル  $c$  を用いて  $x = A^{-1}c$  のように与えられる。

以下、A が正則以外の場合について調べる。 $A^T \lambda = 0$  の解集合は  $\{(I - (A^T)^\dagger A^T)u \mid u \in \mathbb{R}^m\}$  で与えられる。 $\lambda = (I - (A^T)^\dagger A^T)u \geq 0$  を満たすベクトル  $u$  は

$$u = (I - A^\dagger A)p, \quad p \geq 0$$

で与えられる。最後に、不等式条件  $\lambda^T b \leq 0$  は

$$u^T (I - AA^\dagger) \cdot b \leq 0 \Rightarrow p^T \cdot (I - AA^\dagger)^T (I - AA^\dagger) b \leq 0$$

となる。 $b_0 = (I - AA^\dagger)^T (I - AA^\dagger) b$  に一つでも負の要素があるとき、上式を満たす  $p \geq 0$  があり、元問題は解を持たないことが分かる。逆に、 $b_0 \geq 0$  のとき、元問題は解を持つ。

#### 数値例

次の例題に示す結果は、LMI の実行可能性を調べるときに非常に役立つものだ。

例 4 以下の命題が等価だ。

(1) LMI

$$F(x) = F_0 + x_1 F_1 + \cdots + x_m F_m < 0, \quad F_i = F_i^T, \quad i = 0, 1, \dots, m \quad (1.13)$$

を満たす  $x \in \mathbb{R}^m$  が存在しない。

(2) 次の不等式

$$\text{Tr}(F_0 W) \geq 0, \quad \text{Tr}(F_i W) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, m \quad (1.14)$$

を満たす非零の  $W = W^T \geq 0$  が存在する。

(2)⇒(1): 命題 (2) が成り立てば、任意の  $x \in \mathbb{R}^m$  に対して

$$\text{Tr}(W^{1/2}F(x)W^{1/2}) = \text{Tr}(F(x)W) = \text{Tr}(F_0W) \geq 0$$

が成立する。 $W \neq 0$  と  $W \geq 0$  より、 $F(x) < 0$  ならば  $\text{Tr}(W^{1/2}F(x)W^{1/2}) < 0$  となる。命題 (2) が成り立つとき、これは不可能だ。

(1)⇒(2): この場合、集合  $F(\mathbb{R}^m)$  が負定のエルミート行列の集合  $S_-$  と交わらない。この二つの集合が共に凸であることを注意すれば、分離超平面の存在が言える。また、 $F(\mathbb{R}^m)$  も  $S_-$  もエルミートなので、分離超平面の法線  $W$  もエルミート行列となる。行列  $A, B$  の内積が  $\text{Tr}(A^TB)$  で与えられるので、これより

$$\text{Tr}(F(x)W) \geq a, \forall x \in \mathbb{R}^m; \quad \text{Tr}(HW) \leq a, \forall H < 0$$

を満たす行列  $W = W^T$  及び  $a \in \mathbb{R}$  がある。1 番目の不等式は

$$\text{Tr}(F_0W) - a \geq x_1 \text{Tr}(F_1W) + \cdots + x_m \text{Tr}(F_mW) = [x_1 \ \cdots \ x_m] \begin{bmatrix} \text{Tr}(F_1W) \\ \vdots \\ \text{Tr}(F_mW) \end{bmatrix}$$

であるので、右辺がすべての  $x \in \mathbb{R}^m$  に対して上有界となるためには  $\text{Tr}(F_iW) = 0$ ,  $i = 0, 1, \dots, m$  が必要だ。故に、 $\text{Tr}(F_0W) \geq a$ 。そして、2 番目の不等式左辺が上有界となるためには  $W \geq 0$ 、かつ、 $a = 0$  でなければならない。以上で、証明が終了する。

(演習：行列版、Meinsma)

例 5 線形代数方程式  $Ax = b$  が解を持つ条件は、 $b \in \mathfrak{S} A$  だが、ここでさらに正の解  $x \succ 0$  が存在する条件を求めたい。

#### 分離超平面定理の逆定理について

一般に、分離超平面の存在は必ずしも分離された二つの集合が交わらないことを保証できない。例えば、 $x = \{0\}$  が集合  $C = D = \{0\}$  を分離するが、両者が同じだ。しかし、集合  $C, D$  が共に凸で、その内少なくとも一つが開集合の場合、分離超平面の存在は両者が交わらないことを保証する。これは分離超平面の逆定理 (converse separating hyperplane theorem) の一つだ。

この分離超平面の逆定理は、次のように説明できる。ここで、分離超平面を  $\{x | a^T x = b\}$  とする。また  $C$  を開集合とし、半空間  $a^T x \leq b$  にあるとする。もし  $C$  が点  $x_0$  で分離超平面  $a^T x = b$  と交わると、 $C$  が開集合だから  $x_0$  の近傍に  $a^T x \geq b$  を満たす  $x$  が必ず存在する。これは分離超平面の存在に反する。従って、 $C$  は半空間  $a^T x < b$  にある。一方、集合  $D$  は半空間  $a^T x \geq b$  にあるので、両者が交わらない。

## 支持超平面

図 1.12 に示すように集合  $C$  の境界線上の点  $x_0$  を通り、法線ベクトル  $a$  を持つ超平面に対して、集合  $C$  が半平面  $a^T x \leq a^T x_0$  に含まれる場合、この超平面が集合  $C$  を支えていると見ることができ、支持超平面 (supporting hyperplane) という。集合  $C$  が凸の場合、支持超平面の存在が簡単に言える。理由は極めて単純だ。点  $x_0$  を抜いた開集合  $C - \{x_0\}$  は集合 (点) $\{x_0\}$  とは交わらない。すると、点  $x_0$  を通る分離超平面が存在する。この超平面は凸集合  $C$  の支持超平面になる。

凸でない集合にも支持超平面を持つ場合がある。図 1.12 はその例だ。

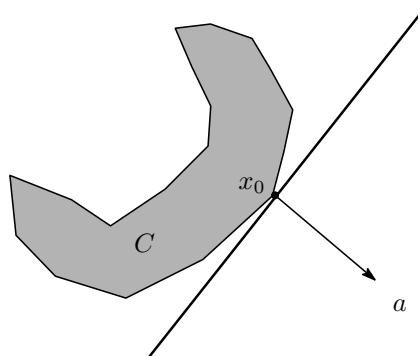


図 1.12: 支持超平面

## 1.2.4 アフィン関数

スカラー変数  $x \in \mathbb{R}$  の場合、

$$f(x) = ax + b$$

の形式の写像はアフィン関数 (affine function) という。ただし、 $a, b \in \mathbb{R}$  はスカラーの係数だ。幾何学的には、これは平面  $(x, f(x))$  上にオフセット  $b$  を持つ直線を表す。 $b = 0$  のとき、直線は原点を通り、線形関数に変わる。ベクトル変数  $x \in \mathbb{R}^n$  に関するアフィン関数は

$$f(x) = Ax + b, \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m \quad (1.15)$$

のような形の写像だ。これは、拡大した空間 (直積空間)  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$  上の超平面を表す。

平行移動写像

$$S + a = \{x + a | x \in S\}, \quad S \subset \mathbb{R}^n$$

が一番簡単な例だ。

アフィン関数の重要な性質は、凸集合をまた凸集合に写像することだ。アフィン写像  $f(x) = Ax + b$  に関する凸集合  $S$  の像を

$$f(S) = \{f(x) | x \in S\}$$

で表す。  $x, y \in S$  ならば  $\theta \in [0, 1]$  について  $\theta x + (1 - \theta)y \in S$  となる。そして、これらの像  $f(x), f(y) \in f(S)$  の凸結合は

$$\theta f(x) + (1 - \theta)f(y) = \theta(Ax + b) + (1 - \theta)(Ay + b) = A[\theta x + (1 - \theta)y] + b \in f(S)$$

となる。よって、  $f(S)$  も凸だ。同様に、  $S$  が凸集合で、  $f$  がアフィン関数ならば、  $f$  の逆写像

$$f^{-1}(S) = \{x | f(x) = Ax + b \in f(S)\}$$

も凸集合になる。(証明せよ)

例 6 正定行列  $P$  とベクトル  $x_c$  のアフィン写像

$$f(u) = P^{1/2}u + x_c$$

で球  $\{u | \|u\|_2 \leq 1\}$  を写像すると、像は以下に示すように楕円体になる。ここでまず、像を  $x = f(u)$  と置く。すると、  $u = P^{-1/2}(x - x_c)$  となり

$$1 \geq u^T u = [P^{-1/2}(x - x_c)]^T [P^{-1/2}(x - x_c)] = (x - x_c)^T P^{-1}(x - x_c)$$

が成立し、楕円体が変わる。

例 7 LMI

$$A(x) = x_1 A_1 + \cdots + x_n A_n \leq B, \quad A_i = A_i^T, \quad B = B^T$$

はアフィン関数  $f(x) = B - A(x)$  に結び付けることができる。つまり、LMI は  $f(x) \geq 0$  ???

### 1.2.5 凸関数

凸集合  $\text{dom} f$  上で定義された関数  $f: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$  が、任意の  $x, y \in \text{dom} f$  と  $\theta \in [0, 1]$  について

$$f(\theta x + (1 - \theta)y) \leq \theta f(x) + (1 - \theta)f(y) \quad (1.16)$$

なる性質を満足するとき、凸関数 (convex function) という。幾何学的には、これは  $(x, f(x))$  と  $(y, f(y))$  間の線分 (つまり、弦) が  $f$  のグラフの上にあることと対応する (図 1.13)。上式の不等号が図の線分の両端点を除いて厳密な

不等号「 $<$ 」である場合、 $f$  は厳密な凸関数 (strictly convex function) と呼ばれる。

一方、 $-f$  が凸の場合、 $f$  を凹関数 (concave function) と呼ぶ。すなわち、凹関数  $f$  は任意の  $x, y \in \text{dom} f$  と  $\theta \in [0, 1]$  について次式を満たす。(その幾何学的意味を考えよう)

$$f(\theta x + (1 - \theta)y) \geq \theta f(x) + (1 - \theta)f(y) \quad (1.17)$$

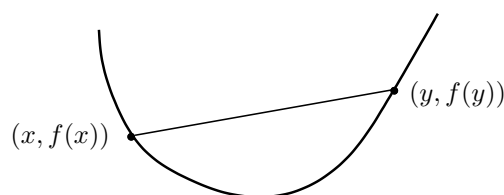


図 1.13: 凸関数の幾何学的意味

### 凸関数の 1 次条件

$f(x)$  が微分可能の場合、 $f(x)$  が凸関数となるための必要十分条件は任意の  $x, y \in \text{dom} f$  に対して

$$f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^T (y - x) \quad (1.18)$$

が成立することだ (図 1.14 参照)。上式右辺は明らかに  $x$  近傍での  $f$  の Taylor 展開の 1 次近似だ。これは  $f$  の Taylor 展開の 1 次近似が  $f$  の下に位置することと  $f$  の凸性の等価性を意味する。

以下、(1.18) を示す。まず、1 変数の場合から始める。 $f$  の凸性より  $0 < t < 1$  に対して次式が成り立つ。

$$f(ty + (1 - t)x) \leq tf(y) + (1 - t)f(x)$$

両辺を  $t$  で割り移項すると

$$f(y) \geq \frac{f(x + t(y - x)) - (1 - t)f(x)}{t} = f(x) + \frac{f(x + t(y - x)) - f(x)}{t}$$

$t \rightarrow 0$  の極限をとると (1.18) 式が得られる。逆に、(1.18) 式が成り立つとき、相異なる 2 点  $x \neq y$ 、結合係数  $\theta \in [0, 1]$  を選び、 $z = \theta x + (1 - \theta)y$  を置く。対  $(z, x)$  と  $(z, y)$  に対してそれぞれ (1.18) 式を適用すると

$$f(x) \geq f(z) + f'(z)(x - z), \quad f(y) \geq f(z) + f'(z)(y - z)$$

を得る。最初の不等式に  $\theta$ 、2 番目の不等式に  $1 - \theta$  をかけてから足し合わせると、

$$\theta f(x) + (1 - \theta)f(y) \geq f(z) + f'(z)[\theta(x - z) + (1 - \theta)(y - z)] = f(z)$$

となり、 $f$  の凸性が示される。

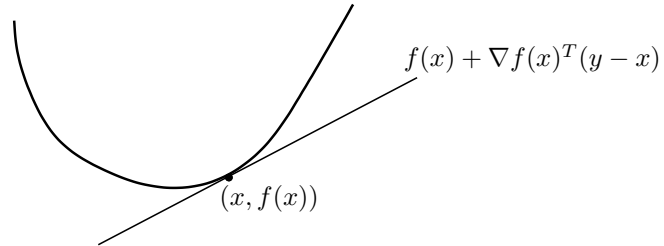


図 1.14: 凸関数の 1 次条件

次に、多次元変数の場合を示す。証明は 1 次元の問題へ帰着させることにより行われる。以下、 $f: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$  とする。任意の  $x, y \in \text{dom} f$  を選び、 $t \in [0, 1]$  に関する関数  $g(t) = f(ty + (1-t)x)$  を置く。 $g'(t) = \nabla f(ty + (1-t)x)^T(y - x)$  は容易に分かる。証明のポイントは  $f$  の凸性と  $g$  の凸性の等価関係を利用することだ<sup>7</sup>。これより、 $g$  の凸性と (1.18) 式の等価性を示せばよい。

$g(t)$  が凸の場合、1 変数の凸関数に関する条件より、 $g(1) \geq g(0) + g'(0)(1-0)$  が成り立つ。この不等式は (1.18) 式そのものだ。逆に、 $\text{dom} f$  の凸性により  $x, y \in \text{dom} f$  ならば  $t_1, t_2 \in [0, 1]$  について  $t_1y + (1 - t_1)x, t_2y + (1 - t_2)x \in \text{dom} f$  になるので、(1.18) 式が成立するとき、

$$\begin{aligned} f(t_2y + (1 - t_2)x) &\geq f(t_1y + (1 - t_1)x) + \nabla f(t_1y + (1 - t_1)x)^T \\ &\quad \times [(t_2y + (1 - t_2)x) - (t_1y + (1 - t_1)x)] \\ &= f(t_1y + (1 - t_1)x) + \nabla f(t_1y + (1 - t_1)x)^T(y - x)(t_2 - t_1) \\ &\Rightarrow g(t_2) \geq g(t_1) + g'(t_1)(t_2 - t_1) \end{aligned}$$

も成り立つ。ゆえに、 $g$  が凸だ。

厳密な凸条件は同様に得られる。すなわち、 $x, y \in \text{dom} f$  かつ  $x \neq y$  について次式が成立する。

$$f(y) > f(x) + \nabla f(x)^T(y - x) \quad (1.19)$$

<sup>7</sup>この変換は図 1.15 に示されている。 $g(t) \leq tg(1) + (1-t)g(0)$  と  $f(ty + (1-t)x) \leq tf(y) + (1-t)f(x)$  は同じ不等式なので、当然等価だ。しかも、この等価関係は任意の  $x \neq y$  に対して成立する。

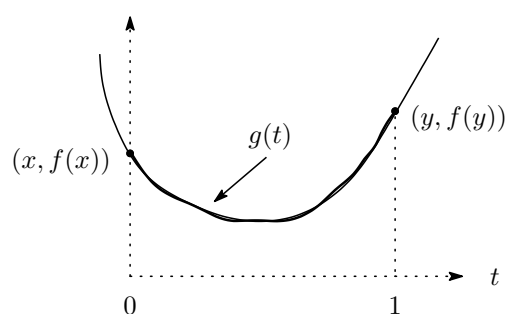


図 1.15: 多次元問題を 1 次元へ変換

## 凸関数の 2 次条件

凸性を保証する 2 次条件も知られている。 $f$  の定義域を凸とし、 $f$  がその定義域上で 2 回微分可能とする。また、その 2 階導関数 (Hessian) を  $\nabla^2 f$  と置く。このとき、 $f$  が凸関数となるための必要十分条件は、すべての  $x \in \text{dom} f$  に対して Hessian が

$$\nabla^2 f(x) \geq 0 \quad (1.20)$$

を満たすことだ。その証明は読者に任せる (演習問題)。

例 8  $\mathbb{R}^n$  上で定義された 2 次関数

$$V(x) = x^T P x + q^T x + r$$

の凸条件は、 $\nabla^2 V(x) = 2P$  より  $P \geq 0$  となる。すなわち、行列  $P$  の半正定性が  $V(x)$  の凸条件だ。事実、 $P > 0$  の場合  $V(x) \leq c$  を満たす点  $x$  が楕円体を作る。

例 9 ノルムも以下に示すように凸関数だ。なぜなら、 $t \in [0, 1]$  について次の不等式が成り立つからだ。

$$\|ty + (1-t)x\| \leq \|ty\| + \|(1-t)x\| = t\|y\| + (1-t)\|x\|$$

また、対数  $f(x) = \log x$  ( $x > 0$ ) について、

$$f'(x) = \frac{1}{x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$$

が成り立つため、凹関数になる。

例 10 次の障壁関数と呼ばれるものは、拘束付き最適化問題において重要な役割を果たしている。

$$f(X) = \log \det X, \quad X > 0 \quad (1.21)$$

この関数は凹関数だが、直接示すのは難しい。そこで、前頁の脚注に示したようにスカラ変数の関数問題に変換して証明する。ここで、スカラ  $t$  の関数  $g(t) = f(Z + tV)$  を置く。ただし、行列  $Z > 0, V \geq 0$  は任意で、 $t$  は  $t \geq 0$  に限定する。また、対称行列  $Z^{-1/2}VZ^{-1/2}$  の固有値を  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  とすると、 $I + tZ^{-1/2}VZ^{-1/2}$  の固有値は  $1 + t\lambda_1, \dots, 1 + t\lambda_n$  になる。 $Z + tV = Z^{1/2}(I + tZ^{-1/2}VZ^{-1/2})Z^{1/2}$  に注意すれば、次式が言える。

$$\begin{aligned} g(t) &= \log \det(Z + tV) \\ &= \log \det(Z^{1/2}) \det(I + tZ^{-1/2}VZ^{-1/2}) \det(Z^{1/2}) \\ &= \log \prod_{i=1}^n (1 + t\lambda_i) + \log \det Z \\ &= \sum_{i=1}^n \log(1 + t\lambda_i) + \log \det Z \end{aligned}$$

よって、その導関数は

$$g'(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{1 + t\lambda_i}, \quad g''(t) = - \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i^2}{(1 + t\lambda_i)^2}$$

となる。 $g''(t) \leq 0$  より  $g(t)$ 、すなわち  $f(X)$  は凹関数だ。

### 1.3 楕円法

LMI の解法として、まず楕円法 (ellipsoid algorithm) を紹介する。このアルゴリズムはきわめて簡単で分かりやすい。ただし、実際に LMI を解くときは次節で説明する内点法 (interior point method) がもっと有効であり、それを利用することを勧める。

さて、話を簡単にするためにまず扱う問題が実行可能、あるいは一つの最適解を持つと仮定する。アイデアは次のようになる。まず、最適点を含めるように一つの楕円体  $\mathcal{E}^{(0)}$  を決める。楕円体の中心を  $x^{(0)}$  とする。最適点が楕円体内部にあるため、中心を通る平面で楕円を二つに切り分けたとき最適点は二つの半楕円体のどちらかに存在するはずだ。これを見つけてからさらにこの半楕円体を内包できるように別の楕円体を求める。この新しい楕円体  $\mathcal{E}^{(1)}$  の体積を最小にすれば、 $\mathcal{E}^{(0)}$  に比べ体積の縮小が期待できる。このプロセスを繰り返していけば楕円体の中心は最適点に漸近していく。

切断面 (cutting plane) を  $(g^{(0)})^T(z - x^{(0)}) = 0$  ( $g^{(0)}$  は切断面の法線ベクトルだ) とし、最適点が切断面を分離超平面とする半空間

$$\{z \mid (g^{(0)})^T(z - x^{(0)}) < 0\}$$

にあるとする。すると、最適点が存在する半楕円体は

$$\mathcal{E}^{(0)} \cap \{z \mid (g^{(0)})^T(z - x^{(0)}) < 0\}$$



となる。

また、中心が  $a$  にある  $n$  次元の楕円体は正定行列  $A$  を用いて

$$\mathcal{E} = \{z \mid (z - a)^T A^{-1} (z - a) \leq 1\}, \quad A = A^T > 0 \quad (1.22)$$

のように記述できる。この楕円体と半空間  $\{z \mid g^T (z - a) < 0\}$  の交わりを内包する、体積最小の楕円は以下のように与えられる。(求めよ)

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{E}} &= \{z \mid (z - \tilde{a})^T \tilde{A}^{-1} (z - \tilde{a}) \leq 1\}, \\ \tilde{a} &= a - \frac{A\tilde{g}}{n+1}, \quad \tilde{A} = \frac{n^2}{n^2-1} \left( A - \frac{2}{n+2} A\tilde{g}\tilde{g}^T A \right), \quad \tilde{g} = \frac{g}{\sqrt{g^T A g}} \end{aligned} \quad (1.23)$$

以上の準備のもとで、楕円法を述べることができる。楕円アルゴリズムは以下ようになる。

1. 初期値を  $x^{(0)}$ ,  $A^{(0)}$  とする。
2.  $k = 1, 2, 3, \dots$  について、点  $x^{(k)}$  を通る切断面の法線ベクトル  $g^{(k)}$  を求める。
3.  $k+1$  番目の楕円体は以下のように作る。

$$\begin{aligned} \tilde{g} &= \frac{g^{(k)}}{\sqrt{(g^{(k)})^T A g^{(k)}}} \\ x^{(k+1)} &= x^{(k)} - \frac{A^{(k)} \tilde{g}}{n+1} \\ A^{(k+1)} &= \frac{n^2}{n^2-1} \left( A^{(k)} - \frac{2}{n+2} A^{(k)} \tilde{g} \tilde{g}^T A^{(k)} \right) \end{aligned}$$

なお、法線ベクトル  $g^{(k)}$  の見つけ方については後述する。また、楕円法の重要な性質として、体積が幾何学的に減少する。具体的には、

$$\text{vol}(\mathcal{E}^{(k)}) \leq \exp\left(-\frac{k}{2n}\right) \text{vol}(\mathcal{E}^{(0)}) \quad (1.24)$$

が成立している。この性質からアルゴリズムの収束時間は多項式時間であることを示せる。

以下、本書で扱う最適化問題について切断面法線ベクトルの求め方を紹介しておく。

LMIP 次の LMI を考える。

$$F(x) = F_0 + \sum_{k=1}^n x_k F_k > 0$$

もし  $x$  が上式を満たすならば、終了する。そうでなければ、必ずある非零ベクトル  $u$  が存在し次式を満たす。

$$u^T F(x) u = u^T \left( F_0 + \sum_{k=1}^n x_k F_k \right) u \leq 0$$

そこで、

$$g = [g_1 \cdots g_n]^T, \quad g_i = -u^T F_i u$$

と置く。すると、 $g^T(z - x) \geq 0$  を満たす任意の点  $z$  に対して

$$\begin{aligned} u^T F(z) u &= u^T \left( F_0 + \sum_{k=1}^n z_k F_k \right) u \\ &= u^T \left( F_0 + \sum_{k=1}^n x_k F_k \right) u + u^T \left( \sum_{k=1}^n (z_k - x_k) F_k \right) u \\ &= u^T F(x) u - \sum_{k=1}^n g_k (z_k - x_k) \\ &= u^T F(x) u - g^T(z - x) \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

が成り立つ。つまり、実行可能な点は逆の半空間  $\{z \mid g^T(z - x) < 0\}$  に存在することになる。よって、このように作った  $g$  は確かに必要な切断面の法線ベクトルとなっている。

**EVP** 次の EVP を考える。

$$\begin{aligned} &\text{minimize} && c^T x \\ &\text{subject to} && F(x) > 0 \end{aligned}$$

$x$  が実行不可能な点であるとき (すなわち、 $F(x) \not> 0$ )、LMIP と同様に切断面の法線ベクトル  $g$  を作る。

$$g = [g_1 \cdots g_n]^T, \quad g_i = -u^T F_i u$$

この場合、半空間  $\{z \mid g^T(z - x) \geq 0\}$  を切り捨てる。

逆に、 $x$  が実行可能な点であるとき (すなわち、 $F(x) > 0$ )、切断面の法線ベクトルを

$$g = c$$

とする。 $c^T z > c^T x$  を満たす点  $z$  が最適でないため、これを捨てる。すなわち、この場合切り捨てるのは半空間  $\{z \mid g^T(z - x) > 0\}$  となる。

**GEVP** 次の GEVP を考える。

$$\begin{aligned} &\text{minimize} && \lambda_{\max}(A(x), B(x)) \\ &\text{subject to} && B(x) > 0, C(x) > 0 \end{aligned}$$

ただし、

$$A(x) = A_0 + \sum_{k=1}^n x_k A_k, \quad B(x) = B_0 + \sum_{k=1}^n x_k B_k, \quad C(x) = C_0 + \sum_{k=1}^n x_k C_k$$

与えられた点  $x$  が拘束条件を満たさないとき、

$$F_i = \begin{bmatrix} B_i & 0 \\ 0 & C_i \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, n$$

と置いて LMIP と同様に切断面の法線ベクトル  $g$  を作ればよい。

点  $x$  が拘束条件を満たす場合、 $\lambda_{\max}(A(x), B(x))$  に対応する一般化固有ベクトル  $u \neq 0$  を求める。

$$(\lambda_{\max}(A(x), B(x))B(x) - A(x))u = 0$$

法線ベクトル  $g$  の各要素は以下ようになる。

$$g_i = -u^T(\lambda_{\max}(A(x), B(x))B_i - A_i)u, \quad i = 1, \dots, n$$

なぜなら、任意の点  $z$  について

$$u^T(\lambda_{\max}(A(x), B(x))B(z) - A(z))u = -g^T(z - x)$$

が成り立つから、 $g^T(z - x) \geq 0$  ならば

$$\lambda_{\max}(A(z), B(z)) \geq \lambda_{\max}(A(x), B(x))$$

となるからだ。

CP 次の CP 問題を考える

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && \log \det A(x)^{-1} \\ & \text{subject to} && A(x) > 0, B(x) > 0 \end{aligned}$$

ただし、行列  $A(x)$ ,  $B(x)$  は以下のように与えられる。

$$A(x) = A_0 + \sum_{k=1}^n x_k A_k, \quad B(x) = B_0 + \sum_{k=1}^n x_k B_k$$

点  $x$  が拘束条件を満たさないとき、

$$F_i = \begin{bmatrix} A_i & 0 \\ 0 & B_i \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, n$$

と置いて LMIP と同様に切断面の法線ベクトル  $g$  を作ればよい。

点  $x$  が拘束条件を満たす場合を考える。目標関数

$$\begin{aligned} \log \det A(x)^{-1} &= \log \frac{1}{\det A(x)} = -\log \det A(x) \\ &= -\log \det \left( A_0 + \sum_{k=1}^n x_k A_k \right) \end{aligned}$$

の  $x$  における勾配  $g$  は

$$g = [g_1 \ \cdots \ g_n]^T, \quad g_i = -\text{Tr}(A_i A(x)^{-1})$$

と計算される。この目標関数が凸なので

$$\log \det A(z)^{-1} \geq \log \det A(x)^{-1} + g^T(z - x)$$

が成立する(1.2.5節参照)。よって、 $g^T(z-x) > 0$  ならば  $\log \det A(z)^{-1} > \log \det A(x)^{-1}$  となり、 $z$  は最適点にはならない。従って、最適点が半空間  $g^T(z-x) \leq 0$  に存在する。つまり、法線ベクトルはこの  $g$  でよい。

## 1.4 内点法

本節では、現時点で LMI 問題を数値計算するのにもっとも効率がよい解法、内点法、について解説する。このため、まずいくつかの概念を説明しておく。

### 1.4.1 LMI の解析中心

解析中心という概念は内点法において重要な役割を果たす。そのアイデアは、LMI の実行可能性問題を障壁関数の最小化問題に置き換えて解くことによって検証するものだ。次の LMI を考える。

$$F(x) = F_0 + \sum_{k=1}^n x_k F_k > 0, \quad F_k = F_k^T \quad \forall k$$

このとき、明らかに関数

$$\phi(x) = \begin{cases} \log \det F(x)^{-1}, & F(x) > 0 \\ \infty, & \text{ほか} \end{cases} \quad (1.25)$$

が有界値を持つことと  $F(x) > 0$  が等価だ。また、変数ベクトル  $x$  が実行可能集合  $\{x \mid F(x) > 0\}$  の境界に近づくに連れて  $\phi(x)$  が無限大に漸近していく。その意味で、 $\phi(x)$  が実行可能集合とその他を隔てる壁に見立てることができるので、障壁関数 (barrier function) と呼ばれる。

さらに、実行可能集合は要素を持ち、かつ、有界の場合を考える<sup>8</sup>。 $\phi$  が厳密に凸なので、この場合  $\phi$  を最小にする解  $x^*$  が存在する。

$$x^* := \arg \min_x \phi(x) \quad (1.26)$$

<sup>8</sup> $F_1, \dots, F_n$  が線形独立でないとき、任意の  $\alpha$  について  $\alpha \sum x_i F_i = 0$  を満たす非零の  $x^\circ = [x_1, \dots, x_n]^T$  がある。つまり、実行可能解に直線  $\alpha x^\circ$  を加えたベクトルも常に実行可能解となる。このとき、解集合は非有界になる。故に、実行可能解が有界の場合  $F_1, \dots, F_n$  は線形独立でなければならない。

この  $x^*$  は LMI  $F(x) > 0$  の解析中心 (analytic center) という。注意すべきは、今の最適化問題は拘束なしの問題だ。従って、容易に様々な方法で解ける。

例えば、Newton 法で解く場合はまず  $\phi$  の勾配 (gradient) とヘッセ行列 (Hessian) をそれぞれ

$$g(x) = \frac{\partial \phi(x)}{\partial x}, \quad H(x) = \frac{\partial^2 \phi(x)}{\partial x^2} \quad (1.27)$$

と置く。すると、解析中心  $x^*$  はアルゴリズム

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \alpha^{(k)} H(x^{(k)})^{-1} g(x^{(k)}) \quad (1.28)$$

に従って逐次的に求めることができる。ただし、 $\alpha^{(k)}$  は  $k$  解目試行のステップ長だ。

#### 1.4.2 中心経路による方法

では、EVP 問題

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && c^T x \\ & \text{subject to} && F(x) > 0 \end{aligned}$$

をどうやって解くか？

アイデアは以下のようになる。目標関数の最適値を  $\lambda^{\text{opt}}$  と置く。  $\lambda > \lambda^{\text{opt}}$  に対して LMI

$$F(x) > 0, \quad c^T x < \lambda \Leftrightarrow \begin{bmatrix} F(x) & 0 \\ 0 & \lambda - c^T x \end{bmatrix} < 0 \quad (1.29)$$

が実行可能となる。つまり、拘束付き最適化問題を LMI の実行可能問題に置き換えられたわけだ。前項のようにこの問題をさらに障壁関数の最適化問題に変換して解くことができる。

LMI(1.29) の解析中心は当然  $\lambda$  に依存するから  $x^*(\lambda)$  で表記する。等式

$$\det \begin{bmatrix} F(x) & \\ & \lambda - c^T x \end{bmatrix}^{-1} = \det F(x)^{-1} \times \frac{1}{\lambda - c^T x}$$

により  $x^*(\lambda)$  は

$$x^*(\lambda) = \arg \min_x \left( \log \det F(x)^{-1} + \log \frac{1}{\lambda - c^T x} \right) \quad (1.30)$$

となる。  $\lambda$  を変化させると、  $x^*(\lambda)$  が一つの軌道を描く。これを EVP の中心経路 (path of centers) という。この中心経路は解析的で、しかも  $\lambda \rightarrow \lambda^{\text{opt}}$  のときに極限を有する。この極限を  $x^{\text{opt}}$  で表す。明らかに、  $x^{\text{opt}}$  は我々が求める EVP の最適解となる。

さて、最適解  $x^{\text{opt}}$  を求めるには  $\lambda$  を逐次減少させ、 $\lambda^{\text{opt}}$  に近づけていく必要がある。 $\lambda$  の更新則を構成するにあたって、 $\lambda > c^T x$  と  $\lambda^{(k+1)} < \lambda^{(k)}$  の二つの条件を満たさなければならない。そこで、 $\lambda^{(k)} > c^T x^{(k)}$  に着眼し次の  $\lambda^{(k)}$  と  $c^T x^{(k)}$  の凸結合を用いる。

$$\lambda^{(k+1)} = (1 - \theta)c^T x^{(k)} + \theta\lambda^{(k)}, \quad 0 < \theta < 1 \quad (1.31)$$

この  $\lambda^{(k+1)}$  は

$$\begin{aligned} \lambda^{(k+1)} - \lambda^{(k)} &= (1 - \theta)(c^T x^{(k)} - \lambda^{(k)}) < 0 \\ \lambda^{(k+1)} &= c^T x^{(k)} + \theta(\lambda^{(k)} - c^T x^{(k)}) > c^T x^{(k)} \end{aligned}$$

を同時に満たしている。また、ベクトル  $x$  の更新則は

$$x^{(k+1)} = x^*(\lambda^{(k+1)}) \quad (1.32)$$

となる。

計算アルゴリズムは以下ようになる。

1. 障壁関数の最適化により LMI  $F(x) > 0$  の解  $x^{(0)}$  を見つけてから、 $\lambda^{(0)} > c^T x^{(0)}$  を満たす数  $\lambda^{(0)}$  を一つ決める。
2. 各  $k = 1, 2, \dots$  について、(1.31) 式より  $\lambda$  を更新する。
3. (1.30) の障壁関数を最小化することによって  $x^{(k+1)}$  を求める。
4.  $\lambda^{(k)} - c^T x^{(k)}$  が要求された精度に達するまで繰り返す。

なお、ほかの拘束付き最適化問題も同様に解くことができる。

## 第2章 時間域特性と周波数域特性 の関係

線形システムの解析・設計において、周波数域の特性と時間域の特性の関係がきわめて重要な位置を占めている。解析では多くの場合、ロバスト性の条件や性能条件がシステム周波数特性に関する仕様の形で求まる。しかし、制御系設計では状態空間(時間域)の方が便利だ。このように、周波数域の条件を時間域条件に等価変換することが系統的な美しい設計論を打ち立てる上必要不可欠になる。本章では、この関係に関わる二つの結果を紹介する。

### 2.1 Parseval 定理

古典的には、信号についてその時間域の性質と周波数域の性質をを結び付ける関係式として、名高い Parseval 定理がある。Parseval 定理が示しているのは、時間関数の 2 乗積分と Fourier 変換した周波数応答の 2 乗積分の関係であり、すなわち時間域と周波数域のエネルギーが等しいことだ。

#### 2.1.1 Fourier 変換と逆変換

Parseval 定理を示す前に、Fourier 変換の性質を復習しておく。まず、スカラ信号  $f(t)$  が実数値関数であり、その Fourier 変換は

$$\hat{f}(j\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt \quad (2.1)$$

で定義される。すると、その共役  $\hat{f}(j\omega)^*$  は

$$\hat{f}(j\omega)^* = \left( \int_0^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt \right)^* = \int_0^{\infty} f(t)e^{j\omega t} dt = \hat{f}(-j\omega) \quad (2.2)$$

の性質を有する。

一方、 $\hat{f}(j\omega)$  から信号  $f(t)$  を復元する Fourier 逆変換  $\mathcal{F}^{-1}$  は

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}[\hat{f}(j\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(j\omega)e^{j\omega t} d\omega \quad (2.3)$$

で与えられる。

### 2.1.2 畳み込み積分

時間畳み込みの結果

$$\mathcal{F}[f_1(t) * f_2(t)] = \hat{f}_1(j\omega)\hat{f}_2(j\omega) \quad (2.4)$$

がよく知られている。そのほか、次の周波数畳み込みの等式も成り立っている。

$$\mathcal{F}[f_1(t)f_2(t)] = \frac{1}{2\pi}\hat{f}_1(j\omega) * \hat{f}_2(j\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}_1(j\omega - j\nu)\hat{f}_2(j\nu)d\nu \quad (2.5)$$

$$\Leftrightarrow f_1(t)f_2(t) = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}^{-1}[\hat{f}_1(j\omega) * \hat{f}_2(j\omega)]$$

本式は次のように示すことができる。まず、逆 Fourier 変換の式により

$$\mathcal{F}^{-1}[\hat{f}_1(j\omega) * \hat{f}_2(j\omega)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}_1(j\omega - j\nu)\hat{f}_2(j\nu)d\nu\right]e^{j\omega t}d\omega$$

が成り立つ。ここで、変数変換  $\omega = \nu + \mu$  を施した上、積分順序を入れ替えると

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}[\hat{f}_1(j\omega) * \hat{f}_2(j\omega)] &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}_1(j\mu)\left[\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}_2(j\nu)d\nu\right]e^{j(\nu+\mu)t}d\mu \\ &= 2\pi\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}_1(j\mu)e^{j\mu t}d\mu\right]\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}_2(j\nu)e^{j\nu t}d\nu\right] \\ &= 2\pi f_1(t)f_2(t) \end{aligned}$$

が得られる。これで (2.5) を示した。

### 2.1.3 Parseval 定理

**定理 1 (Parseval 定理)** 信号ベクトル  $f(t)$ ,  $f_1(t)$ ,  $f_2(t) \in \mathbb{R}^n$  を Fourier 変換できるものとし、その Fourier 変換を  $\hat{f}(j\omega)$ ,  $\hat{f}_1(j\omega)$ ,  $\hat{f}_2(j\omega)$  とする。このとき、以下の積分関係が成立する。

(1) 時間域の内積と周波数域の内積が等しい。

$$\int_0^{\infty} f_1(t)^T f_2(t) dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} [\hat{f}_1(j\omega)^* \hat{f}_2(j\omega)] d\omega \quad (2.6)$$

(2) 時間域の  $\mathcal{L}_2$  ノルムと周波数域の  $\mathcal{L}_2$  ノルムが等しい。

$$\int_0^{\infty} \|f(t)\|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \|\hat{f}(j\omega)\|^2 d\omega \quad (2.7)$$

命題 (2) 左辺の  $\int_0^{\infty} \|f(t)\|^2 dt$  は信号  $f(t)$  が持つエネルギーを表す。この意味で、右辺の  $\|\hat{f}(j\omega)\|^2$  は周波数  $\omega$  に関するエネルギーの密度として捉えることができる。そのため、 $\|\hat{f}(j\omega)\|^2$  はエネルギースペクトル (energy spectrum) とも呼ばれる。



## 例 11 指数的な収束信号

$$f(t) = e^{-t}, \forall t \geq 0 \Leftrightarrow \hat{f}(j\omega) = \frac{1}{j\omega + 1}$$

について Parseval 定理を確認しよう。

命題 (2) の方程式左辺は

$$\int_0^{\infty} (e^{-t})^2 dt = \int_0^{\infty} e^{-2t} dt = \frac{1}{2}$$

に等しい。一方、右辺は

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\omega^2 + 1} d\omega = \frac{1}{2\pi} \arctan \omega \Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{2}$$

よって、両辺が等しいことを確認できた。この例題において、エネルギースペクトルは

$$|\hat{f}(j\omega)|^2 = \frac{1}{\omega^2 + 1}$$

であり、図 2.1 から分かるようにエネルギーは低周波数成分に集中している。

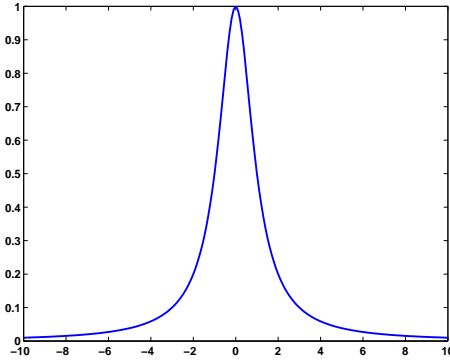


図 2.1: エネルギースペクトル

## 2.1.4 Parseval 定理の証明

(2.5) 式を具体的に書き下すと

$$\int_0^{\infty} f_1(t)f_2(t)e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_1(j\omega - j\nu)\hat{f}_2(j\nu) d\nu$$

となるが、 $\omega = 0$  と置いたとき等式は

$$\int_0^{\infty} f_1(t)f_2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_1(-j\nu)\hat{f}_2(j\nu) d\nu$$

に変わる。さらに、実数値信号の Fourier 変換の性質  $\hat{f}(-j\nu) = \hat{f}(j\nu)^*$  を代入し、積分変数  $\nu$  を  $\omega$  に置き直せば

$$\int_0^{\infty} f_1(t)f_2(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_1(j\omega)^* \hat{f}_2(j\omega)d\omega \quad (2.8)$$

が成立することが分かる。

ベクトル  $f_1(t), f_2(t) \in \mathbb{R}^n$  の場合、その要素を  $f_{1i}, f_{2i}$  のように表記すると

$$f_1^T f_2 = f_{11}f_{21} + \cdots + f_{1n}f_{2n}$$

と書ける。すると、各スカラ要素に関する式 (2.8) より直ちに命題 (1) の成立が言える。命題 (2) は、 $f(t) = f_1(t) = f_2(t)$  に限定した時の結果であり、自明だ。これで Parseval 定理を証明できた。

## 2.2 KYP 補題

Parseval 定理と同様に、システムの時間域の性質と周波数域の性質を結び付ける関係式として、KYP 補題<sup>1</sup>と呼ばれるものが有名だ。この補題は、もともと Popov が Lué 系を研究するときに発見した Popov の安定条件に端を発した。その後、Kalman と Yakubovich が正実補題 (positive real lemma) を見つけ、周波数域の Popov の安定条件と時間域の Lyapunov 関数との関係を解明した。その後、様々な拡張を経て KYP 補題と呼ばれるものにまとめられた。現在、KYP 補題はシステムの時間域と周波数域の性質を結び付ける強力な道具になっており、ロバスト制御などで絶大な威力を発揮している。

**定理 2 (KYP 補題)** 行列  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $M = M^T \in \mathbb{R}^{(n+m) \times (n+m)}$  が与えられる。  $A$  が虚軸上に固有値を持たず、 $(A, B)$  が可制御と仮定する。このとき、以下の命題は等価だ。

(1) 無限大を含むすべての  $\omega$  について次式が成り立つ。

$$\begin{bmatrix} (j\omega I - A)^{-1}B \\ I \end{bmatrix}^* M \begin{bmatrix} (j\omega I - A)^{-1}B \\ I \end{bmatrix} \leq 0 \quad (2.9)$$

(2) 次式を満たす対称行列  $P = P^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$  が存在する。

$$M + \begin{bmatrix} A^T P + PA & PB \\ B^T P & 0 \end{bmatrix} \leq 0 \quad (2.10)$$

さらに、厳密な不等式の場合については、 $(A, B)$  が可制御でなくても等価性は成立する。

この等価性は、まさに美しい一言に尽きる。以下の小節では、KYP 補題の応用例をいくつか紹介しよう。

<sup>1</sup>KYP は、制御分野で著名な Kalman, Yakubovich, Popov 三人の頭文字を取ったものだ。

### 2.2.1 有界実補題への応用

安定伝達行列  $G(s)$  のゲインに関する性質

$$G^*(j\omega)G(j\omega) < I, \forall \omega \quad (2.11)$$

の条件を導出しよう。この周波数性質は  $\mathcal{H}_\infty$  ノルム条件  $\|G\|_\infty < 1$  と等価だ。

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = [C \ D] \begin{bmatrix} (sI - A)^{-1}B \\ I \end{bmatrix}$$

とすると、この不等式は

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} (j\omega I - A)^{-1}B \\ I \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} C^T C & C^T D \\ D^T C & D^T D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (j\omega I - A)^{-1}B \\ I \end{bmatrix} < I \Rightarrow \\ & \begin{bmatrix} (j\omega I - A)^{-1}B \\ I \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} C^T C & C^T D \\ D^T C & D^T D - I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (j\omega I - A)^{-1}B \\ I \end{bmatrix} < 0 \quad (2.12) \end{aligned}$$

のように書き換えられる。不等号が厳密であることに注意すれば、次の等価条件を得る：すなわち、次式を満たす対称行列  $P$  が存在する。

$$\begin{bmatrix} C^T C & C^T D \\ D^T C & D^T D - I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A^T P + PA & PB \\ B^T P & 0 \end{bmatrix} < 0 \quad (2.13)$$

これは有界実補題 (bounded real lemma) と呼ばれるものだ。ちなみに、上式の (1,1) ブロック  $A^T P + PA + C^T C < 0$  より  $P > 0$  まで言える。

例 12 伝達関数

$$G(s) = \frac{a}{s^2 + 2s + 2} = \left[ \begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \\ \hline a & 0 & 0 \end{array} \right]$$

の Bode 線図を描けば分かるように最大ゲインは  $a/2$  だ。上で導出できた LMI に代入して計算する場合、 $a = 1.9$  のとき正定解

$$P = \begin{bmatrix} 3.8024 & 1.5253 \\ 1.5253 & 1.8265 \end{bmatrix}$$

を得るが、 $a \geq 2$  では LMI が解を持たない。

### 2.2.2 正実補題への応用

次式を満たす伝達行列が正実関数と呼ばれる。

$$G^*(j\omega) + G(j\omega) \geq 0, \forall \omega \quad (2.14)$$

スカラー伝達関数の場合、式左辺は  $G$  の実部の2倍になり、不等式はこの実部が正であることを意味する。これは正実関数 (positive real function) と呼ばれる所以だ。ここで、そのための条件を導く。上式を具体的に書き下すと、

$$\begin{bmatrix} (j\omega I - A)^{-1}B \\ I \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} C^T \\ D^T \end{bmatrix} + [C \ D] \begin{bmatrix} (j\omega I - A)^{-1}B \\ I \end{bmatrix} \geq 0$$

になる。KYP 補題の形式に整えるために、 $I = [((j\omega I - A)^{-1}B)^* \ I] \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}$  に着目し、 $[C \ D]$  前の  $I$  などに代入する。すると、正実の条件式は

$$- \begin{bmatrix} (j\omega I - A)^{-1}B \\ I \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} 0 & C^T \\ C & D + D^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (j\omega I - A)^{-1}B \\ I \end{bmatrix} \leq 0$$

になる。 $(A, B)$  が可制御の場合、次の等価条件が得られる。つまり、

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA & PB \\ B^T P & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & C^T \\ C & D + D^T \end{bmatrix} \leq 0 \quad (2.15)$$

を満たす対称行列  $P$  が存在する。これは正実補題 (positive real lemma) と呼ばれる。

一方、厳密な不等式

$$G^*(j\omega) + G(j\omega) > 0 \quad \forall \omega \quad (2.16)$$

が成り立つ場合、 $G(s)$  は強正実関数 (strongly positive real function) と呼ばれ、その条件は次式を満たす対称行列  $P$  が存在することだ。

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA & PB \\ B^T P & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & C^T \\ C & D + D^T \end{bmatrix} < 0 \quad (2.17)$$

になる。しかも、 $(A, B)$  の可制御性は不要だ。

さて、厳密にプロパーな伝達関数は  $G(j\infty) = D = 0$  となるので、強正実になれない。しかし、無限大を除くすべての周波数で  $G^* + G > 0$  を満たす場合がたくさんある。このような伝達関数は厳密な正実関数 (strictly positive real function) と呼ばれるが、その状態空間条件がどうなるか。伝達関数  $G(s)$  に小さな摂動項  $\epsilon I$  を加えれば  $G(s) + \epsilon I$  が強正実になることに着目すれば、十分に小さい摂動  $\epsilon$  に対して

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA & PB \\ B^T P & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & C^T \\ C & 2\epsilon I \end{bmatrix} < 0 \quad (2.18)$$

が解を持つことが必要十分条件になる。

例 13 伝達関数

$$G(s) = \frac{s+a}{s^2+2s+2} = \left[ \begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \\ \hline a & 1 & 0 \end{array} \right]$$

を考える。簡単な計算により、その周波数応答の実部

$$\Re[G(j\omega)] = \Re \left[ \frac{a + j\omega}{2 - \omega^2 + j2\omega} \right] = \frac{a(2 - \omega^2) + 2\omega^2}{(2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2}$$

を得る。これがすべての  $\omega$  について正となるための条件は

$$2a > 0, \quad 2 - a \geq 0 \Rightarrow 0 < a \leq 2$$

となる。 $a = 1$  と  $a = 3$  について上述の LMI 条件を解くと、 $a = 1$  の場合解

$$P = \begin{bmatrix} 4.0 & 1.0 \\ 1.0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

が得られるが、 $a = 3$  の場合解は持たない。

### 2.2.3 KYP 補題の証明 \*

本項では、Rantzer による初等的な証明を示す。この証明は線形代数、および分離超平面の知識さえあれば理解できる。この証明の道筋を先に述べておく。まず、周波数域性質 (1) をある二つの集合が分離されることへ等価変換する。次に、二つの集合のうち、一つをある凸包に拡大しても分離性質が保たれることを示す。最後に、分離超平面原理を用いて時間域性質 (2) との等価性を示す。

証明のステップ 2 において、いくつかの準備が要るので、ここでこれらを先に述べておく。

補題 1  $F, G$  を同次元の複素行列とする。以下の命題が成立する。

- (1)  $FF^* = GG^*$  の必要十分条件は、あるユニタリ行列  $U$  について  $F = GU$  が成り立つことだ。
- (2)  $FF^* \leq GG^*$  の必要十分条件は、 $UU^* \leq I$  を満たすある  $U$  について  $F = GU$  が成り立つことだ。
- (3)  $FG^* + GF^* = 0$  の必要十分条件は、あるユニタリ行列  $U$  について  $F(I + U) = G(I - U)$  が成り立つことだ。
- (4)  $FG^* + GF^* \geq 0$  の必要十分条件は、 $UU^* \leq I$  を満たすある行列  $U$  について  $F(I + U) = G(I - U)$  が成り立つことだ。

証明 1 (1)  $FF^* = GG^*$  は  $\text{Ker}F^* = \text{Ker}G^*$  を意味する。よって、同じ行操作行列  $T$  で両者を  $TF = [F_1^T \ 0]^T$ 、 $TG = [G_1^T \ 0]^T$  に変換でき、かつ、 $F_1$  と  $G_1$  は共に行フルランクだ。このとき、 $U$  を用いて  $F_1 = G_1U$  と書けるならば

$$TF = \begin{bmatrix} F_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1U \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix} U = TGU \Rightarrow F = GU$$

も言える。従って、行フルランクの場合について示せばよい。このとき、 $FF^* = GG^* := H$  が正定行列になるため、エルミート行列  $H$  は  $H = H^{1/2}H^{1/2}$  のように正定な行列平方根の積に分解できる。そこで、 $U_{F1} = H^{-1/2}F$ 、 $U_{G1} = H^{-1/2}G$  (共に横長) と置けば  $FF^* = H^{1/2}H^{1/2} = GG^*$  より  $U_{F1}U_{F1}^* = I = U_{G1}U_{G1}^*$  が容易に分かる。すると、 $F = H^{1/2}U_{F1}$ 、 $G = H^{1/2}U_{G1}$  が成り立つ。さらに、 $U_F = [U_{F1}^*, U_{F2}^*]^*$  をユニタリにするような行列  $U_{F2}^*$  を持ってくれば、

$$F = \begin{bmatrix} H^{1/2} & \\ & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{F1} \\ U_{F2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H^{1/2} & \\ & 0 \end{bmatrix} U_F$$

と書ける。同様に、 $G$  も

$$G = \begin{bmatrix} H^{1/2} & \\ & 0 \end{bmatrix} U_G, \quad U_G = \begin{bmatrix} U_{G1} \\ U_{G2} \end{bmatrix}$$

に書ける。最後に、 $U = U_G^*U_F$  とすれば  $F = GU$  となり、 $U$  はユニタリとなる。

(2)  $FF^* \leq GG^*$  のとき、半正定行列  $GG^* - FF^* \geq 0$  を  $GG^* - FF^* = HH^*$  に分解できる。よって、

$$FF^* + HH^* = GG^* \Rightarrow \begin{bmatrix} F & H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F & H \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} G & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G & 0 \end{bmatrix}^*$$

を得る。ただし、 $\begin{bmatrix} F & H \end{bmatrix}$  と  $\begin{bmatrix} G & 0 \end{bmatrix}$  の次元は等しい。すると、(1) の結論よりあるユニタリ行列について次式が成立する。

$$\begin{bmatrix} F & H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U & V \\ V^* & W \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} U & V \\ V^* & W \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U & V \\ V^* & W \end{bmatrix}^* = I$$

これより、

$$F = GU, \quad UU^* \leq I$$

を得る。

(3) と (4) は、それぞれ  $F, G$  を  $G - F, G + F$  に置き換えることで導ける。

補題 2  $f, g \in \mathbb{C}^n$ 、 $g \neq 0$  と仮定する。以下が成り立つ。

(1)  $fg^* + gf^* = 0$  はある  $\omega \in \mathbb{R}$  について  $f = j\omega g$  が成り立つことと等価だ。

(2)  $fg^* + gf^* \geq 0$  はある正の実部を持つ  $s \in \mathbb{C}$  について  $f = sg$  が成り立つことと等価だ。

証明 2 次の変換を用いる。

$$U = \frac{1-s}{1+s} \Leftrightarrow s = \frac{1-U}{1+U}$$

$s = j\omega$  のとき  $U$  がユニタリとなり、 $s$  が正の実部を持つとき  $UU^* \leq 1$  となる。すると、補題 1(3,4) より直ちに結論を得る。

補題 3  $M, N$  を  $n \times r$  次元の複素行列とする。ある  $W \geq 0$  について

$$NWM^* + MWN^* = 0$$

が成り立つとき、 $W$  は

$$Nw_k w_k^* M^* + Mw_k w_k^* N^* = 0 \quad \forall k = 1, \dots, r \quad (2.19)$$

を満たす複素ベクトル  $w_k \in \mathbb{C}$  を用いて  $W = \sum_{k=1}^r w_k w_k^*$  に書ける。

証明 3  $W$  を  $W^{1/2}W^{1/2}$  に分解してから、それぞれ  $M, N$  に吸収させる。すると、補題 1(3) によればあるユニタリ行列  $U$  について

$$MW^{1/2}(I + U) = NW^{1/2}(I - U)$$

が成り立つ。正規直交の複素ベクトル基底  $\{u_k \in \mathbb{C}^r | k = 1, \dots, r\}$  で  $r \times r$  次元のユニタリ行列の基底  $\{u_k u_k^* | k = 1, \dots, r\}$  を作ると、 $U$  は

$$U = \sum_{k=1}^r \alpha_k u_k u_k^*, \quad \alpha_k \in \mathbb{C}$$

と書ける。結合係数  $\alpha_k$  を求めるために、本式に  $u_k$  をかける。 $\{u_k\}$  の正規直交性質  $u_i^* u_j = \delta_{ij}$  から  $Uu_k = \alpha_k u_k$  を得る。つまり、 $\alpha_k, u_k$  は  $U$  の固有値と固有ベクトルだ。さらに、 $U^*U = I$  より  $|\alpha_k| = 1$  が分かる。よって、 $\alpha_k$  はある位相角  $\theta_k$  を使って  $\alpha_k = e^{j\theta_k}$  のように表せる。そこで、ベクトル  $w_k$  を  $w_k = W^{1/2}u_k$  と定義する。このとき、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^r w_k w_k^* &= \sum_{k=1}^r W^{1/2} u_k u_k^* W^{1/2} = W^{1/2} \left( \sum_{k=1}^r u_k u_k^* \right) W^{1/2} = W^{1/2} \cdot I \cdot W^{1/2} \\ &= W \end{aligned}$$

となる。ただし、正規直交基底  $\{u_k\}$  の性質  $\sum_{k=1}^r u_k u_k^* = I$  を用いた。さらに、 $k = 1, \dots, r$  について

$$\begin{aligned} Mw_k(1 + e^{j\theta_k}) &= MW^{1/2}(I + U)u_k \\ &= NW^{1/2}(I - U)u_k \\ &= Nw_k(1 - e^{j\theta_k}) \end{aligned}$$

も成り立つ。補題 1(3) を適用すれば (2.19) が得られる。

定理 2 の証明 \*

冒頭で触れたように証明は三つのステップに分かれる。

Step 1: 命題 (1) をある二つの集合の分離条件に等価変換する。

行列の半正定性の定義により、命題 (1) は任意の  $u \in \mathbb{C}^m$  と周波数  $\omega$  に対して

$$\begin{bmatrix} x(\omega) \\ u \end{bmatrix}^* M \begin{bmatrix} x(\omega) \\ u \end{bmatrix} \leq 0$$

が成立することと等価だ。ただし、ベクトル  $x(\omega) = (j\omega I - A)^{-1}Bu \in \mathbb{C}^n$  は周波数  $\omega$  と入力  $u$  に依存している。次に、下の二つの集合を導入する。

$$\mathcal{P} = \{(r, 0) : r > 0\}$$

$$\Theta(\omega) = \left\{ \left( \begin{bmatrix} x(\omega) \\ u \end{bmatrix}^* M \begin{bmatrix} x(\omega) \\ u \end{bmatrix}, x(\omega)(Ax(\omega) + Bu)^* + (Ax(\omega) + Bu)x^*(\omega) \right) \right\}$$

ただし、 $u$  は任意で、 $x(\omega)$  は上述の信号だ。 $x(\omega)$  は  $j\omega x(\omega) = Ax(\omega) + Bu$  を満たすので、 $x(\omega)^*(Ax(\omega) + Bu) + (Ax(\omega) + Bu)^*x(\omega) = 0$  が成り立つ。この二つの集合が交わらないことは明らかに上の不等式条件と等価だ。

Step 2 :  $x(\omega)$  を  $\omega$  と  $u$  に独立な任意の  $x$  に替え、集合  $\Theta(\omega)$  を次のように拡大させる。

$$\Theta = \left\{ \left( \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}^* M \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}, x(Ax + Bu)^* + (Ax + Bu)x^* \right) : (x, u) \in \mathbb{C}^{n+m} \right\}$$

このとき、 $(x, u)$  が任意なので、 $x(Ax + Bu)^* + (Ax + Bu)x^* = 0$  はもはや保証されない。つまり、 $\Theta(\omega) \subset \Theta$  の包含関係になる。以下、 $\Theta(\omega) \cap \mathcal{P} = \emptyset$  と  $\Theta \cap \mathcal{P} = \emptyset$  の等価性を示す。

$\Theta$  と  $\mathcal{P}$  が分離される時、 $\Theta(\omega) \subset \Theta$  より明らかに  $\Theta(\omega)$  と  $\mathcal{P}$  も分離される。よって以下では、 $\Theta(\omega) \cap \mathcal{P} = \emptyset$  ならば  $\Theta \cap \mathcal{P} = \emptyset$  となることを示す。このために、 $\Theta$  の凸包  $\text{conv}\Theta$  を考え、 $\text{conv}\Theta \cap \mathcal{P} \neq \emptyset$  のときに矛盾が生じることを示す。 $\Theta$  が円錐だから<sup>2</sup>、

$$\sum_{k=1}^N \left( \begin{bmatrix} x_k \\ u_k \end{bmatrix}^* M \begin{bmatrix} x_k \\ u_k \end{bmatrix}, x_k(Ax_k + Bu_k)^* + (Ax_k + Bu_k)x_k^* \right) \quad (2.20)$$

が  $\text{conv}\Theta$  の要素だ。関係式

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_k \\ u_k \end{bmatrix}^* M \begin{bmatrix} x_k \\ u_k \end{bmatrix} &= \text{Tr} \left( \begin{bmatrix} x_k \\ u_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ u_k \end{bmatrix}^* M \right) \\ (Ax_k + Bu_k)x_k^* &= [A \ B] \begin{bmatrix} x_k \\ u_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ u_k \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

に注意すれば、(2.20) 式は

$$\left( \text{Tr}(WM), [I \ 0]W \begin{bmatrix} A^T \\ B^T \end{bmatrix} + [A \ B]W \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

<sup>2</sup> $\theta \in \Theta$  に  $t \geq 0$  をかけたとき、 $(x_1, u_1) = \sqrt{t}(x, u)$  と置けば分かるように  $t\theta \in \Theta$  が成り立つ。よって、集合は  $\Theta$  円錐だ。



にまとめることができる。ただし、エルミート行列  $W$  は

$$W = \sum_{k=1}^N \begin{bmatrix} x_k \\ u_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ u_k \end{bmatrix}^* \geq 0$$

だ。凸包  $\text{conv}\Theta$  が  $\mathcal{P}$  と交わりがあるとき、あるベクトル列  $(x_1, u_1), \dots, (x_N, u_N)$  について

$$\text{Tr}(WM) > 0, [I \ 0]W \begin{bmatrix} A^T \\ B^T \end{bmatrix} + [A \ B]W \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

が成立する。2番目の等式に補題3を適用すると、補題3のように適当に組み替えたベクトル列  $(x_1, u_1), \dots, (x_{n+m}, u_{n+m})$  で  $W$  を  $W = \sum \begin{bmatrix} x_k \\ u_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ u_k \end{bmatrix}^*$  に分解でき、かつ、 $x_k(Ax_k + Bu_k)^* + (Ax_k + Bu_k)x_k^* = 0$  が成り立つ。よって、補題2によると、ある  $\omega$  について  $x_k = (j\omega I - A)^{-1}Bu_k$  が成り立つ。すなわち、これらの  $(x_k, u_k)$  は  $\Theta \cap \Theta(\omega)$  の要素を作るベクトルとなる。また、一番目の不等式から、少なくとも一つの  $k$  について  $\begin{bmatrix} x_k \\ u_k \end{bmatrix}^* M \begin{bmatrix} x_k \\ u_k \end{bmatrix} > 0$  が成り立つ。すると、 $\Theta(\omega) \cap \mathcal{P} \neq \emptyset$  となり、与えられた条件に矛盾する。

Step 3:  $\Theta \cap \mathcal{P} = \emptyset$  と命題(2)の等価性を示す。

$\Theta \cap \mathcal{P} = \emptyset$  のとき、この二つの集合を分離する超平面が存在する。分離超平面の法線を  $(p, P)$  と置く。ただし、 $p$  はスカラー、 $P$  は正方行列だ。 $\Theta$  は次式で規定される半空間に含まれる。

$$\begin{aligned} 0 &\geq p \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}^* M \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} + \text{Tr}(P[x(Ax + Bu)^* + (Ax + Bu)x^*]) \\ &= \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}^* \left\{ pM + \begin{bmatrix} A^T P + PA & PB \\ B^T P & 0 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$(x, u)$  が任意なので、本式は

$$pM + \begin{bmatrix} A^T P + PA & PB \\ B^T P & 0 \end{bmatrix} \leq 0 \quad (2.21)$$

と等価だ。残るは、 $p = 1$  と置けることを示すのみだ。 $\mathcal{P}$  が逆の半空間に含まれることを思い出せば、 $p \cdot r + \text{Tr}(P \cdot 0) = pr \geq 0$  となることが分かる。故に、 $p \geq 0$ 。

一般性を失うことなく、 $P = \text{diag}(P_1, 0)$ ,  $\det(P_1) \neq 0$  と置ける。もし  $p = 0$  ならば、 $(A, B)$  を  $P$  の分割に合わせて

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$$

に分割したとき、行列不等式 (2.21) から

$$\begin{bmatrix} A_{11}^T P_1 + P_1 A_{11} & P_1 A_{12} & P_1 B_1 \\ A_{12}^T P_1 & 0 & 0 \\ B_1^T P_1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \leq 0$$

$$\Rightarrow P_1 B_1 = 0, P_1 A_{12} = 0 \Rightarrow A_{12} = 0, B_1 = 0$$

が得られる。このとき、 $A_{11}$  ブロックは不可制御になり、 $(A, B)$  の可制御性と矛盾する。従って、 $p > 0$  が言えた。最後に、(2.21) 式を  $p$  で割り、 $P/p$  を再び  $P$  と置き直せば命題 (2) が導かれる。

また、命題 (2) が成立するとき、法線  $(1, P)$  を持つ超平面が集合  $\Theta(\omega)$  と開集合  $\mathcal{P}$  を分離する。よって、 $\mathcal{P}$  が開集合であることから両者が交わらない。

最後に、厳密な不等式の場合だが、証明の手順は同じだ。ただし、凸集合  $\mathcal{P}$  を

$$\mathcal{P} = \{(r, 0) : r \geq 0\}$$

に改め、また厳密な分離を保証するために集合  $\Theta$  をコンパクトにする。ここで、対  $(x, u)$  に対して

$$\|x\|^2 + \|u\|^2 \leq 1$$

を満たすように制限を加える。そうすることで、(2.21) 式において厳密な不等式が得られる。そして、 $p = 0$  ならば (2.21) 式右下のブロックは 0 になるので、厳密な不等式は満たされない。よって、可制御条件なしに  $p \neq 0$  が言える。

## 2.3 関数の内積

さて、いままではベクトルや関数の大きさを考えてきた。しかし、ベクトルや信号間の関係には大小関係だけでなく、方向関係、すなわちベクトル間の角度 (あるいは信号間の位相ずれ<sup>3</sup>) も重要な要素である。

2次元ユークリッド空間では、ベクトルの間の角度については幾何学的に二つのベクトルがなす角度 (図 2.2) として考えられている。図 2.2 の二つのベクトルを  $u_i = [x_i \ y_i]^T$  ( $i = 1, 2$ ) とする。この角度の計算に余弦定理

$$\|u_1 - u_2\|_2^2 = \|u_1\|_2^2 + \|u_2\|_2^2 - 2 \|u_1\|_2 \|u_2\|_2 \cos \theta$$

が使われる。この式を展開すると、

$$\cos \theta = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\|u_1\|_2 \|u_2\|_2} = \frac{u_1^T u_2}{\|u_1\|_2 \|u_2\|_2}$$

<sup>3</sup>正弦波  $\sin(\omega t + \varphi)$  は 2次元ベクトル空間上で、初期角度  $\varphi$ 、回転速度  $\omega$  で反時計まわりに回転する単位ベクトルの縦軸への投影に等しい。ゆえに、正弦波信号  $\sin(\omega t)$  と  $\sin(\omega t - \varphi)$  の位相差は同じ速度で回転する二つの単位ベクトル間の角度と見なすことができる。

となることがわかる。 $u_1^T u_2$  はベクトルをスカラへ写像する関数であり、内積 (inner product) と呼ばれる。それを

$$\langle u_1, u_2 \rangle = u_1^T u_2 \quad (2.22)$$

で表記する。すると、

$$\cos \theta = \frac{\langle u_1, u_2 \rangle}{\|u_1\|_2 \|u_2\|_2}, \quad \theta \in [0, \pi]$$

が成り立ち、内積と角度は一对一の関係にある。もっと次元の高いベクトル空間や関数空間では、角度は書けないので、内積で角度という概念を定義する必要がある。

図 2.2: 内積と角度

そこで、まず上記の内積の性質を調べる。式 (2.22) の内積は以下の性質をすべて有している。

- (1) 任意のスカラ  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  に対して、 $\langle x, \alpha y + \beta z \rangle = \alpha \langle x, y \rangle + \beta \langle x, z \rangle$
- (2)  $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ <sup>4</sup>
- (3)  $\langle x, x \rangle \geq 0$

$V$  をベクトル空間あるいは関数空間とすると、上述の性質をすべて満たす関数  $\langle x, y \rangle : V \mapsto \mathbb{C}$  を内積と呼ぶ。

たとえば、2 乗可積のベクトル関数について

$$\begin{aligned} \langle f(t), g(t) \rangle &= \int_0^\infty f^T(t)g(t)dt \\ \langle \hat{f}(j\omega), \hat{g}(j\omega) \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \hat{f}^*(j\omega)\hat{g}(j\omega)d\omega \end{aligned}$$

がともに内積である。また、2 乗可積の行列関数については

$$\begin{aligned} \langle F(t), G(t) \rangle &= \int_0^\infty \text{Tr}(F^T(t)G(t)) dt \\ \langle \hat{F}(j\omega), \hat{G}(j\omega) \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \text{Tr}(\hat{F}^*(j\omega)\hat{G}(j\omega)) d\omega \end{aligned}$$

が内積である。

内積の定義されたベクトル (関数) 空間は内積空間 (inner product space) という。明らかに、 $\|u\| := \sqrt{\langle u, u \rangle}$  とすると??節のノルム条件を満たす。このノルムを内積から誘導されたノルムという。

<sup>4</sup>複素ベクトル (関数) の内積の性質である。実数ベクトル (関数) の場合、 $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$  となる。

内積空間  $V$  における二つのベクトル (関数)  $u, v$  の間の角度は式

$$\cos \theta = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \|v\|}, \quad \theta \in [0, \pi] \quad (2.23)$$

で定義される。ただし、分母のノルムは内積から誘導されたものでなければならない。また、 $\langle u, v \rangle = 0$  のとき、その間の角度は式 (2.23) より  $90^\circ$  となるから、 $u, v$  が直交するといひ、 $u \perp v$  と書く。

内積および内積から誘導されたノルムは、以下の性質をもつ。

定理 3  $V$  を内積空間とし、 $u, v \in V$  とするとき、以下の結果が成り立つ。

- (1)  $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|$  (Cauchy-Schwarz の不等式)。等式が成り立つのは、 $u = \alpha v$  ( $\alpha$  は定数) か  $u = 0$ 、あるいは  $v = 0$  のときに限る。
- (2)  $\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$  (平行四辺形法則)
- (3)  $u \perp v$  ならば、 $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$  (ピタゴラスの定理)

## 第3章 プラント集合のモデル化

本章では、モデルの不確かさに焦点を絞り、この不確かさを考えた制御系設計法であるロバスト制御の基礎を述べる。ここでは、不確かさの表現、その上界のモデル化の方法、ロバスト安定性とロバスト性能の概念を説明する。ロバスト制御系設計の基本をなすのは小ゲイン定理である。本章ではこの小ゲイン定理を詳しく説明し、これに基づいてさまざまな不確かさをもつプラント集合に対するロバスト安定の条件を導き、さらに、ロバスト性能の十分条件も導出する。これらの条件は基本的に重み付きの閉ループ伝達行列に関する  $\mathcal{H}_\infty$  ノルムで与えられる。

### 3.1 パラメータ変動の扱い

例 14 図 3.1 に示すマス・バネ・ダンパー系を考える。バネとダンパーは壁に固定する。ここで、 $y(t)$  はマスの変位、 $m$  はその質量、 $b$  はダンパーの粘性摩擦係数、 $k$  はバネ係数、 $u(t)$  は外力を表す。

このシステムの状態方程式は次式となる。ただし、測定出力を変位  $y$  とする。

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u, \quad x = \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

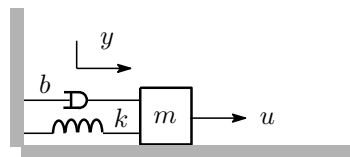


図 3.1: マス・バネ・ダンパー系

各パラメータは不確かかで、以下の変動幅内で値をとるとする。

$$m_1 \leq m \leq m_2, \quad b_1 \leq b \leq b_2, \quad k_1 \leq k \leq k_2 \quad (3.2)$$

パラメータをベクトルに並べるとき、 $[m \ b \ k]$  が 3 次元空間で 8 つの頂点を持つ 6 面体 (立方体) をなす

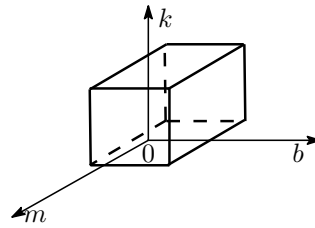


図 3.2: パラメータ空間

本問題において、おのおのの変動パラメータをノルム有界変動として捉えようと、ロバスト性の条件 (小ゲイン条件) は非常に保守的になり、実用的でない。従って、パラメータ変動を自然に扱える方法がほしい。

例 15 リニアサーボモータはローレンツ力を利用した直線推進用のモータだ。その原理は二つのレールにそれぞれ同極性の磁石を  $S, N$  極の順番に多数配置し、移動テーブルの底部にある電磁コイルの極性を周期的に  $S, N, S, N$  のように変化させることによってローレンツ力を発生させテーブルを直進させるものだ。コイルの極性変化はサーボアンプによって実現される。入力 は速度の指令値、測定出力はテーブルの変位だ。システム全体が

$$G(s) = \frac{K}{s(Ts + 1)} = \frac{K/T}{s(s + 1/T)} \quad (3.3)$$

となるように設計されている。状態をテーブルの変位と速度にとれば、状態方程式は次式となる。

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{T} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K}{T} \end{bmatrix} u \quad (3.4)$$

しかし、本来リニアモータに磁束漏れやレールとの摩擦などの非線形現象が存在し、線形モデルで正確に描写できない。そこで、このような要因を時定数とゲインの変化として扱う。例えば、様々な速度指令値について実験を行えば異なった動作点における時定数とゲインが同定できる。その一例を図に示す。

この場合、時定数とゲインの相関関係ははっきりしないため、賢い扱い方はこれら実験データを囲む一番小さい長方形で近似することだ。つまり、

$$T_1 \leq T \leq T_2, \quad K_1 \leq K \leq K_2$$

と考えることだ (図 3.3)。

しかし、実測値の分布をよく観察すると図 3.4 のポリトープでより小さい集合で実測値を囲める。

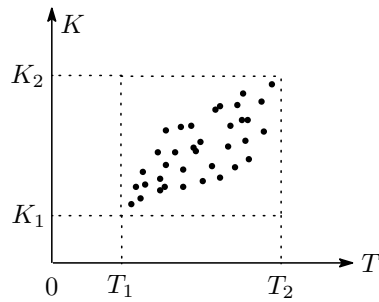


図 3.3: 長方形近似：リニアモーターのパラメータ実測値

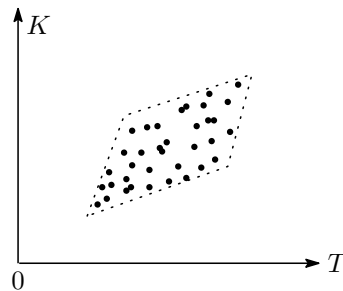


図 3.4: 別のポリトープ近似：リニアモーターのパラメータ実測値

### 3.1.1 パラメータベクトルのポリトープ集合

では、例 14 に現れた立方体にある任意のパラメータベクトル  $[m \ b \ k]$  をどのように式で表現できるだろうか。これを知るために、まず、一つのパラメータだけが変動する場合について調べる。

ここで、質量が  $m$  が幅  $[m_1, m_2]$  内で任意の値を取る場合について考察する。変動幅の両頂点  $m_1, m_2$  が既知であることに着目し、変動幅内の任意の点をどうやって頂点を用いて表すかを考える。一番素直な考え方は、一つの頂点を始点にして、そこからの変化分を加えていくものだ。変化分は幅と変化率を表す新しい変数  $\lambda \in [0, 1]$  を用いて表せる。よって、 $m \in [m_1, m_2]$  は

$$m = m_2 - \lambda(m_2 - m_1) = \lambda m_1 + (1 - \lambda)m_2$$

のように表せる。上式に現れる二つの係数の和が 1 に等しいことに注意すると、さらに以下のようにスマートな形式に書ける。

$$m = \alpha_1 m_1 + \alpha_2 m_2, \quad \alpha_1 = \lambda, \alpha_2 = 1 - \lambda \Rightarrow \alpha_1 + \alpha_2 = 1, \alpha_i \geq 0 \quad (3.5)$$

これは線分頂点  $m_1, m_2$  の凸結合だ。

次に、二つのパラメータ  $(m, b)$  が変動する場合、 $m \in [m_1, m_2], b \in [b_1, b_2]$

はそれぞれ

$$m = \alpha_1 m_1 + \alpha_2 m_2, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 1, \alpha_i \geq 0$$

$$b = \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2, \quad \beta_1 + \beta_2 = 1, \beta_i \geq 0$$

で表せる。ベクトル  $[m \ b]$  が図 3.5 に示すように 4 つの頂点を持つ長方形である。

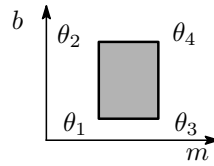


図 3.5: 二つのパラメータ変動

ここで、各頂点ベクトルをそれぞれ

$$\theta_1 = \begin{bmatrix} m_1 \\ b_1 \end{bmatrix}, \quad \theta_2 = \begin{bmatrix} m_1 \\ b_2 \end{bmatrix}, \quad \theta_3 = \begin{bmatrix} m_2 \\ b_1 \end{bmatrix}, \quad \theta_4 = \begin{bmatrix} m_2 \\ b_2 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

とし、長方形内のベクトル  $[m \ b]$  を頂点で表してみる。簡単な計算により  $\theta$  は

$$\theta = \begin{bmatrix} m \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\beta_1 + \beta_2)(\alpha_1 m_1 + \alpha_2 m_2) \\ (\alpha_1 + \alpha_2)(\beta_1 b_1 + \beta_2 b_2) \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

$$= \alpha_1 \beta_1 \begin{bmatrix} m_1 \\ b_1 \end{bmatrix} + \alpha_1 \beta_2 \begin{bmatrix} m_1 \\ b_2 \end{bmatrix} + \alpha_2 \beta_1 \begin{bmatrix} m_2 \\ b_1 \end{bmatrix} + \alpha_2 \beta_2 \begin{bmatrix} m_2 \\ b_2 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

で表せることが分かる。各頂点の係数に新しい名前をつけ、その関係を調べていくと

$$\lambda_1 = \alpha_1 \beta_1, \quad \lambda_2 = \alpha_1 \beta_2, \quad \lambda_3 = \alpha_2 \beta_1, \quad \lambda_4 = \alpha_2 \beta_2 \Rightarrow \lambda_i \geq 0$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = \alpha_1(\beta_1 + \beta_2) + \alpha_2(\beta_1 + \beta_2) = \alpha_1 + \alpha_2 = 1$$

が成り立つ。よって、長方形内のベクトル  $\theta$  が四つの頂点の凸結合で表せる。

$$\theta = \lambda_1 \theta_1 + \lambda_2 \theta_2 + \lambda_3 \theta_3 + \lambda_4 \theta_4$$

最後に、3つのパラメータがすべて変動する場合について調べる。このとき、パラメータ集合は8つの頂点を持つ6面体を形成する(図 3.6)。この場合でも、二つのパラメータの場合と同様に变形すれば、パラメータベクトルは



以下のようにすべての頂点の凸結合で書けることが分かる。

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} m \\ b \\ k \end{bmatrix} &= \lambda_1 \begin{bmatrix} m_1 \\ b_1 \\ k_1 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} m_1 \\ b_1 \\ k_2 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} m_1 \\ b_2 \\ k_1 \end{bmatrix} + \lambda_4 \begin{bmatrix} m_1 \\ b_2 \\ k_2 \end{bmatrix} \\ &+ \lambda_5 \begin{bmatrix} m_2 \\ b_1 \\ k_1 \end{bmatrix} + \lambda_6 \begin{bmatrix} m_2 \\ b_1 \\ k_2 \end{bmatrix} + \lambda_7 \begin{bmatrix} m_2 \\ b_2 \\ k_1 \end{bmatrix} + \lambda_8 \begin{bmatrix} m_2 \\ b_2 \\ k_2 \end{bmatrix} \quad (3.9) \\ \lambda_i &\geq 0, \quad \sum_{i=1}^8 \lambda_i = 1 \end{aligned}$$

以上で、ポリトープ内にあるパラメータベクトルは常にその頂点の凸結合で表せることを示した。

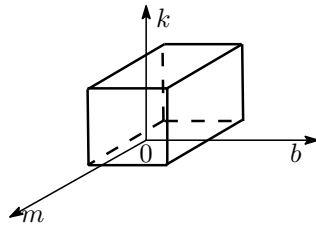


図 3.6: 三つのパラメータ変動

### 3.1.2 行列ポリトープ

実際のシステムモデルにおいて、パラメータがすべて線形の形で表れるは稀だ。例えば、マス・バネ・ダンパー系

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u, \quad x = \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

にはパラメータの積、除算及び逆数が現れる。この場合、係数行列がパラメータベクトルの頂点を代入したときの行列を凸結合して表せるかが問題だ。

質量  $m$  だけが変化する場合、その逆数は

$$\frac{1}{m} = \alpha_1 \frac{1}{m_1} + \alpha_2 \frac{1}{m_2}$$

のように頂点データの凸結合で表せる。これを代入すれば、各行列も次のように表現される。(  $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$  より)

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} &= \alpha_1 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m_1} & -\frac{b}{m_1} \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m_2} & -\frac{b}{m_2} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} &= \alpha_1 \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m_1} \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m_2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

これで構成した行列の集合は、行列ポリトープ (matrix polytope) という。

そこで、疑問となるのは  $m, b$  両方が変化する場合、変動パラメータの除算  $b/m$  が頂点の凸結合で表現できるかだ。以下の変形

$$\begin{aligned}\frac{b}{m} &= (\alpha_1 \frac{1}{m_1} + \alpha_2 \frac{1}{m_2})(\beta_1 b_1 + \beta_2 b_2) \\ &= \alpha_1 \beta_1 \frac{b_1}{m_1} + \alpha_1 \beta_2 \frac{b_2}{m_1} + \alpha_2 \beta_1 \frac{b_1}{m_2} + \alpha_2 \beta_2 \frac{b_2}{m_2} \\ &= \lambda_1 \frac{b_1}{m_1} + \lambda_2 \frac{b_2}{m_1} + \lambda_3 \frac{b_1}{m_2} + \lambda_4 \frac{b_2}{m_2}\end{aligned}$$

より分かるように、パラメータの除算も各頂点におけるパラメータの除算の凸結合となる。よって、このとき係数行列も次の行列ポリトープとなる。

$$\begin{aligned}A(m, b) &= \lambda_1 A(b_1, m_1) + \lambda_2 A(b_2, m_1) + \lambda_3 A(b_1, m_2) + \lambda_4 A(b_2, m_2) \\ B &= \lambda_1 B(m_1) + \lambda_2 B(m_1) + \lambda_3 B(m_2) + \lambda_4 B(m_2)\end{aligned}$$

パラメータの除算  $k/m$  についても同様だ。

結論として、相異なるパラメータの積、除算、逆数はすべてポリトープ頂点の凸結合で表せる!では、パラメータの2乗などの冪はどうか? 質量の2乗

$$m^2 = (\alpha_1 m_1 + \alpha_2 m_2)^2 = \alpha_1^2 m_1^2 + 2\alpha_1 \alpha_2 m_1 m_2 + \alpha_2^2 m_2^2$$

に交差積  $m_1 m_2$  が存在するので、明らかに  $m$  は頂点データの冪  $m_1^2$  と  $m_2^2$  だけで表せない。このように、パラメータの2次以上の冪は頂点の冪の凸結合にはならない。幸いなことに、実システムではパラメータの冪が現れる場合は稀だ。このことは前述の例からも見て取れる。しかし、後の設計問題においてはこの冪の問題がボトルネックになる。詳細は後の章で述べる。

これまでの例をまとめると、不確かなパラメータベクトル  $\theta$  を持つシステムはモデル

$$\dot{x} = A(\theta)x + B(\theta)u \quad (3.11)$$

$$y = C(\theta)x \quad (3.12)$$

で表現できる。ただし、各係数行列は行列ポリトープであり

$$A(\lambda) = \sum_{i=1}^N \lambda_i A(\theta_i), \quad B(\lambda) = \sum_{i=1}^N \lambda_i B(\theta_i) \quad (3.13)$$

$$C(\theta) = \sum_{i=1}^N \lambda_i C(\theta_i), \quad \lambda_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^N \lambda_i = 1 \quad (3.14)$$

$\theta_i$  はパラメータベクトルの頂点で既知だ。

演習：例15の行列ポリトープを計算せよ。

演習問題：モータと負荷を軸でつないだ2慣性系の状態モデル

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & -k/J_M & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & k/J_L & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1/J_M \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y &= [1 \ 0 \ 0]x \end{aligned}$$

$J_M, J_L, k$  はモータの慣性モーメント, 負荷の慣性モーメントと軸のバネ定数を表し、それぞれ以下の範囲内で変化する。

$$J_1 \leq J_L \leq J_2, \quad k_1 \leq k \leq k_2$$

本システムのポリトープ表現を求めよ。

## 3.2 位相情報を持つ不確かさ

摩擦やアクチュエータの飽和など、静的な非線形特性が多く存在する。これらを不確かさとして扱う際、その特性をうまく抽出できればより高性能のロバスト制御設計が可能となる。また、高次共振モードをもつ柔軟構造物の場合これら共振モードについてゲインの情報だけでなく、位相情報にも特徴を持つ。以下、例を通してこのような不確かさの特徴を調べ、どのようなモデルを用いればその特徴を表現できるかについて吟味する。

### 3.2.1 セクター内の静的非線形性

まず、図 3.7 のような飽和特性  $\phi(\cdot)$  は図示する 2 本の直線  $ku$  と  $0 \cdot u$  で挟むことができる。 $\phi(\cdot)$  の特性は

$$0 \leq \phi(u) \leq ku, \quad \forall u \geq 0; \quad -ku \leq \phi(u) \leq 0, \quad \forall u < 0 \quad (3.15)$$

のように区分的に表現できる。しかし、より特徴的なのは  $\phi(\cdot)$  が第 1, 3 象限にあることだ。つまり、その傾きが 0 から  $k$  の間に変化する。これは、 $\phi(\cdot)$  の位相角が零度でゲインが区間  $[0, k]$  の中で変化するを意味する。とくにその位相角範囲の情報は役に立つ。ちなみに、 $\phi(\cdot)$  は次のようにより簡潔に表せる。

$$0 \leq u\phi(u) \leq ku^2, \quad \forall u \quad (3.16)$$

電磁石における磁束と電流の関係はまさにこのような飽和特性を有している。

もし有限な入力範囲だけを想定する場合は、飽和特性  $\phi(\cdot)$  を挟む 2 本の直線は図示される  $ku$  と  $hu$  にすることができ、よりタイトにその変動範囲を記述できる。この場合、飽和特性の下界は次のように変わる。

$$hu^2 \leq u\phi(u) \leq ku^2, \quad \forall u \quad (3.17)$$

また、図 3.8 に示す非線形摩擦 (Stribeck 摩擦として知られている) も似たような特徴を持ち、ゲインの変化範囲は  $[k, \infty]$  となっている。

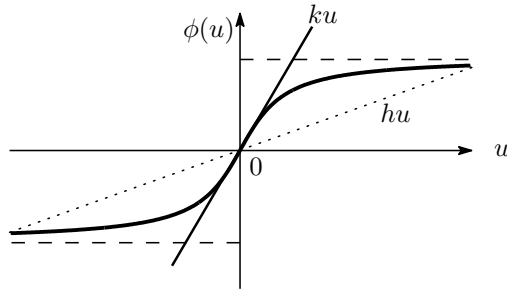


図 3.7: 飽和特性

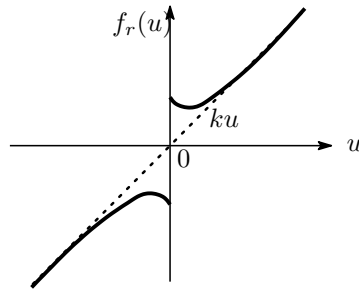


図 3.8: Stribeck 摩擦

### 3.2.2 正実な不確かさ

次に、宇宙柔軟構造物の特徴である高次共振モードについて検討する。高層ビルの振動モデルも同様だ。入力をトルク、出力を角速度とするとモデルは

$$P(s) = \frac{k_0 s}{s^2 + 2\zeta_0 \omega_0 s + \omega_0^2} + \frac{k_1 s}{s^2 + 2\zeta_1 \omega_1 s + \omega_1^2} + \cdots + \frac{k_n s}{s^2 + 2\zeta_n \omega_n s + \omega_n^2} \quad (3.18)$$

となる。ただし、すべてのゲイン  $k_i$  が正だ。1次振動モード  $\frac{k_0 s}{s^2 + 2\zeta_0 \omega_0 s + \omega_0^2}$  が比較的正確に同定できるが、2次以上の共振モードは正確に同定できない。そこで、これら高次共振モードを不確かさとして扱うことにする。高次共振モードをゲイン変動でモデル化することもできるが、よりこの不確かさの特徴をつかめるために、まず一つのモードについて解析してみる。

$$\frac{s}{s^2 + 2\zeta_i \omega_i s + \omega_i^2}$$

の周波数応答を計算すると、

$$\frac{j\omega}{\omega_i^2 - \omega^2 + j2\zeta_i \omega_i \omega} = \frac{2\zeta_i \omega_i \omega^2 + j\omega(\omega_i^2 - \omega^2)}{(\omega_i^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta_i \omega_i \omega)^2}$$

で、その実部が  $\zeta_i > 0$  のときに非負、 $\zeta_i = 0$  のときに0となる。これは位相角が  $-\pi/2$  から  $\pi/2$  までの値しかとらないことを意味する (この伝達関数の

Nyquist 軌跡の一例は図 3.9 に示されている)。これは正実伝達関数の性質だ。それゆえ、高次共振モード

$$\frac{k_1 s}{s^2 + 2\zeta_1 \omega_1 s + \omega_1^2} + \dots + \frac{k_n s}{s^2 + 2\zeta_n \omega_n s + \omega_n^2}$$

も同様の性質を持つ。すなわち、高次共振モードの和は正実関数だ。これは柔軟構造物の大きな特徴だ。

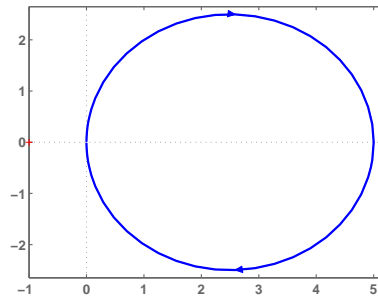


図 3.9: 正実伝達関数の Nyquist 軌跡の例

### 3.3 LPV モデルと非線形システム

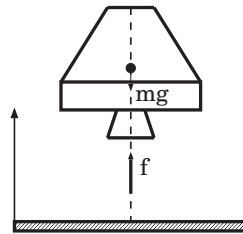


図 3.10: 月面探索機

図 3.10 に示す月面に軟着陸する月面探索機のモデルを考える。燃料を含めた探索機の質量を  $m$  とすると、スラストの推力は  $f = km$  となる。入力を  $u = \dot{m}$ 、探索機の高度を  $y$  とする。月表面の重力定数を  $g$  とし、このシステムの状態ベクトル  $x = [y \ \dot{y} \ m]^T$  に関する状態方程式は Newton の法則  $F = d(m\dot{y})/dt$  で導ける。

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -g + \frac{k - x_2}{x_3} u, \quad \dot{x}_3 = u \quad (3.19)$$

状態変数  $x_3$  は燃料の燃焼によって減っていくが、その変化範囲は搭載した燃料を超えられず、既知だ。そして、速度  $x_2$  の変化範囲も見積もれる。そこで、

$$p(t) = \frac{k - x_2}{x_3}$$

を時変パラメータとして扱う。すると、モデルは

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ p \\ 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ -g \\ 0 \end{bmatrix}$$

と書ける。これは線形モデルではないが、時変係数を持つアフィンモデルとなっている。

一般に、非線形システムを狭い動作範囲で稼働させる場合、その制御は線形近似モデルを使うだけで用が足りる。しかし、大域的に制御したい場合や動作範囲が広い場合では、線形近似モデルにはもはや信頼を置けない。線形制御もどきの制御手法で非線形システムを制御したいニーズがきわめて多い。このとき、非線形モデルをどのように疑似非線形にするかが課題となる。その手法の一つは上述の例にあったように非線形性を時変パラメータとして扱うことだ。次の LPV (linear parameter varying、線形パラメータ可変型) モデルはその一般形だ。

$$\dot{x} = A(p(t))x + B(p(t))u \quad (3.20)$$

$$y = C(p(t))x \quad (3.21)$$

ここに、 $p(t)$  は時変のパラメータベクトルであり、各行列は  $p(t)$  のアフィン関数だ。

例えば、二つのパラメータ  $p(t) = [p_1(t) \ p_2(t)]$  の場合、各係数行列は次のように与えられ、 $p(t)$  を除きすべて既知だ。

$$A(p(t)) = A_0 + p_1(t)A_1 + p_2(t)A_2, \quad B(p(t)) = B_0 + p_1(t)B_1 + p_2(t)B_2$$

$$C(p(t)) = C_0 + p_1(t)C_1 + p_2(t)C_2$$

### 3.3.1 非線形系の LPV モデルへの変換

多くの非線形システムについては、その動特性の特徴を生かすことで LPV モデルに変換できる。例えば、アクチュエータの飽和特性  $\phi(u)$  を滑らかな関数で描写できる場合、時変ゲインを持つ線形項に書き換えられる。例えば、

$$\phi(u) = \arctan u = \frac{\arctan u}{u} u = g(u)u$$

とすると、その時変ゲイン  $g(u) = \frac{\arctan u}{u}$  は有界になる。

次に、一機対無限大母線電力系統 (single-machine infinite-bus power system) と呼ばれる非線形システムを如何にして LPV モデルへ変換するかについて詳しく説明する。なお、母線とは電力系統の専門用語で、発電機が連系する電力系統全体を一つの電圧源としてまとめたものだ。

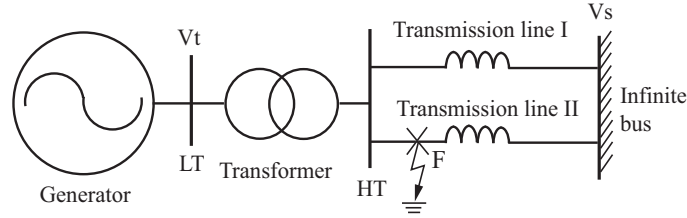


図 3.11: Single-machine infinite-bus power system

この電力システムの非線形モデルは次の微分方程式で記述されている。

$$\dot{\delta} = \omega - \omega_0 \quad (3.22)$$

$$\dot{\omega} = \frac{\omega_0}{M} P_M - \frac{\omega_0}{M} (P_e + d) - \frac{D}{M} (\omega - \omega_0) \quad (3.23)$$

$$\dot{E}'_q = \frac{1}{T_{d0}} \left\{ -\frac{x_{d\Sigma}}{x'_{d\Sigma}} E'_q + \frac{x_d - x'_d}{x'_{d\Sigma}} V_s \cos \delta + V_f \right\} \quad (3.24)$$

$\omega_0 (= 2\pi f_0)$  は定格回転数であり、50[Hz] の系統では 314[rad/sec] に等しい。 $\delta$  は相角、 $\omega$  は発電機回転子の角速度、 $E'_q$  は過渡誘導起電力、 $V_s$  は母線の電圧、 $P_M$  は機械パワーだ。また、 $d$  は連系したほかの発電機からの影響や送電線の故障による外乱を表す。さらに、出力の有効電力は状態の非線形関数

$$P_e = \frac{E'_q V_s}{x'_{d\Sigma}} \sin \delta - \frac{V_s^2}{2} \frac{x_d - x'_d}{x'_{d\Sigma} x_{d\Sigma}} \sin 2\delta \quad (3.25)$$

で与えられる。他はすべて既知のパラメータだ (第??章付録参照)。制御入力 は界磁電圧  $V_f$  だ。ここでは、送電線短絡事故を想定した過渡安定化制御を考える。短絡事故、特に発電機出力端付近で起きる短絡事故は、出力できる有効電力を零まで落とすため、(3.23) 式より分かるように発電機の回転子は急激に加速する。すばやく短絡した線路を切り離すと同時に励磁制御を行わなければ、発電機は脱調してしまう。励磁制御には現在サイリスタを用いた高速励磁機が使用されている。短絡事故においては、各状態が平衡点から大きく外れ、線形近似は当てはまらない。

この電力システムの平衡点とは、機械パワーと出力される有効電力が釣り合う状態であり、以下のように置く。

$$(\delta_0, \omega_0, E'_{q0}, V_{f0})$$

制御の目的は、状態変数を平衡点に戻すことなので、誤差状態の安定化と等価だ。故に、以下の誤差状態を置き、それらに関する状態方程式を立ててか

ら LPV モデルへ等価変換する。

$$x_1 = \delta - \delta_0, \quad x_2 = \omega - \omega_0, \quad x_3 = E'_q - E'_{q0}, \quad u = V_f - V_{f0} \quad (3.26)$$

関係式  $E'_q \sin \delta - E'_{q0} \sin \delta_0 = x_3 \sin \delta + E'_{q0}(\sin \delta - \sin \delta_0)$  を代入すると、誤差状態  $x$  に関する状態方程式は次式となる。

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (3.27)$$

$$\dot{x}_2 = c_1 S(\delta) + c_2 x_2 + c_3 \sin \delta x_3 + c_1 d \quad (3.28)$$

$$\dot{x}_3 = c_4(\cos \delta - \cos \delta_0) + c_5 x_3 + c_6 u \quad (3.29)$$

ただし、各係数は

$$c_1 = -\frac{\omega_0}{M}, \quad c_2 = -\frac{D}{M}, \quad c_3 = -\frac{\omega_0 V_s}{M x'_{d\Sigma}},$$

$$c_4 = \frac{x_d - x'_d}{T_{d0} x'_{d\Sigma}} V_s, \quad c_5 = -\frac{x_{d\Sigma}}{T_{d0} x'_{d\Sigma}}, \quad c_6 = \frac{1}{T_{d0}}$$

および

$$S(\delta) = k_1(\sin \delta - \sin \delta_0) - k_2(\sin 2\delta - \sin 2\delta_0),$$

$$k_1 = \frac{E'_{q0} V_s}{x'_{d\Sigma}}, \quad k_2 = \frac{V_s^2}{2} \frac{x_d - x'_d}{x'_{d\Sigma} x_{d\Sigma}}.$$

だ。

ここで、 $(\sin \delta - \sin \delta_0)/(\delta - \delta_0)$  と  $(\cos \delta - \cos \delta_0)/(\delta - \delta_0)$  が共に有界であることに着目する。状態方程式に現れる下記の非線形関数を時変ゲインを持つ疑似線形関数に書き換える。

$$\sin \delta - \sin \delta_0 = \frac{\sin \delta - \sin \delta_0}{\delta - \delta_0} x_1$$

$$\sin 2\delta - \sin 2\delta_0 = \frac{\sin 2\delta - \sin 2\delta_0}{\delta - \delta_0} x_1$$

$$\cos \delta - \cos \delta_0 = \frac{\cos \delta - \cos \delta_0}{\delta - \delta_0} x_1$$

以下のゲインはすべて相差点  $\delta$  に依存する。

$$p_1(\delta) = \frac{k_1(\sin \delta - \sin \delta_0) - k_2(\sin 2\delta - \sin 2\delta_0)}{\delta - \delta_0}$$

$$p_2(\delta) = \sin \delta$$

$$p_3(\delta) = \frac{\cos \delta - \cos \delta_0}{\delta - \delta_0}$$

相差点  $\delta(t)$  を測定すれば、時変パラメータ  $p(t) = [p_1 \ p_2 \ p_3]$  は実時間で計算できることも付言しておく。すると、状態方程式は次のように LPV モデルに変換される。

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (3.30)$$

$$\dot{x}_2 = c_1 p_1(\delta) x_1 + c_2 x_2 + c_3 p_2(\delta) x_3 + c_1 d \quad (3.31)$$

$$\dot{x}_3 = c_4 p_3(\delta) x_1 + c_5 x_3 + c_6 u. \quad (3.32)$$



(3.21) の LPV モデル形式に直すと

$$\begin{cases} \dot{x} = A(p)x + B_1d + B_2u \\ y = C_2x \end{cases} \quad (3.33)$$

となる。ただし、係数行列は

$$A(p) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ c_1p_1(\delta) & c_2 & c_3p_2(\delta) \\ c_4p_3(\delta) & 0 & c_5 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ c_6 \end{bmatrix}, \quad B_d = \begin{bmatrix} 0 \\ c_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

だ。さらに  $A(p)$  は次のアフィン形式に書き直せる。

$$A(p) = A_0 + p_1A_1 + p_2A_2 + p_3A_3 \quad (3.34)$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ c_4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

非線形システムを LPV モデルに書き換えるとき、状態依存の時変ゲインの有界性は大事だ。なぜなら、ロバスト制御設計で扱えるのは有界で、かつ、変動範囲が小さいパラメータだ。そういう意味で、非線形関数を全部時変ゲインを持つ線形関数に書き換えられるわけではない。

例 3 : 自動車の走行安定性



## 第4章 ロバスト解析2: Lyapunov 法

小ゲイン方法は、基本的にゲイン変動と位相変動両方を有する不確かさ、すなわち、動的な不確かさに対するものだった。パラメータ変動など、静的な変動の場合位相角は変わらない。この特徴を考慮しないと、得られるロバスト性条件は必要以上に厳しくなり、役に立たなくなる。本章では、パラメータ変動を有する不確かシステムについて、変動が実パラメータである特性をよりロバスト制御条件に反映できる Lyapunov 法を紹介する。

この手法は、もともと非線形システム安定解析手法の Lyapunov 法を、敢えて不確かな線形システムへ発展したもので、Barmish によって最初に提唱された。本章では、まず Lyapunov 理論の概略を説明してから、2次安定化を中心にこの手法によるロバスト安定性解析を述べる。

### 4.1 Lyapunov 安定理論

Lyapunov 安定理論は、ロシアの数学者 Lyapunov が 19 世紀末に提唱した非線形システム安定性解析の方法だ。この方法は、現代の非線形制御のみならず、ロバスト制御の基礎の一つにもなっている。

状態ベクトル  $x \in \mathbb{R}^n$  に関する次の非線形システムを考える。

$$\dot{x} = f(x), \quad x(0) \neq 0 \quad (4.1)$$

$f(x)$  は非線形ベクトル関数で、 $f(0) = 0$  を満たす。明らかに、原点  $x = 0$  が一つの平衡点だ。もし原点のある近傍から出発する状態の軌道が原点に収束するとき、原点がこの非線形システムについて漸近安定 (asymptotically stable) だという。いまの問題は、漸近安定性を保証できる条件を如何に探し出すかだ。

この安定性解析問題に対して、Lyapunov のアイデアは状態そのものの振舞いを直接調べる代わりにシステムのエネルギーの増減を調べることだ。発想は次のようなものだ。(4.1) 式の自由システムでは外部から供給されるエネルギーがないので、内部エネルギーが零のとき運動が止まる。一方、内部のエネルギーが零でない限り状態は止まらず動き続ける。ということは、内部エネルギーが零に収束するか否かを調べれば状態の原点への収束も分かるはずだ。

具体的には、エネルギーに相当するものとして Lyapunov 関数 (Lyapunov function) と呼ばれる正定関数  $V(x)$

$$V(x) > 0 \quad \forall x \neq 0 \quad (4.2)$$

を用いる。その時間に関する導関数が

$$\dot{V}(x) < 0 \quad \forall x \neq 0 \quad (4.3)$$

を満たすとき、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$

が保証される。なお、本章の研究対象が線形システムなので、非線形システムに関しては厳密な記述を避け、大雑把な流れの説明に止めておく。

線形システムについては、漸近安定条件は以下のように示せる。次の線形システム

$$\dot{x} = Ax, \quad x(0) \neq 0 \quad (4.4)$$

に対して、その Lyapunov 関数  $V(x)$  を以下の正定な 2 次関数

$$V(x) = x^T P x > 0 \quad \forall x \neq 0 \quad (4.5)$$

とする。 $V(0) = 0$  は明らかだ。2 次関数  $x^T P x$  の正定性は対称行列  $P$  の正定性  $P > 0$  と等価だ。もし状態  $x(t)$  の軌跡が

$$\dot{V}(x) < 0 \quad \forall x(t) \neq 0 \quad (4.6)$$

を満たすならば、 $V(x(t))$  は時間  $t$  と共に厳密に単調減少する。 $V(x) \geq 0$  より、 $V(x)$  は下有界となり、よって極限を持つ。(4.6) 式より  $x(t) \neq 0$  の限り、 $V(x)$  が減少し続けるため、 $x(\infty) = 0$  とならなければならない。

#### 4.1.1 漸近安定の条件

ここで、具体的に線形システム (4.4) の安定条件を導こう。上述の 2 次 Lyapunov 関数を使う。 $\dot{x} = Ax$  の軌道に沿って  $V(x) = x^T P x$  を微分すると、

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} \\ &= (Ax)^T P x + x^T P (Ax) \\ &= x^T (A^T P + P A) x \end{aligned} \quad (4.7)$$

が得られる。すべての非零状態  $x \neq 0$  において  $\dot{V}(x) < 0$  なるための条件は

$$A^T P + P A < 0 \quad (4.8)$$

が成り立つことだ。従って、この LMI が正定解  $P > 0$  を持てば、システムの漸近安定性が保証される。以上で、次の定理を得た。

定理 4 線形システム (4.1) に対して、(4.8) 式を満たす正定行列  $P > 0$  が存在することは漸近安定のための必要十分条件だ。

証明 4 以上の議論で十分性を示した。必要性については、次の小節の定理 5 命題 (3) を参照。

#### 4.1.2 Lyapunov 方程式

次の形式の線形行列方程式を Lyapunov 方程式 (Lyapunov equation) と呼ぶ。

$$A^T P + P A + Q = 0 \quad (4.9)$$

ただし、 $A, Q = Q^T$  は与えられた正方の実行列である。次の補題で示されるように、この方程式が一意解をもつための必要十分条件は、 $\lambda_i(A) + \bar{\lambda}_j(A) \neq 0 (\forall i, j)$  である。よって、 $A$  が安定の場合必ず一意解をもつ。

補題 4 Lyapunov 方程式 (4.9) が一意解を持つための必要十分条件は、次式が満たされることだ。

$$\lambda_i(A) + \bar{\lambda}_j(A) \neq 0 \quad \forall i, j$$

証明 5 Kronecker 積の性質を利用して行列型方程式 (4.9) をベクトル型方程式に書き換える。まず、

$$\begin{aligned} \text{vec}(PA) &= \text{vec}(I \cdot P \cdot A) = (I \otimes A) \text{vec}(P) \\ \text{vec}(A^T P) &= \text{vec}(A^T \cdot P \cdot I) = (A^T \otimes I) \text{vec}(P) \end{aligned}$$

が成り立つ。すると、(4.9) 式は

$$\begin{aligned} (A^T \otimes I + I \otimes A) \text{vec}(P) + \text{vec}(Q) &= 0 \\ \Rightarrow (A^T \oplus A) \text{vec}(P) &= -\text{vec}(Q) \end{aligned}$$

に等価変換される。 $A^T \oplus A$  の固有値が  $\lambda_j(A^T) + \lambda_i(A) = \lambda_i(A) + \bar{\lambda}_j(A)$  となる。この線形代数方程式が一意解を持つための必要十分条件は、係数行列が正則となることなので、補題の条件は必要かつ十分だ。

$A$  の安定性と解  $P$  の関係、および対  $(Q, A)$  と  $P$  の関係を次の定理に示す。

定理 5  $P$  を Lyapunov 方程式 (4.9) の解とする。このとき、以下の命題が成り立つ。

(1)  $A$  が安定であるとき、Lyapunov 方程式の解は次式によって与えられる。

$$P = \int_0^{\infty} e^{A^T t} Q e^{A t} dt \quad (4.10)$$

- (2)  $Q \geq 0$  かつ  $(Q, A)$  が可観測であるとき,  $P > 0$  と  $A$  の安定性は等価である.
- (3)  $Q > 0$  のとき,  $P > 0$  と  $A$  の安定性は等価である.
- (4)  $A$  が安定であるとき,  $Q \geq 0$  ならば,  $(Q, A)$  の可観測性と  $P > 0$  は等価である.

証明 6 (1) 与えられた  $P$  を代入し  $e^{A\infty} = 0$  を使うと, 次のように Lyapunov 方程式を満たすことが確認できる.

$$A^T P + PA = \int_0^\infty \frac{de^{A^T t} Q e^{At}}{dt} dt = e^{A^T t} Q e^{At} \Big|_0^\infty = -Q$$

(2)  $\lambda$  を  $A$  の任意の固有値,  $u \neq 0$  を対応する固有ベクトルとする. 式 (4.9) に左から  $u^*$ , 右から  $u$  をかけると

$$2\operatorname{Re}(\lambda)u^*Pu + u^*Qu = 0 \quad (4.11)$$

が成り立つ.  $P > 0$  のとき,  $u^*Pu > 0$ ,  $u^*Qu \geq 0$  が成り立つので,  $\operatorname{Re}(\lambda) \leq 0$  となる. もし  $\operatorname{Re}(\lambda) = 0$  であれば, 上式より  $Qu = 0$  を得る. しかしこのとき

$$(A - \lambda I)u = 0, \quad Qu = 0 \quad (4.12)$$

が成立し,  $(Q, A)$  の可観測性に矛盾する. よって,  $A$  が安定でなければならない.

逆に,  $A$  が安定のとき, 式 (4.10) より  $P$  が半正定である.  $\dot{x} = Ax$  の解が  $x(t) = e^{At}x(0)$  であることに注意すれば, 式 (4.10) の両辺に  $x(0)$  とその転置をかけると

$$x^T(0)Px(0) = \int_0^\infty x^T(t)Qx(t)dt$$

が得られる. もし  $P$  が正定でなければ,  $Px(0) = 0$  を満たす  $x(0) \neq 0$  が存在する. すると, 上式より  $x(t)$  が

$$Qx(t) \equiv 0, \quad \forall t \geq 0$$

を満たさなければならない. この式を時間について繰り返し微分すると

$$QA^i x(t) = 0, \quad i = 0, \dots, n-1, \quad \forall t \geq 0 \quad (4.13)$$

を得る. これは  $(Q, A)$  の可観測性に矛盾する. よって,  $P > 0$ .

(3)  $Q > 0$  のとき Lyapunov 方程式の解が正定ならば, 式 (4.11) より  $A$  の固有値  $\lambda$  がすべて  $\Re[\lambda] < 0$  を満たす. よって,  $A$  が安定だ. 逆に,  $A$  が安定のとき式 (4.10) より  $P > 0$  が明らかだ.

(4)  $(Q, A)$  が可観測ならば,  $P > 0$  となることは上で示した. その逆だけを示す. いま,  $P > 0$  であるが,  $(Q, A)$  は可観測でないとする. すると, ある  $\lambda \in \sigma(A)$  と  $u \neq 0$  があり, 式 (4.12) を満たす. 式 (4.11) より  $\operatorname{Re}(\lambda) = 0$  という,  $A$  の安定性に矛盾した結論を得る.

この補題から分かるように，Lyapunov 方程式は安定性の判別にだけでなく，可制御性や可観測性の判別にも非常に役立つものである．ただし，本補題は与えられたシステムの安定性の確認に使うよりも，制御系設計理論，特に最適制御設計論など理論的構築の際の安定性の証明に用いられる場合が多い．

例 16 2 次系について上記定理の命題 (2) を確かめよう．ここで，システムの係数行列は

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} \Rightarrow |sI - A| = s^2 + a_2s + a_1$$

で与えられるとする．すると  $a_1, a_2 > 0$  が安定条件となることは Routh-Hurwitz 判別法で容易に分かる．ここで，出力行列  $c$  を  $c = [1 \ 0]$  とすると， $(c, A)$  が可観測となる．Lyapunov 方程式

$$PA + A^T P + c^T c = 0$$

において変数行列を  $P = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix}$  とおいて代入すると

$$\begin{cases} p_1 - a_2 p_2 - a_1 p_3 = 0 \\ p_2 - a_2 p_3 = 0 \\ 2a_1 p_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -a_2 & -a_1 \\ 0 & 1 & -a_2 \\ 0 & 2a_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

を得る．上式が一意解をもつために左辺の係数行列が正則であることは必要十分である．係数行列の三角ブロック構造よりその正則性は右下の  $2 \times 2$  ブロックの正則性と等価になる．すなわち，

$$\begin{vmatrix} 1 & -a_2 \\ 2a_1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \iff a_1 a_2 \neq 0 \iff a_1 \neq 0, a_2 \neq 0 \quad (4.15)$$

が一意解の存在条件となる．

さらに，Lyapunov 方程式の展開式を順次解いていくと，

$$p_2 = \frac{1}{2a_1}, p_3 = \frac{1}{a_2} p_2 = \frac{1}{2a_1 a_2}, p_1 = a_2 p_2 + a_1 p_3 = \frac{a_1 + a_2^2}{2a_1 a_2}$$

が得られる．よって，Lyapunov 方程式の解は

$$P = \frac{1}{2a_1 a_2} \begin{bmatrix} a_1 + a_2^2 & a_2 \\ a_2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2a_1 a_2} \begin{bmatrix} 1 & a_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a_2 & 1 \end{bmatrix}$$

となる．したがって，以下の等価条件が成立する．

$$P > 0 \iff 2a_1 a_2 > 0, a_1 > 0 \iff a_1 > 0, a_2 > 0 \quad (4.16)$$

この条件は Routh-Hurwitz 判別法で導いた  $A$  の安定条件と同じである．

数値例

### 4.1.3 状態収束率の条件

LMI(4.8) がシステムの安定性を保証するものの、状態応答の収束速度について何ら保証もしてくれない。収束速度を保証するには、次の LMI 条件が使える。

$$A^T P + PA + 2\sigma P < 0 \quad (4.17)$$

この LMI が正定解  $P > 0$  を持つとき、

$$\dot{V}(x) = x^T (A^T P + PA)x < x^T (-2\sigma P)x = -2\sigma V(x)$$

が成立する。微分方程式  $\dot{y} = -2\sigma y$  の解が  $y(t) = e^{-2\sigma t} y(0)$  であることに注意し、比較の原理から  $V(x)$  が不等式

$$V(x(t)) < e^{-2\sigma t} V(x(0))$$

を満足する。さらに、 $\lambda_{\min}(P) \|x\|^2 \leq x^T P x \leq \lambda_{\max}(P) \|x\|^2$  の関係を利用すると

$$\lambda_{\min}(P) \|x(t)\|^2 \leq x^T(t) P x(t) < e^{-2\sigma t} x^T(0) P x(0) \leq e^{-2\sigma t} \lambda_{\max}(P) \|x(0)\|^2$$

を得る。よって

$$\|x(t)\| < \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}} e^{-\sigma t} \|x(0)\| \quad (4.18)$$

すなわち、状態ベクトル  $x(t)$  が収束率  $\sigma$  以上の速度で零へ指数的に収束する。

## 4.2 2次安定性

前節では、Lyapunov 安定理論の枠組みで線形公称システムの安定性を論じた。本節では、パラメータ不確かさを持つプラント集合の安定性を討論する。プラント集合は

$$\dot{x} = A(\theta)x, \quad x(0) \neq 0 \quad (4.19)$$

で与えられ、 $\theta \in \mathbb{R}^p$  は有界な不確かパラメータのベクトルだ。

例えば、マス・パネ・ダンパー系の場合 ( $u = 0$ )、動特性は

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} x = A(m, b, k)x$$

であり、パラメータベクトルは  $\theta = [m \ b \ k]$  だ。

本来ならば、パラメータが変化すれば Lyapunov 関数もそれに応じて変化させるべきだが、Lyapunov 関数とパラメータベクトル  $\theta$  の関係を知ることが一般にできない。そこで、Barmish がプラント集合 (4.19) のすべてに対して一つの 2 次関数  $V = x^T P x$  で安定性を調べることを提唱した。すなわち

$$V(x) = x^T P x > 0 \quad \forall x \neq 0; \quad \dot{V}(x, \theta) < 0 \quad \forall x \neq 0, \theta \quad (4.20)$$



を満たす  $V(x)$  で不確かシステムの安定性を確認する。固定した2次関数でプラント集合の安定性を示せる場合、プラント集合は2次安定 (quadratically stable) という。共通の Lyapunov 関数を用いるから、安定性の条件は比較的容易に見出せる。

当然、2次安定性は非常に強い安定性仕様だ。しかし、実用上かなり役立つことが様々な応用例によって実証されている。

#### 4.2.1 2次安定性の条件

$\dot{V}(x, \theta) = x^T(A^T(\theta)P + PA(\theta))x$  より、2次安定の条件は

$$A^T(\theta)P + PA(\theta) < 0 \quad \forall \theta \quad (4.21)$$

を満たす正定行列  $P > 0$  が存在することだ。

例 17 1次系を考える。

$$\dot{x} = -(2 + \theta)x, \quad \theta > -2$$

$A^T(\theta)P + PA(\theta) = -(2 + \theta)P - P(2 + \theta) = -2(2 + \theta)P$  なので、 $P = 1$  について

$$A^T(\theta)P + PA(\theta) = -2(2 + \theta) < 0 \quad \forall \theta \in (-2, \infty)$$

が常に成立する。よって、システムの安定性が保証される。この結論は、極を調べることで得られる結果と同じだ。

次に出てくる問題は、行列不等式 (4.21) の解  $P > 0$  をどうやって計算するか、だ。 $A(\theta)$  が不確かなパラメータベクトル  $\theta$  に依存するから、一般にその解法はない。しかし、 $A(\theta)$  が  $\theta$  に関して特別な構造を有する場合、解の計算は可能だ。

#### 4.2.2 ポリトープ系の2次安定性

次の係数行列がポリトープであるプラント集合を考える。

$$\dot{x} = \left( \sum_{i=1}^N \lambda_i A_i \right) x, \quad x(0) \neq 0 \quad (4.22)$$

$$\lambda_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^N \lambda_i = 1$$

その内、 $\lambda_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) は不確かパラメータを表す。

本システムについて、2次安定条件 (4.21) は

$$\begin{aligned} & \left( \sum_{i=1}^N \lambda_i A_i \right)^T P + P \left( \sum_{i=1}^N \lambda_i A_i \right) < 0 \quad \forall \lambda_i \\ & \Leftrightarrow \sum_{i=1}^N \lambda_i (A_i^T P + P A_i) < 0 \quad \forall \lambda_i \end{aligned} \quad (4.23)$$

に書き直せる。まず、ポリトープの各頂点において上式が満たされなければならないため

$$A_i^T P + P A_i < 0 \quad \forall i = 1, \dots, N \quad (4.24)$$

が必要だ。なお、 $A_i^T P + P A_i < 0$  は  $\lambda_i = 1, \lambda_j = 0 (j \neq i)$ 、つまり  $i$  番目頂点における条件だ。

逆に、(4.24) 式が成り立つとき、 $\lambda_i$  がすべて非負で、その内少なくとも一つが正であることより不等式

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i (A_i^T P + P A_i) < 0$$

が常に成り立つ。以上より分かったように、全頂点における LMI 条件 (4.24) が 2 次安定性条件 (4.21) と等価になる。

例 18 入力なしのマス・バネ・ダンパー系について調べる。その動特性は

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} x$$

であり、各パラメータは以下の範囲内で値を取る。

$$1 \leq m \leq 2, \quad 10 \leq k \leq 20, \quad 5 \leq b \leq 10$$

パラメータベクトル  $\theta = [m \ b \ k]$  は八つの頂点を持つ立方体となっている。2次安定の条件 (4.24) を解くと、解行列

$$P = \begin{bmatrix} 1.9791 & -2.8455 \\ -2.8455 & 14.2391 \end{bmatrix}$$

を得る。その固有値は 1.35, 14.86 なので、 $P$  が正定だ。よって、システムが 2 次安定であることが示された。これは、減衰係数が正であることから見て、自然な結論だ。

一方、減衰係数の範囲を  $0 \leq b \leq 5$  としたとき、(4.24) の解行列は

$$P = \begin{bmatrix} 0.85 & 0.9 \\ 0.9 & 10.26 \end{bmatrix} \times 10^{-11} \approx 0$$

となるが、正定でないため、システムの 2 次安定性は言えない。実際、今の場合零減衰も含めるため、プラント集合は安定でない。

## 4.3 2次安定化

### 4.3.1 状態フィードバック

ポリトープ系

$$\dot{x} = \left( \sum_{i=1}^N \lambda_i A_i \right) x + \left( \sum_{i=1}^N \lambda_i B_i \right) u, \quad \lambda_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^N \lambda_i = 1 \quad (4.25)$$

を2次安定化するには、フィードバック制御をどのように設計したらよいか？  
状態フィードバックの場合

$$u = Fx \quad (4.26)$$

閉ループ系は

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \left( \sum_{i=1}^N \lambda_i A_i + \sum_{i=1}^N \lambda_i B_i F \right) x = \sum_{i=1}^N \lambda_i (A_i + B_i F) x \\ \lambda_i &\geq 0, \quad \sum_{i=1}^N \lambda_i = 1 \end{aligned} \quad (4.27)$$

となる。すると、前節の結果より2次安定条件は

$$\begin{aligned} (A_i + B_i F)^T P + P(A_i + B_i F) &< 0 \quad \forall i \\ \Leftrightarrow A_i^T P + P A_i + (B_i F)^T P + P B_i F &< 0 \quad \forall i \end{aligned} \quad (4.28)$$

を満たすゲイン行列  $F$  および行列  $P > 0$  の存在性に帰着される。しかし、未知変数行列に関する行列積  $(B_i F)^T P, P B_i F$  が不等式に現れているので、この不等式はBMI(bilinear matrix inequality、双線形行列不等式)であって、LMIではない。よって、数値計算が困難だ。

この困難を打破するには、変数変換が有効だ。特に、行列  $P$  の正定性に注目すべきだ。そこで、 $M = P B_i F$  と置いてみる。 $(P, M)$  を求めてから  $F$  を逆算する考えだ。残念ながら、 $B_i$  は正則でないので  $M$  から  $F$  を逆算できない。このため、まず  $P$  と  $F$  が直接乗じるような形に変換することをしなければならない。これは(4.28)式に左右から  $Q = P^{-1}$  をかけることで実現できる。このとき、(4.28)式は

$$Q A_i^T + A_i Q + (F Q)^T B_i^T + B_i F Q < 0$$

に変わる。よって、以下の変数変換

$$Q = P^{-1}, \quad X = F Q \Leftrightarrow F = X Q^{-1} \quad (4.29)$$

によって、2次安定化条件(4.28)は

$$Q A_i^T + A_i Q + X^T B_i^T + B_i X < 0 \quad \forall i \quad (4.30)$$

に変わり、新しい変数行列  $(Q, X)$  に関するLMIとなり数値計算できる。

## 4.3.2 出力フィードバック

## 4.4 Lur'e システム

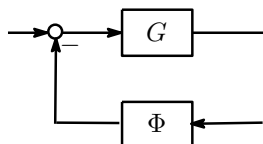


図 4.1: Lur'e システム

図 4.1 に示されるフィードバック系は、線形システム  $G(s)$  と静的非線形性  $\Phi$  からなるものだ。線形システム  $G(s)$  の実現を

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, \quad y = Cx \\ x &\in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m, \quad y \in \mathbb{R}^m \end{aligned} \quad (4.31)$$

とする。その入力  $u$  は

$$u = -\Phi(y) \quad (4.32)$$

で与えられる。その内、非線形性  $\Phi$  は

$$[\Phi(y) - K_{\min}y]^T [\Phi(y) - K_{\max}y] \leq 0 \quad (4.33)$$

を満たす。ただし、係数行列は  $K_{\max} - K_{\min} > 0$  の関係を満足する。一入出力系の場合、非線形性  $\phi$  が

$$(\phi(y) - \alpha y)(\phi(y) - \beta y) \leq 0 \Rightarrow \alpha y \leq \phi(y) \leq \beta y$$

を満たすので、セクター  $[\alpha, \beta]$  に含まれる (図 4.2 参照)。Popov は、セクター内に存在し得るすべての静的非線形性に対して閉ループの漸近安定性を保つことを、絶対安定性 (absolute stability) と呼んでいた。現代的な観点からみると、 $g(y) = \phi(y)/y$  は非線形性  $\phi$  に関する時変のゲインとして捉えることができ、このゲインは

$$\alpha \leq g(y) = \frac{\phi(y)}{y} \leq \beta \quad (4.34)$$

の範囲内で値を取る。従って、Lur'e システムは不確かな時変ゲインを持つシステムとして捉えることができる。その絶対安定性はまさしくゲイン変動  $g(y)$  に対するロバスト安定性そのものだ。

さて、Lur'e システムの安定条件は何だろうか? 第??章で触れたように、正のゲイン変動は常に零度の位相角を持つ。この特徴を生かせば、Nyquist の安

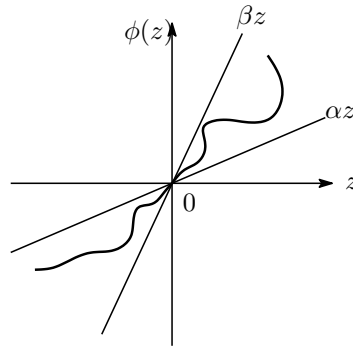


図 4.2: セクター内の静的非線形性

定判別法で直観的に Lur'e システムの安定条件を想像することができる。これを説明するため、一入出力系で非線形ゲインが

$$0 \leq g(y) \leq K$$

の範囲内にある場合について調べる。線形システム  $G(s)$  が安定のとき、Nyquist の安定判別法によるとループの環送差

$$1 + G(j\omega)g(y)$$

が原点を囲まないことが閉ループの安定条件となる。すなわち、すべての周波数  $\omega$  に対して  $\Re[1 + G(j\omega)g(y)] \neq 0$  となればよいのだ。この関数が  $g(y)$  に関してアフィンなので、区間  $[0, K]$  の両端で同符号を取ることになる。 $g(y) = 0$  のとき  $\Re[1 + G(j\omega)g(y)] = 1 > 0$  に注意すれば、 $g(y) = K$  において

$$\Re[1 + G(j\omega)g(y)] = \Re[1 + G(j\omega)K] > 0 \quad \omega$$

が成り立つならばすべての  $g(y) \in [0, K]$  について  $\Re[1 + G(j\omega)g(y)] > 0$  が言える。この条件は、 $1 + KG(s)$  が強正実関数であることにほかならない。

この条件を別の観点から導くことも可能だ。本条件の本質は、位相を利用して Nyquist 安定条件を満たすようにすることにある。そこで、ループゲイン  $G(s)g(y)$  の位相が  $\pm 180^\circ$  にならなければゲインがいくら大きくなっても Nyquist 安定条件が成立することに着目する。非線形性  $\phi$  のゲイン  $g(y) = \phi(y)/y$  がまだ有限なので、これを無限大まで拡大してよいはずだ。そこで、 $g(y)$  が区間  $[0, K]$  の中で変化するとき

$$0 \leq g_N = \frac{g}{1 - g/K} < \infty$$

で、しかも  $g \rightarrow K$  のとき  $g_N \rightarrow \infty$  となることに着目して、図のようなループ変換を施す。変換後の非線形性  $\phi_N(y_N) =$  のゲインは  $g_N$  となり、常に零

度の位相角を持つ。一方、新しい線形システムは

$$G_N(s) = G(s) + \frac{1}{K} = \frac{1}{K}(1 + KG(s))$$

となる。よって、 $1 + KG(s)$  が強正実であれば新しいループゲイン  $G_N(s)g_N(y)$  の位相が決して  $\pm 180^\circ$  にならず、閉ループ系の安定性が保証される。

もちろん、いまのシステムは非線形なので、上の議論は厳密な証明にならない。厳密な証明は、Lyapunov 安定論で行なうことができる。実際、以下の結論がある。

補題 5  $m$  入力  $m$  出力の線形システム  $G(s)$  の実現 (4.31) において、 $A$  が安定とし、非線形性  $\Phi$  は

$$\Phi^T(\Phi - Ky) \leq 0$$

を満たすと仮定する。このとき、伝達行列

$$Z(s) = I + KG(s)$$

が強正実ならば、閉ループ系は漸近安定になる。

証明 7  $Z(j\omega) + Z(j\omega)^*$  が

$$Z(j\omega)^* + Z(j\omega) = \begin{bmatrix} (j\omega I - A)^{-1}B \\ I \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} 0 & (KC)^T \\ KC & 2I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (j\omega I - A)^{-1}B \\ I \end{bmatrix}$$

と書けるので、 $KYP$  補題によると  $Z(s)$  が強正実のとき

$$- \begin{bmatrix} 0 & (KC)^T \\ KC & 2I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A^T P + PA & PB \\ B^T P & 0 \end{bmatrix} < 0 \quad (4.35)$$

を満たす対称行列  $P$  が存在する。(1, 1) ブロック  $A^T P + PA < 0$  及び  $A$  の安定性より  $P > 0$  が言える。以下、この正定行列  $P$  で構成した Lyapunov 関数

$$V(x) = x^T P x$$

を用いて命題を証明する。この  $V(x)$  は半径方向に非有界だ。(4.31) 式の解軌道に沿って  $V(x)$  を時間微分すると、 $x \neq 0$  の限り

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= x^T (A^T P + PA)x + x^T P B u + u^T B^T P x \\ &= \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A^T P + PA & PB \\ B^T P & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} \\ &< \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & (KC)^T \\ KC & 2I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} \\ &= 2 [u^T (KC)x + u^T u] \\ &= 2 [u^T K y + u^T u] \end{aligned}$$

が得られる。さらに、 $u = -\Phi(y)$  を代入すると

$$\dot{V}(x) < 2\Phi^T[\Phi - Ky] \leq 0, \quad x \neq 0$$

となる。よって、*Lyapunov* 安定定理より閉ループ系の漸近安定性が言える。

例 19 線形システムを

$$G(s) = \frac{24}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

とし、非線形性  $\phi$  を理想的な飽和関数

$$\phi(y) = \begin{cases} y & |y| < 1 \\ \frac{y}{|y|} & |y| \geq 1 \end{cases}$$

とする。閉ループ系の安定性を調べよう。この飽和特性はセクター  $[0, 1]$  にある。システムが 1 入出力系なので、 $Z(s) = 1 + G(s)$  の強正実条件は

$$\Re[G(j\omega)] > -1$$

になる。 $G(j\omega)$  の *Nyquist* 軌跡を描くと、図になる。明らかに、この *Nyquist* 軌跡が直線  $\Re[s] = -1$  の右側にあるので、補題 5 の安定条件を満たす。

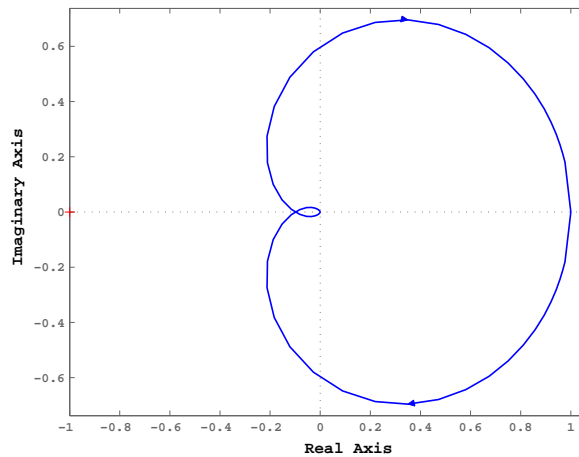


図 4.3: Nyquist 軌跡

#### 4.4.1 円盤定理

一般的なセクター  $[K_{\min}, K_{\max}]$  については、図 4.4 のようにセクターを  $[0, K_{\max} - K_{\min}]$  に等価変換すれば同様に安定条件が導出できる。このとき、線形システムは  $G(I + K_{\min}G)^{-1}$  に変わる。

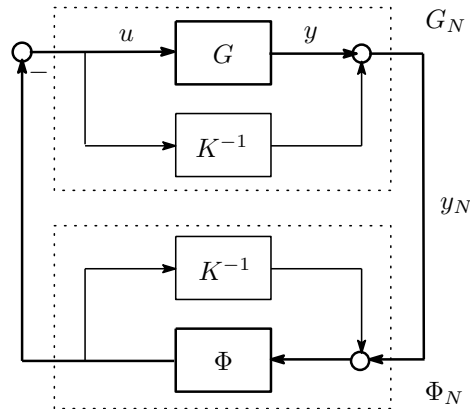


図 4.4: Lur'e システムの等価変換：円盤条件

定理 6 (4.31) 式の線形システム  $G(s)$  と (4.33) 式 of 非線形性  $\Phi$  からなる閉ループ系において、

$$G_T(s) = G(s)[I + K_{\min}G(s)]^{-1}$$

が安定で、

$$Z_T(s) = [I + K_{\max}G(s)][I + K_{\min}G(s)]^{-1}$$

が強正実であれば、閉ループ系は漸近安定となる。

証明 8 ループ変換後の非線形性はセクター  $[0, K_{\max} - K_{\min}]$  にあるので、補題 5 を応用できる。この場合、 $Z(s)$  は

$$I + (K_{\max} - K_{\min})G(s)[I + K_{\min}G(s)]^{-1} = [I + K_{\max}G(s)][I + K_{\min}G(s)]^{-1}$$

つまり、 $Z_T(s)$  に変わる。よって、補題 5 から直ちに結論を得る。

いまの定理の 1 入出力版は、よく知られる円盤条件 (circle criterion) だ。

定理 7 (円盤条件) 1 入出力系の  $G(s)$  を考える。非線形性  $\phi$  はセクター  $[\alpha, \beta]$  にあるとする。そして、円盤

$$D(\alpha, \beta) = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \left| z + \frac{\alpha + \beta}{2\alpha\beta} \right| \leq \left| \frac{\beta - \alpha}{2\alpha\beta} \right| \right\}$$

を置く。閉ループ系が漸近安定となるための条件は、以下のいずれかが成立することだ。

- (1)  $0 < \alpha < \beta$  の場合： $G(j\omega)$  の Nyquist 軌跡が円盤  $D(\alpha, \beta)$  を横切らず、 $D(\alpha, \beta)$  を反時計回りに  $p$  回まわる。ただし、 $p$  は  $G(s)$  の正の実部を持つ極の数だ。



(2)  $0 = \alpha < \beta$  の場合:  $G(s)$  が安定で  $G(j\omega)$  の Nyquist 軌跡が次式を満たす。

$$\Re G(j\omega) > -\frac{1}{\beta}$$

(3)  $\alpha < 0 < \beta$  の場合:  $G(s)$  が安定で  $G(j\omega)$  の Nyquist 軌跡が円周を除いた円盤  $D(\alpha, \beta)$  の内部に存在する。

証明 9 まず、 $G/(1 + \alpha G)$  の安定性より、すべての周波数  $\omega$  において  $1 + \alpha G(j\omega) \neq 0$  が成り立つ。そしていまの場合、 $Z_T(s)$  は

$$Z_T(s) = \frac{1 + \beta G(s)}{1 + \alpha G(s)}$$

となる。これが強正実となるにはすべての周波数  $\omega$  について  $Z_T(j\omega) + Z_T(j\omega)^* > 0$  となることが条件だ。 $\alpha\beta \neq 0$  のとき、これは等価的に

$$\begin{aligned} 0 &< (1 + \beta G(j\omega)^*)(1 + \alpha G(j\omega)) + (1 + \alpha G(j\omega)^*)(1 + \beta G(j\omega)) \\ &= 2 + (\alpha + \beta)(G(j\omega)^* + G(j\omega)) + 2\alpha\beta G(j\omega)^* G(j\omega) \\ &= 2\alpha\beta \left\{ G(j\omega)^* G(j\omega) + \frac{\alpha + \beta}{2\alpha\beta} (G(j\omega)^* + G(j\omega)) + \frac{1}{\alpha\beta} \right\} \\ &= 2\alpha\beta \left\{ \left| G(j\omega) + \frac{\alpha + \beta}{2\alpha\beta} \right|^2 - \left( \frac{\beta - \alpha}{2\alpha\beta} \right)^2 \right\} \end{aligned}$$

に書き換えられる。

命題 (1) の場合、条件は

$$\left| G(j\omega) + \frac{\alpha + \beta}{2\alpha\beta} \right| > \left| \frac{\beta - \alpha}{2\alpha\beta} \right|$$

となり、 $G(j\omega)$  の Nyquist 軌跡が円盤  $D(\alpha, \beta)$  横切らないことを要請する。一方、Nyquist の安定判別法によると、 $G/(1 + \alpha G)$  の安定条件は  $G(j\omega)$  の Nyquist 軌跡が点  $(-1/\alpha, j0)$  を  $p$  回反時計回りにまわることだ。この点が円盤  $D(\alpha, \beta)$  の境界線上にあるため、結局円盤をまわることになる。

命題 (3) の場合、上述の強正実条件は

$$\left| G(j\omega) + \frac{\alpha + \beta}{2\alpha\beta} \right| < \left| \frac{\beta - \alpha}{2\alpha\beta} \right|$$

になる。すなわち、 $G(j\omega)$  の Nyquist 軌跡が円盤  $D(\alpha, \beta)$  の内部に入っていないなければならない。すると、 $G(j\omega)$  の Nyquist 軌跡が点  $(-1/\alpha, j0)$  を一回もまわることはない。故に、 $G/(1 + \alpha G)$  の安定性を保証するには  $G(s)$  の安定性が必要だ。

最後に、命題 (2) の場合、

$$\frac{G}{1 + \alpha G} = G, \quad Z_T = 1 + \beta G$$

となるので、 $G(s)$  の安定性はまず必要だ。また、 $Z_T(s) = 1 + \beta G(s)$  の強正実条件は  $\Re[G(j\omega)] > -\frac{1}{\beta}$  だ。

各場合の円盤条件は図 4.5-4.7 にそれぞれ表されている。

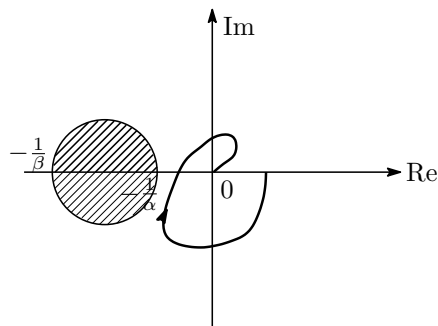


図 4.5: 円盤条件 1 :  $0 < \alpha < \beta$

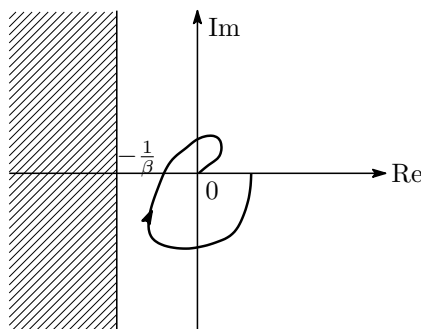


図 4.6: 円盤条件 2 :  $0 = \alpha < \beta$

例 20 線形システムを

$$G(s) = \frac{6}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

とし、非線形性  $\phi$  をそれぞれ以下のセクターにあるものとする。

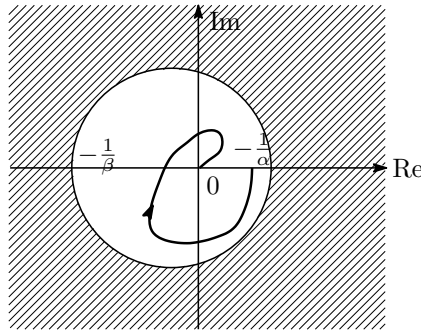
$$(1) [1, 3], (2) [0, 2], (3) [-1, 1]$$

閉ループ系の安定性を調べよう。

各セクターに対応する円盤条件はそれぞれ

$$(1) |G(j\omega) + \frac{2}{3}| \geq \frac{1}{3}, (2) \Re[G(j\omega)] \geq -\frac{1}{2}, (3) |G(j\omega)| \leq 1$$

になるが、図 4.3 に示した  $G(s)$  の Nyquist 軌跡から分かるように、これらがすべて満たされている。よって、いずれのセクターにある静的非線形性に対しても閉ループ系は安定だ。

図 4.7: 円盤条件 3 :  $\alpha < 0 < \beta$ 

#### 4.4.2 Popov 条件

実システムの応用において、静的な非線形性  $\Phi$  のゲインの符号は変化することがほとんどない。このため、非線形性を位相角が零度でゲインのみが変化する不確かさとして見なせる。この特徴を利用した安定条件は前掲の補題 5 だ。補題 5 の直前の討論から分かるように、位相条件だけで閉ループ系の安定性を保証するのがその本質だ。ただし、そこで行なったループ変形では変形後の非線形部はやはり正のゲインに相当するが、線形部の位相角範囲は  $[-90^\circ, 90^\circ]$  に限定されていた。ループゲインの位相角を限りなく  $\pm 180^\circ$  に近づけてもよい意味で、まだ十分に改善できる余地が残されている。そこで、この考え方をさらに発展させていく。

ループゲインの位相角範囲を広げるには、いろいろなやり方がある。しかし、理論証明の都合上 KYP 補題に結び付きやすい位相角性質を持つものがよい。そこで、非線形部が正実、線形部が強正実となるようなループ変形を考案する。

ここでは、非線形性が次式を満たすとする。

$$\Phi(y)^T [\Phi(y) - Ky] \leq 0, \quad K > 0 \quad (4.36)$$

この非線形性を位相角が  $\pm 90^\circ$  以内、ゲインが零から無限大まで取れるように変換したい。これを実現できるループ変換の一つは図 4.8 に示されている。変換後の非線形部のゲインは

$$g_N = \frac{g_{\frac{1}{1+\eta s}}}{1 - K^{-1}g_{\frac{1}{1+\eta s}}} = \frac{g}{1 - K^{-1}g + \eta s} \quad (4.37)$$

だ。ただし、 $\eta > 0$ 。その位相角は  $\omega \geq 0$  においては  $0^\circ$  から  $-90^\circ$  の間で変化し、ゲインは  $g \rightarrow K$ ,  $\omega \rightarrow 0$  のとき  $+\infty$ ,  $\omega \rightarrow \infty$  もしくは  $g \rightarrow 0$  のとき 0 に漸近する。つまり、 $g_N$  が正実関数の性質を有する。従って、直観的には  $G_N = G + K^{-1}$  が強正実になれば閉ループ系は安定になる。

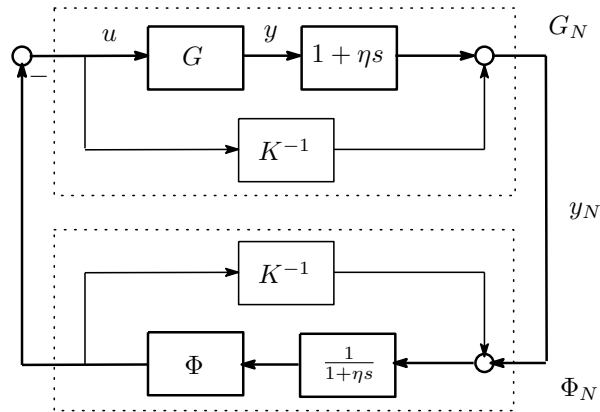


図 4.8: Lur'e システムの等価変換 : Popov 条件

正確には、次の Popov 条件 (Popov criterion) として知られる定理が成り立つ。

**定理 8 (Popov 条件)**  $m$  入力  $m$  出力の線形システム  $G(s)$  の実現 (4.31) において、 $A$  が安定と仮定する。このとき、ある正の実数  $\eta$  に関して伝達行列

$$Z(s) = I + (1 + \eta s)KG(s)$$

が強正実であれば、閉ループ系は漸近安定になる。

**証明 10**  $s(sI - A)^{-1} = I + A(sI - A)^{-1}$  を利用して  $Z(s)$  を展開すると、実現

$$\begin{aligned} Z(s) &= I + \eta KCB + KC(I + \eta A)(sI - A)^{-1}B \\ &= \begin{bmatrix} KC(I + \eta A) & I + \eta KCB \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (sI - A)^{-1}B \\ I \end{bmatrix} \end{aligned}$$

が得られる。よって、 $Z(j\omega) + Z(j\omega)^*$  が

$$\begin{bmatrix} (j\omega I - A)^{-1}B \\ I \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} 0 & (KC(I + \eta A))^T \\ KC(I + \eta A) & 2(I + \eta KCB) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (j\omega I - A)^{-1}B \\ I \end{bmatrix}$$

と書ける。KYP 補題によると  $Z(s)$  の強正実性から

$$-\begin{bmatrix} 0 & (KC(I + \eta A))^T \\ KC(I + \eta A) & 2(I + \eta KCB) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A^T P + PA & PB \\ B^T P & 0 \end{bmatrix} < 0 \quad (4.38)$$

を満たす対称行列  $P$  が存在する。さらに、(1,1) ブロック  $A^T P + PA < 0$  及び  $A$  の安定性より  $P > 0$  が言える。以下、Lur'e-Postnikov 型の Lyapunov

関数<sup>1</sup>

$$V(x) = x^T P x + 2\eta \int_0^y \Phi(v)^T K dv \quad (4.39)$$

を用いて命題を証明する。この  $V(x)$  は明らかに正定で、しかも半径方向に非有界だ。(4.31) 式の解軌道に沿って  $V(x)$  を時間微分すると、 $x \neq 0$  の限り

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= x^T (A^T P + PA)x + x^T P B u + u^T B^T P x + 2\eta \Phi(y)^T K \dot{y} \\ &= x^T (A^T P + PA)x + x^T P B u + u^T B^T P x - 2\eta u^T K C (Ax + Bu) \\ &= \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}^T \left( \begin{bmatrix} A^T P + PA & PB \\ B^T P & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & (\eta K C A)^T \\ \eta K C A & 2\eta K C B \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} \\ &< \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & (K C)^T \\ K C & 2I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} \\ &= 2 [u^T (K C x) + u^T u] \\ &= 2 [u^T K y + u^T u] \end{aligned}$$

が得られる。さらに、 $u = -\Phi(y)$  を代入し非線形性  $\Phi$  の特性を用いると

$$\dot{V}(x) < 2\Phi^T [\Phi - K y] \leq 0, \quad x \neq 0$$

となることが分かる。よって、*Lyapunov* 安定定理より閉ループ系の漸近安定性が分かる。

1 入出力系については、以下のように Popov 条件を図的に確認できる。 $Z(s)$  の強正実条件

$$\Re[1 + (1 + j\eta\omega)KG(j\omega)] > 0 \quad \forall \omega$$

は

$$\frac{1}{K} + \Re[G(j\omega)] - \eta\omega \Im[G(j\omega)] > 0$$

と等価だ。直交座標系  $(x, y) = (\Re[G(j\omega)], \omega \Im[G(j\omega)])$  上では、この条件式は

$$\frac{1}{K} + x(\omega) > \eta y(\omega)$$

であり、 $(-\frac{1}{K}, j0)$  を通り勾配  $1/\eta$  の直線の下に軌跡  $(x(\omega), y(\omega))$  があることを意味する。このグラフは Popov 図 (Popov plot) といい、図 4.9 に示されている。

例 21 前の小節で調べた例を再び考える。線形システムは

$$G(s) = \frac{6}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

<sup>1</sup> $\Phi(y)^T K y \geq \Phi(y)^T \Phi(y) \geq 0$  の性質より第 2 項は非負だ。 $\Phi(y)$  を力、 $y$  を変位と捉えれば、この積分は仕事になる。

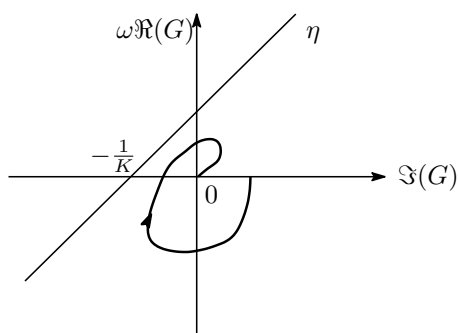


図 4.9: Popov 条件

だ。非線形性  $\phi$  が存在するセクターを  $[0, 5]$  に拡大すると、虚軸に平行する直線  $-1/\beta = -0.2$  が図 4.3 の *Nyquist* 軌跡と交差し、円盤条件は満たされなくなる。しかし、*Popov* を描いてみると、*Popov* 条件が満たされることが分かり、この場合でも閉ループ系が安定だ。

この例から分かるように、*Popov* 条件は円盤条件よりは緩く、適用範囲が広い。

## 4.5 受動システム

本節では、正実のシステムと強正実のシステムがフィードバック結合したときの安定性について吟味し、閉ループ系の安定性が常に保証されることを明らかにする。

### 演習問題

安定システム  $\dot{x} = Ax$ ,  $y = Cx$  の出力が

$$\int_0^{\infty} y^T(t)y(t)dt = x^T(0)Xx(0)$$

を満たすことを示せ。ただし、 $X$  は Lyapunov 方程式

$$A^T X + XA + C^T C = 0$$

の解である。

## 第5章 ロバスト解析3: IQC法

IQC理論は、Megretski-Rantzerによって発見したものだ。この方法の考え方は、不確かさをその入出力に関する積分型2次拘束条件 (integral quadratic constraint, IQC) で記述した上、閉ループ系のロバスト安定条件を見出すことだ。本章で考えるシステムは図 5.1 に示されている。 $G(s)$  は既知の線形システム伝達行列で、 $\Delta$  は静的非線形性を含めた不確かさだ。ここでは、閉ループ系の入出力安定性について論じる。また、不確かさ  $\Delta$  の入力を  $z$ 、出力を  $w$  とする。

また、本章では記述を単純にするために、時間信号とその Fourier 変換を同じ記号で記述することにする。そして、記号で明記はしないが信号のノルムは  $\mathbb{L}_2$  ノルム、システムのノルムは  $\mathbb{L}_2$  誘導ノルムの意味で用いる。

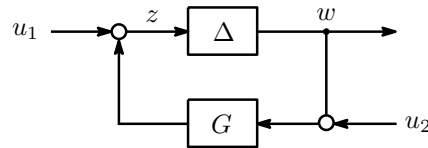


図 5.1: 閉ループ系

### 5.1 IQC とは

IQC の意味と動機を説明するために、まず何種類かの不確かさについてその特徴付けを見ていこう。

ノルム有界の不確かさ  $\Delta(s)$  ( $\|\Delta\|_\infty \leq 1$ ) の場合、すべての周波数  $\omega$  に対して  $\Delta(j\omega)^* \Delta(j\omega) \leq I$  が成立する。このとき、不等式両辺に左右から  $z^*$ ,  $z$  をかけると

$$w(j\omega)^* w(j\omega) = z(j\omega)^* \Delta(j\omega)^* \Delta(j\omega) z(j\omega) \leq z(j\omega)^* z(j\omega)$$

$$\Rightarrow 0 \leq z(j\omega)^* z(j\omega) - w(j\omega)^* w(j\omega) = \begin{bmatrix} z(j\omega) \\ w(j\omega) \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z(j\omega) \\ w(j\omega) \end{bmatrix}$$

がすべての  $\omega$  について成り立つ。当然、次のように積分したのも半正定に

なる。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} z(j\omega) \\ w(j\omega) \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z(j\omega) \\ w(j\omega) \end{bmatrix} d\omega \geq 0$$

次に、正実の不確かさ  $\Delta(s)$  は、すべての周波数  $\omega$  に対して  $\Delta(j\omega)^* + \Delta(j\omega) \geq 0$  を満たす。よって、不等式両辺に左右から  $z^*$ ,  $z$  をかけると

$$\begin{aligned} 0 &\leq z(j\omega)^* \Delta(j\omega)^* z(j\omega) + z(j\omega)^* \Delta(j\omega) z(j\omega) = w(j\omega)^* z(j\omega) + z(j\omega)^* w(j\omega) \\ \Rightarrow 0 &\leq \begin{bmatrix} z(j\omega) \\ w(j\omega) \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z(j\omega) \\ w(j\omega) \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} z(j\omega) \\ w(j\omega) \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z(j\omega) \\ w(j\omega) \end{bmatrix} d\omega &\geq 0 \end{aligned}$$

を得る。

さらに、スカラーの実数変動ブロック  $\Delta = \delta I$  ( $|\delta| \leq 1$ ) は、 $X = X^T \geq 0$ ,  $Y = -Y^T$  を満たす行列について

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} z(j\omega) \\ w(j\omega) \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} X & Y \\ Y^T & -X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z(j\omega) \\ w(j\omega) \end{bmatrix} \\ &= z(j\omega)^* X z(j\omega) - w(j\omega)^* X w(j\omega) + z(j\omega)^* Y w(j\omega) + w(j\omega)^* Y^T z(j\omega) \\ &= z(j\omega)^* (X - \Delta^T X \Delta) z(j\omega) + z(j\omega)^* (Y \Delta + \Delta^T Y^T) z(j\omega) \\ &= z(j\omega)^* (X - \delta^2 X) z(j\omega) + z(j\omega)^* (Y \delta + \delta Y^T) z(j\omega) \\ &= (1 - \delta^2) z(j\omega)^* X z(j\omega) + \delta z(j\omega)^* (Y + Y^T) z(j\omega) \end{aligned}$$

を満たしている。 $\delta$  と  $(X, Y)$  の性質を代入すると

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} z(j\omega) \\ w(j\omega) \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} X & Y \\ Y^T & -X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z(j\omega) \\ w(j\omega) \end{bmatrix} = (1 - \delta^2) z(j\omega)^* X z(j\omega) \geq 0 \\ \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} z(j\omega) \\ w(j\omega) \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} X & Y \\ Y^T & -X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z(j\omega) \\ w(j\omega) \end{bmatrix} d\omega &\geq 0 \end{aligned}$$

が分かる。実際、 $X, Y$  を周波数の関数に範囲を拡大しても上式が成り立つ。

このように、多くの不確かさはその入力  $z$ 、出力  $w$  に関する 2 次積分不等式

$$\int_{-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} z(j\omega) \\ w(j\omega) \end{bmatrix}^* \Pi(j\omega) \begin{bmatrix} z(j\omega) \\ w(j\omega) \end{bmatrix} d\omega \geq 0, \quad \Pi(j\omega) = \Pi(j\omega)^* \quad (5.1)$$

で記述できる<sup>1</sup>。これを  $\Pi$  によって規定された IQC 条件と呼ばれる。ただし、IQC において静的な非線形性  $\Delta$  も含めて考えている。よって、以下  $\Delta$  を作用素として扱う。

<sup>1</sup>実際、これまでの例においては、みな各周波数  $\omega$  で 2 次の不等式条件を満たしている。不確かさに関する拘束条件を積分型 2 次不等式にしたのは、閉ループ系の安定性を議論する上で都合がよいからだ。



## 5.2 IQC 定理

図 5.1 に示す伝達行列  $G(s)$  と不確かさ  $\Delta$  がフィードバック結合して作った閉ループ系を考える。ロバスト安定の十分条件は次の IQC 定理 (IQC theorem) によって与えられる。

**定理 9 (IQC 定理)**  $G(s)$  を  $l \times m$  の安定伝達行列、 $\Delta$  を  $m \times l$  の有界で因果的作用素とする。以下の条件がすべて成り立つとき、閉ループ系  $(G, \Delta)$  は安定となる。

- (1) 任意の  $\tau \in [0, 1]$  に対して、 $(I - \tau G \Delta)$  が因果的に可逆だ。
- (2) 任意の  $\tau \in [0, 1]$  に対して、 $\tau \Delta$  が  $\Pi$  に関する IQC を満たす。
- (3) 次式を満たす  $\epsilon > 0$  が存在する。

$$\begin{bmatrix} G(j\omega) \\ I \end{bmatrix}^* \Pi(j\omega) \begin{bmatrix} G(j\omega) \\ I \end{bmatrix} \leq -\epsilon I, \quad \forall \omega \quad (5.2)$$

ここで、まず因果性 (causality) の意味を説明する。信号  $u(t)$  について時刻  $T$  以降の部分を切り捨てる操作は、打ち切り (truncation) と呼ばれ、作用素  $P_T$  で記述する。すなわち

$$P_T u(t) = \begin{cases} u(t) & t \in [0, T] \\ 0 & t > T \end{cases}$$

あるシステム  $G$  (非線形なものを含む) が、任意の信号  $u(t)$  について

$$P_T G u(t) = P_T G P_T u(t)$$

の性質を持つとき、因果的なシステムという。上式の意味は、つまりシステムの出力が入力の将来値に依存しないことだ。そして、システム  $G$  が因果的な逆システム  $G^{-1}$  を有する場合、因果的に可逆という。

条件 (2)、(3) はそれぞれ  $\Delta$ 、 $G(s)$  だけに関係するものだが、条件 (1) は両者に依存する。よって、条件 (1) を確かめるときほかの二つが成り立つ前提の上で行うべきであり、この点は要注意だ。ただし、 $G(s)$  が厳密にプロパーの場合条件 (1) が自動的に満たされる。

以下、この定理を用いて何種類かの不確かさを持つシステムのロバスト安定条件を導こう。

**例 22** 前に述べたように、ノルム有界の不確かさ ( $\|\Delta\|_\infty \leq 1$ ) に関する IQC は

$$\Pi = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}$$

によって記述される。従って、定理 9 の条件 (3) は

$$\begin{bmatrix} G(j\omega) \\ I \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G(j\omega) \\ I \end{bmatrix} = G^*(j\omega)G(j\omega) - I \leq -\epsilon I \Rightarrow \|G\|_\infty < 1$$

となる。このとき、任意の  $\tau \in [0, 1]$  に対して  $G, \Delta$  に関するノルム条件より  $\det(I - \tau G(j\infty)\Delta(j\infty)) \neq 0$  が明らかに成立する。よって、条件 (1) は満たされる。また、 $\|\tau\Delta\|_\infty = \tau\|\Delta\|_\infty \leq \tau \leq 1$  より明らかに  $w = \tau\Delta z$  が  $z^*z - w^*w \geq 0$  を満足するため、条件 (2) も満たされる。従って、小ゲイン条件  $\|G\|_\infty < 1$  がロバスト安定性を保証する。

もちろん、これは小ゲイン定理の十分性を示したにほかならない。

例 23 正実の不確かさ ( $\Delta(j\omega) + \Delta^*(j\omega) \geq 0$ ) に関する IQC は

$$\Pi = \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{bmatrix}$$

で記述される。よって、定理 9 の条件 (3) は

$$\begin{bmatrix} G(j\omega) \\ I \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G(j\omega) \\ I \end{bmatrix} = G^*(j\omega) + G(j\omega) \leq -\epsilon I < 0$$

となる。つまり、 $-G(s)$  が強正実になることだ。条件 (1) を確かめるには、任意の  $\tau \in [0, 1]$  に対して  $\det(I - \tau G(j\infty)\Delta(j\infty)) \neq 0$  が成り立つことを示せばよい。スカラ系の場合、 $G\Delta$  の位相角が零度にならないから明らかだが、多入出力系の場合、以下のように背理法で言える。

あるベクトル  $z \neq 0$  について  $[I - \tau G(j\infty)\Delta(j\infty)]z = 0$  が成り立つとする。  $w = \tau\Delta(j\infty)z$  と置くと、 $w \neq 0$  ( $\tau \neq 0$  のとき) および  $z = G(j\infty)w$  が得られる。すると、これらの関係式と  $G, \Delta$  の性質より  $\tau \neq 0$  である限り

$$\begin{aligned} 0 &\leq z^*(\tau\Delta(j\infty) + \tau\Delta^*(j\infty))z \\ &= z^*w + w^*z \\ &= w^*(G(j\infty) + G^*(j\infty))w \\ &\leq -\epsilon w^*w \\ &< 0 \end{aligned}$$

の矛盾が生じる。そして、 $\tau = 0$  のとき  $I - \tau G(j\infty)\Delta(j\infty) = I$  は明らかだ。

また、条件 (2) は以下から分かる。ただし、 $w = \tau\Delta z$  だ。

$$w^*z + z^*w = \tau z^*(\Delta + \Delta^*)z \geq 0$$

従って、IQC 定理によると  $-G(s)$  の強正実性がロバスト安定性を保証する。

以上で、第??章の正実定理を導出できた。

### 5.3 IQC 定理の証明 \*

本節では、IQC 定理を証明する。 $G(s)$  と  $\Delta$  が共に有界なので、 $(I - G\Delta)^{-1}$  の有界性を示せば十分だ。証明は三つのステップに分かれる。

Step 1: 任意の  $z \in \mathbb{L}_2^l$  と  $\tau \in [0, 1]$  に対して、次の不等式が有限な  $c_0 > 0$  について成り立つことを示す。

$$\|z\| \leq c_0 \|z - \tau G\Delta(z)\|$$

ここで、記述の便宜上

$$\sigma(z, w) = \int_{-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} z(j\omega) \\ w(j\omega) \end{bmatrix}^* \Pi(j\omega) \begin{bmatrix} z(j\omega) \\ w(j\omega) \end{bmatrix} d\omega$$

と置き、エルミート行列  $\Pi$  を

$$\Pi(j\omega) = \begin{bmatrix} \Pi_{11}(j\omega) & \Pi_{12}(j\omega) \\ \Pi_{12}^*(j\omega) & \Pi_{22}(j\omega) \end{bmatrix}$$

に分割する。また、各ブロックのノルム  $\|\Pi_{ij}\|$  を  $m_{ij}$  で表す。

直接展開することによって次式を確認できる。

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} z + \delta \\ w \end{bmatrix}^* \Pi \begin{bmatrix} z + \delta \\ w \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix}^* \Pi \begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix} \\ &= \delta^* \Pi_{11} \delta + 2\operatorname{Re}(z^* \Pi_{11} w + w^* \Pi_{12} \delta) \end{aligned}$$

すると、すべての 2 乗可積な  $z, \delta, w$  に対して

$$\begin{aligned} & |\sigma(z + \delta, w) - \sigma(z, w)| \\ &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} \{\delta^* \Pi_{11} \delta + 2\operatorname{Re}(z^* \Pi_{11} w + w^* \Pi_{12} \delta)\} d\omega \right| \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \{|\delta^* \Pi_{11} \delta| + 2|\operatorname{Re}(z^* \Pi_{11} w)| + 2|\operatorname{Re}(w^* \Pi_{12} \delta)|\} d\omega \\ &\leq m_{11} \|\delta\|^2 + 2\|\delta\| m_{11} \|z\| + 2\|\delta\| m_{12} \|w\| \end{aligned}$$

が成立する。ここで、不等式  $2ab = 2(\frac{a}{\sqrt{\epsilon}})(\sqrt{\epsilon}b) \leq a^2/\epsilon + \epsilon b^2$  を積  $2m_{11} \|\delta\| \cdot \|z\|$  と  $2m_{12} \|\delta\| \cdot \|w\|$  に適用することによって

$$|\sigma(z + \delta, w) - \sigma(z, w)| \leq c(\epsilon) \|\delta\|^2 + \epsilon(\|z\|^2 + \|w\|^2)$$

を得る。ただし、 $c(\epsilon) = m_{11} + m_{11}^2/\epsilon + m_{12}^2/\epsilon$ 。そして、(5.2) 式の両辺にそれぞれ  $w(j\omega)^*$ ,  $w(j\omega)$  をかけ積分すると

$$\sigma(Gw, w) \leq -\epsilon \|w\|^2, \quad w \in \mathbb{L}_2^m$$

となることが分かる。次に、 $\tau \in [0, 1]$ 、 $w = \tau \Delta(z)$ 、 $z \in \mathbb{L}^l$ 、 $\epsilon_1 = \frac{\epsilon}{2+4\|G\|^2}$  とする。 $\tau \Delta$  が  $\Pi$  に関する IQC を満たすこと、および  $|\sigma(z, w) - \sigma(Gw, w)| \leq |\sigma(z, w) - \sigma(Gw, w)|$  より、次式が成立する。

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sigma(z, w) = \sigma(Gw, w) + \sigma(z, w) - \sigma(Gw, w) \\ &\leq -\epsilon \|w\|^2 + c(\epsilon_1) \|z - Gw\|^2 + \epsilon_1 (\|z\|^2 + \|w\|^2) \end{aligned}$$

さらに、 $\|z\|^2 = \|Gw + (z - Gw)\|^2 \leq 2\|z - Gw\|^2 + 2\|Gw\|^2$  (Cauchy-Schwarz の不等式より) と  $\|Gw\| \leq \|G\| \|w\|$  を用いると

$$\begin{aligned} 0 &\leq -\epsilon \|w\|^2 + (c(\epsilon_1) + 2\epsilon_1) \|z - Gw\|^2 + \epsilon_1 (2\|Gw\|^2 + \|w\|^2) \\ &\leq -\epsilon \|w\|^2 + (c(\epsilon_1) + 2\epsilon_1) \|z - Gw\|^2 + \epsilon_1 (2\|G\|^2 \|w\|^2 + \|w\|^2) \\ &\leq -\frac{\epsilon}{2} \|w\|^2 + (c(\epsilon_1) + 2\epsilon_1) \|z - Gw\|^2 \end{aligned}$$

を得る。故に、 $\|w\| \leq c \|z - Gw\|$  が言える。従って、

$$\|z\| \leq \|Gw\| + \|z - Gw\| \leq \|G\| \|w\| + \|z - Gw\| \leq c_0 \|z - Gw\|$$

が成り立つ。

Step 2:  $(I - \tau G\Delta)^{-1}$  がある  $\tau \in [0, 1]$  について有界だったら、 $|\nu - \tau| < 1/(c_0 \|G\| \|\Delta\|)$  を満たす任意の  $\nu \in [0, 1]$  について  $(I - \nu G\Delta)^{-1}$  が有界になることを示す。

条件 (2) から、 $(I - \tau G\Delta)^{-1}$  が因果的だ。次の打ち切り信号を定義しておく。

$$z_T = (I - \tau G\Delta)^{-1} P_T(z - \tau G\Delta(z))$$

因果性より  $P_T z = P_T z_T$  であり、 $z_T$  に Step 1 の結果を適用すると

$$\begin{aligned} \|P_T z\| &= \|P_T z_T\| \leq \|z_T\| \\ &\leq c_0 \|z_T - \tau G\Delta(z_T)\| = c_0 \|P_T(z - \tau G\Delta(z))\| \\ &= c_0 \|P_T(z - \nu G\Delta(z)) + (\nu - \tau) P_T G\Delta(z)\| \\ &\leq c_0 \|P_T(z - \nu G\Delta(z))\| + c_0 \|G\Delta\| |\nu - \tau| \cdot \|P_T z\| \end{aligned}$$

が得られる。ただし、式変形にノルムの三角不等式と劣乗法性質を利用した。よって、 $|\nu - \tau| < 1/(c_0 \|G\| \|\Delta\|) \leq 1/(c_0 \|G\Delta\|)$  より

$$\begin{aligned} \|P_T(z - \nu G\Delta(z))\| &\geq \frac{(1 - c_0 \|G\Delta\| |\nu - \tau|)}{c_0} \|P_T z\| \\ \Rightarrow \|z - \nu G\Delta(z)\| &\geq \frac{(1 - c_0 \|G\Delta\| |\nu - \tau|)}{c_0} \|z\| \end{aligned}$$

信号  $u = (I - \nu G\Delta)z$  を置くと、 $z = (I - \nu G\Delta)^{-1}u$  となる。すなわち、 $u$ 、 $z$  はそれぞれシステム  $(I - \nu G\Delta)^{-1}$  の入力と出力だ。 $1 - c_0 \|G\Delta\| |\nu - \tau| > 0$  より上式は  $u$  が有界ならば、 $z$  も有界になることを意味する。すなわち、 $(I - \nu G\Delta)^{-1}$  が有界だ。

Step 3: 区間  $[0, 1]$  を有限個の閉区間で覆う。各閉区間の長さを  $1/(c_0 \|G\| \|\Delta\|)$  より短くする。 $\tau = 0$  のとき  $(I - \tau G\Delta)^{-1} = I$  は明らかに有界だ。すると、最初の閉区間内で  $(I - \tau G\Delta)^{-1}$  も有界になる。2 番目の閉区間の左頂点は 1 番目の閉区間に含まれるので、その点においても有界性が成り立つ。次に、2 番目とそれ以降の区間に関して同様な議論を繰り返していく。最終的に、すべての  $\tau \in [0, 1]$  において  $(I - \tau G\Delta)^{-1}$  の有界性を得る。故に、 $\tau = 1$  における  $(I - G\Delta)^{-1}$  の有界性も示された。

## 5.4 IQC の応用例

前の節では、IQC をノルム有界の不確かさ、正実の不確かさに応用した例を示した。本節では、さらにほかの応用例を示す。ただし、第 4 章と違って IQC の枠組みでは負のフィードバックでなく、正のフィードバックを扱っている。これから示す例を第 4 章の結果に合わせるには、以下の結論の中に  $G$  と  $-G$  に置き換えればよい。

例 24 非線形時変のスカルブロック  $\delta I$  ( $\|\delta\| \leq 1$ ):

定数スカルブロックで示したように、IQC を規定する  $\Pi$  は

$$\Pi = \begin{bmatrix} X & Y \\ Y^T & -X \end{bmatrix}, \quad X = X^T \geq 0, \quad Y + Y^T = 0$$

で与えられる。このとき、 $G(s)$  が

$$\begin{bmatrix} G(j\omega) \\ I \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} X & Y \\ Y^T & -X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G(j\omega) \\ I \end{bmatrix} < 0 \quad \forall \omega$$

を満たせば、閉ループ系は安定となる。

例 25 セクター  $[\alpha, \beta]$  内の静的非線形性:

この静的な非線形性は傾き  $\alpha, \beta$  の直線を境界として持つセクターに属する。このとき、 $w = \Delta z = \phi(z)$  が任意の  $z$  について

$$(\phi(z) - \alpha z)(\beta z - \phi(z)) \geq 0$$

を満たす。この不等式は次のように書き換えられる。

$$\begin{aligned} 0 &\leq \begin{bmatrix} z & \phi(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\alpha \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ \phi(z) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} z & \phi(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\alpha & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ \phi(z) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

最後に、エルミートの  $\Pi$  に関する  $IQC$  にまとめるため上式における等式の両辺を足し合わせる。よって、 $IQC$  を規定する次の  $\Pi$  を得る。

$$\Pi = \begin{bmatrix} -2\alpha\beta & \alpha + \beta \\ \alpha + \beta & -2 \end{bmatrix}$$

さて、 $IQC$  定理の条件 (3) を書き下すと、すべての周波数  $\omega$  に対して

$$\begin{aligned} 0 &> \begin{bmatrix} G(j\omega) \\ I \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} -2\alpha\beta & \alpha + \beta \\ \alpha + \beta & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G(j\omega) \\ I \end{bmatrix} \\ &= -2\alpha\beta G^*G + (\alpha + \beta)(G^* + G) - 2 \end{aligned}$$

が成立することになる。 $\alpha\beta \neq 0$  の場合、これは

$$0 > -\alpha\beta \left| G - \frac{\alpha + \beta}{2\alpha\beta} \right|^2 + \alpha\beta \left| \frac{\alpha - \beta}{2\alpha\beta} \right|^2$$

を意味する。 $\beta > \alpha > 0$  ならば

$$\left| G(j\omega) - \frac{\alpha + \beta}{2\alpha\beta} \right| < \left| \frac{\alpha - \beta}{2\alpha\beta} \right|, \forall \omega$$

また、 $\alpha < 0 < \beta$  ならば

$$\left| G(j\omega) - \frac{\alpha + \beta}{2\alpha\beta} \right| > \left| \frac{\alpha - \beta}{2\alpha\beta} \right|, \forall \omega$$

となる。さらに、 $\alpha = 0$  の場合不等式は

$$0 > \beta(G^* + G) - 2 \Rightarrow \Re[G] < \frac{\beta}{2}$$

となる。これらは円盤条件にほかならない。

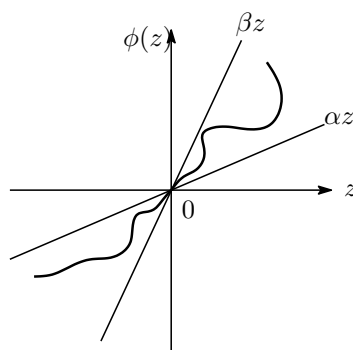


図 5.2: セクター内の静的非線形性

例 26 "Popov" 型 IQC: 基本的に、歪エルミート行列に関する 2 次形式が零だ。この性質に着目すれば、IQC を規定するエルミート行列  $\Pi$  に歪エルミートの行列で作ったエルミート行列

$$\Pi_{\text{asym}} = \begin{bmatrix} 0 & H(j\omega)^* \\ H(j\omega) & 0 \end{bmatrix}, \quad H(j\omega) + H(j\omega)^* = 0$$

を常に入れることができる。例えば、例 25 で議論したセクター内の静的非線形性に対して、エルミート行列  $\Pi$  に  $\alpha = 0$  とした上

$$H(j\omega) = j\omega$$

のときの  $\eta\beta\Pi_{\text{asym}}$  (ただし、 $\eta > 0$ ) を加えると、次のように Popov 条件を導くことができる。

再び IQC 定理の条件 (3) を展開する。

$$\begin{aligned} 0 &> \beta G^* + \beta G - 2 + \eta\beta(HG + G^*H^*) \\ &= \beta(G^* + G) - 2 + \eta\beta(j\omega G - j\omega G^*) \\ &= 2\beta\text{Re}((1 + j\eta\omega)G) - 2 \end{aligned}$$

これにより Popov 条件を得る。

$$\text{Re}((1 + j\eta\omega)G) < \frac{1}{\beta}$$

例 27 ポリトープ型不確かさの 2 次安定性: 不確かさの集合  $\mathcal{D}$  を頂点  $\Delta_1, \dots, \Delta_N \in \mathbb{R}^{m \times l}$  及び原点を持つ行列ポリトープとする。次の時変システム

$$\dot{x} = (A + B\Delta(t)C)x, \quad \Delta(t) \in \mathcal{D} \quad (5.3)$$

に関する 2 次安定条件を導出する。共通の Lyapunov 関数  $V(x) = x^T P x$  で導いた結果 (第 4 章参照) によると、すべての頂点  $\Delta_i$  について

$$P(A + B\Delta_i C) + (A + B\Delta_i C)^T P < 0, \quad \forall i = 1, \dots, N \quad (5.4)$$

を満たす正定行列  $P$  が存在すれば、2 次安定性が保証される。本条件において、変数の数は  $n(n+1)/2$  で、解くべき LMI の次元は  $Nn$  だ。

一方、IQC を適用すると、別の十分条件を見出すことができる。基本的な考え方は、行列ポリトープを楕円体で内包した上、楕円体内部の不確かさすべてに対するロバスト安定条件を導出するものだ。行列の開楕円体は不等式

$$Q + S\Delta + \Delta^T S^T + \Delta^T R \Delta > 0, \quad \forall \Delta \in \mathcal{D} \quad (5.5)$$

のように表現される。これが楕円体を表せるようにするには、 $R < 0$  が必要だ。このとき、上式は等価的に

$$\begin{bmatrix} Q + S\Delta + \Delta^T S^T & \Delta^T \\ \Delta & -R^{-1} \end{bmatrix} > 0 \quad (5.6)$$

に書ける。その  $\Delta$  に関するアフィン性質により、すべての  $\Delta \in \mathcal{D}$  について成り立つための必要十分条件は、 $\mathcal{D}$  の各頂点において下記の不等式が満たされることになる。すなわち

$$Q + S\Delta_i + \Delta_i^T S^T + \Delta_i^T R\Delta_i > 0, \forall i = 1, \dots, N \quad (5.7)$$

明らかに、行列不等式 (5.5) を満たす不確かさ  $\Delta$  は次の  $\Pi$  に関する IQC を満足する。

$$\Pi = \begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix}$$

また、考えるシステムは線形システム  $G(s) = (A, B, C, 0)$  と不確かさ  $\Delta$  で構成した閉ループと等価だ。IQC 定理の条件 (1) は  $G(j\infty) = 0$  より明らか。また、条件 (2) は (5.6) 式に  $\tau \in [0, 1]$  をかけ、整理することで示せる。従って、定理 9 によれば

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} G(j\omega) \\ I \end{bmatrix}^* \Pi \begin{bmatrix} G(j\omega) \\ I \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (j\omega I - A)^{-1} \\ I \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} C^T & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \Pi \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (j\omega I - A)^{-1} \\ I \end{bmatrix} \\ &< 0, \forall \omega \end{aligned} \quad (5.8)$$

がロバスト安定を保証できる。さらに、KYP 補題 (定理 2) を適用すると、次のロバスト安定条件が得られる。

$$\begin{bmatrix} C^T Q C & C^T S \\ S^T C & R \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A^T P + P A & P B \\ B^T P & 0 \end{bmatrix} \leq 0 \quad (5.9)$$

いまの条件において、変数は  $(P, Q, S, R)$  でその要素数は  $n(n+1)/2 + (n+m)(n+m+1)/2$  だ。その意味で、(5.4) 式の条件よりは不利だ。しかし、いまの LMI の次元は  $n+m+Nl$  であり、頂点の数  $N$  が大きくなった場合 (5.4) 式より有利になる。

最後に、この二つの 2 次安定条件は理論的に等価である [?] ことも証明されていることを述べておく。



## 第6章 極の領域配置

従来の現代制御では、システムの不確かさを考えていなかったため、極配置と言えば、閉ループの極を特定の点に設定することだった。しかし、不確かさが存在する場合、もはや閉ループ極を固定した点に設定することは不可能となる。なぜなら、プラントの変化に従って閉ループ極が動くからだ。しかし、閉ループ極をある領域に設定できる可能性がある。また、ロバスト性能の立場から見ればあらかじめ設定された領域に閉ループ極を閉じ込めることがシステムの過渡応答を保証することとなり、大変望ましいことだ。そこで、本章ではまず公称プラントについてこの問題を考えることにする。

### 6.1 凸領域とその特徴づけ

まず、システムの極をどのような領域に配置したら過渡応答の改善につながるかについて検討しよう。手始めに、標準2次系

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}, \quad 0 < \zeta < 1 \quad (6.1)$$

を取り上げる。その複素極は  $p = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$  だ。立ち上がり時間が固有周波数  $\omega_n$  に反比例することから、これを保証するために  $\omega_n$  をある値  $r > 0$  以上にする必要がある。そして、過大な入力为了避免するために  $\omega_n$  をある値  $R > 0$  以下にする必要もある。つまり、極の大きさ  $|p| = \omega_n$  は

$$r \leq |p| = \omega_n \leq R$$

の範囲内に収まる。そして、許容できる最大行き過ぎ量に対応する減衰係数を  $\zeta_p$  とすると、減衰係数は

$$\zeta \geq \zeta_p$$

にしなければならない。また、極が負の実軸となす角度は

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} = \sqrt{\frac{1}{\zeta^2} - 1} \leq \sqrt{\frac{1}{\zeta_p^2} - 1} \\ \Rightarrow \theta &\leq \theta_p = \arctan \sqrt{\frac{1}{\zeta_p^2} - 1} \end{aligned}$$

を満たす。さらに、極の実部は  $-\zeta\omega_n$  であり、整定時間を短くするため要求された収束速度  $\sigma$  に対して

$$-\zeta\omega_n \leq -\sigma$$

にする必要がある。これは基本的に  $r$  を調節することで保証できる。

これらの条件を満たす領域を描くと図 6.1 の斜線部になる。明らかに、この領域は凸ではない。一般的に、極配置問題で領域が凸である必要はない。しかし、システムの極を非凸の領域に配置するためのフィードバック制御設計は困難を極める。従って、設計を意識するならば凸領域がとても有利だ。標準 2 次系では、図 6.1 の斜線部に加えて、縦点線  $\Re[z] = \zeta\omega_n$  と半径  $r$  の円弧で囲った領域を入れれば凸になる。

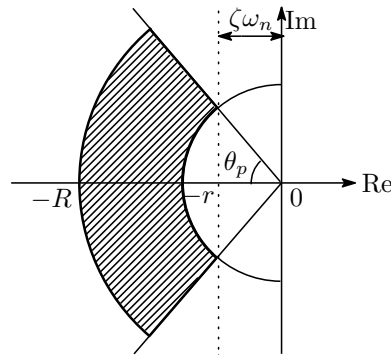


図 6.1: 2 次系の極範囲

### 6.1.1 LMI 領域の特徴づけ

凸領域の中でも、LMI で特徴づけられる LMI 領域 (LMI region) は特に重要だ。四つの典型的な LMI 領域の例が図 6.2 に示されている。以下、これらの特徴付けについて考察を加えよう。

図 6.2(a) に示す直線  $x = -\sigma$  の左側に存在する点  $z = x + jy$  は

$$x < -\sigma \Leftrightarrow z + \bar{z} < -2\sigma \quad (6.2)$$

で表せる。また、図 6.2(b) に示す中心  $(-c, 0)$  半径  $r$  の円盤内に存在する点  $z = x + jy$  は、 $z$  と  $\bar{z}$  を使って以下のように表現できる。

$$\overline{(z+c)}(z+c) < r^2 \Leftrightarrow -r - (\bar{z}+c) \cdot \frac{1}{-r} \cdot (z+c) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -r & z+c \\ \bar{z}+c & -r \end{bmatrix} < 0$$

これはさらに  $z$  と  $\bar{z}$  に関する項に分けると、次のように書き換えられる。

$$\begin{bmatrix} -r & c \\ c & -r \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \bar{z} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} < 0 \quad (6.3)$$

さらに、図 6.2(c) に示す左半面上のセクタ  $|\arg z - \pi| < \theta$  に存在する点  $z = x + jy$  は

$$\begin{aligned} \frac{y}{-x} < \tan \theta &\Leftrightarrow x \sin \theta < -y \cos \theta < 0 \\ &\Leftrightarrow (x \sin \theta)^2 > (-y \cos \theta)^2 \text{ and } x \sin \theta < 0 \end{aligned}$$

を満たす。  $x \sin \theta < 0$  に注意すれば、これは

$$x \sin \theta < \frac{(y \cos \theta)^2}{x \sin \theta} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \sin \theta & jy \cos \theta \\ -jy \cos \theta & x \sin \theta \end{bmatrix} < 0$$

と等価になる。さらに  $x = (z + \bar{z})/2$ 、 $jy = (z - \bar{z})/2$  を代入し  $1/2$  をはらうと最終的に

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} (z + \bar{z}) \sin \theta & (z - \bar{z}) \cos \theta \\ -(z - \bar{z}) \cos \theta & (z + \bar{z}) \sin \theta \end{bmatrix} < 0 \Leftrightarrow \\ &z \begin{bmatrix} \sin \theta & \cos \theta \\ -\cos \theta & x \sin \theta \end{bmatrix} + \bar{z} \begin{bmatrix} \sin \theta & -\cos \theta \\ \cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix} < 0 \quad (6.4) \end{aligned}$$

にまとめられる。これらの領域はすべて LMI によって特徴づけられていることに注意する。

以上の例を一般化し、行列不等式

$$f_D(z) = \alpha + z\beta + \bar{z}\beta^T < 0 \quad (6.5)$$

で表される複素数  $z$  の領域  $D$

$$D = \{z \in \mathbb{C} : f_D(z) < 0\} \quad (6.6)$$

を LMI 領域と呼ぶことにする。また、行列を  $f_D(z)$  を特性関数と呼ぶ。ただし、 $\alpha, \beta$  は共に行列だ。

## 6.2 システムの極が LMI 領域に含まれる条件

ここで、次のシステムを考える。

$$\dot{x} = Ax \quad (6.7)$$

その固有値がある LMI 領域に入るためにはどのような条件が必要かを調べる。例として相異なる固有値を持つ 2 次元系を考える。このとき、ある (複素) 行列  $T$  を使って  $A$  を

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} z_1 & \\ & z_2 \end{bmatrix} \quad (6.8)$$

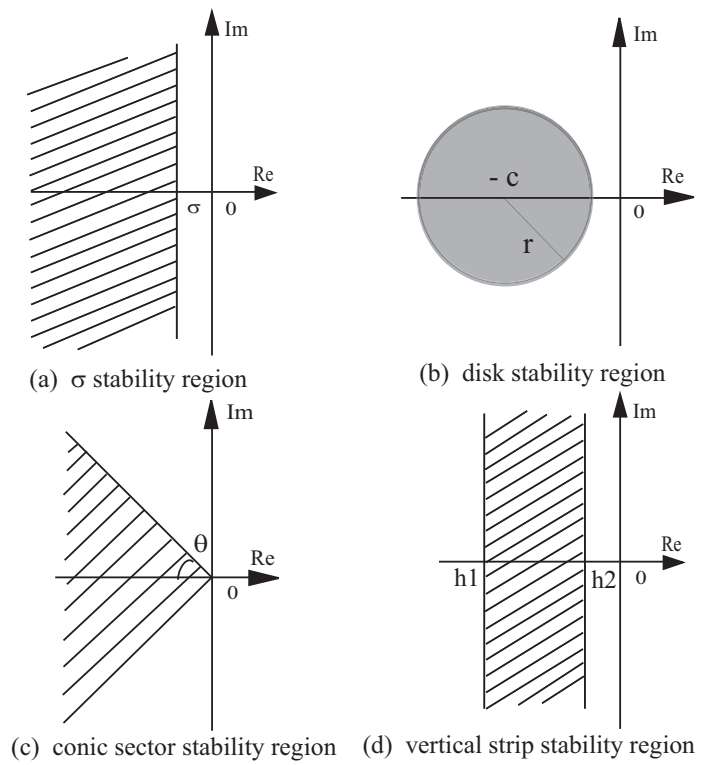


図 6.2: LMI 領域の例

のように対角化できる。\$A\$ の固有値がすべて (6.6) 式の LMI 領域 \$D\$ に含まれるために、

$$f_D(z_1) = \alpha + z_1\beta + \bar{z}_1\beta^T < 0, \quad f_D(z_2) = \alpha + z_2\beta + \bar{z}_2\beta^T < 0$$

が成り立たなければならない。上式は以下のように一つの行列不等式にまとめることができる。

$$\begin{bmatrix} f_D(z_1) \\ f_D(z_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z_1\beta \\ z_2\beta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{z}_1\beta^T \\ \bar{z}_2\beta^T \end{bmatrix} < 0$$

Kronecker 積を用いれば本式を次のように簡潔に書くことができる。

$$\begin{aligned} \alpha \otimes \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix} + \beta \otimes \begin{bmatrix} z_1 & \\ & z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{z}_1 & \\ & \bar{z}_2 \end{bmatrix} \otimes \beta^T < 0 \\ \Rightarrow \alpha \otimes I_2 + \beta \otimes (T^{-1}AT) + (T^{-1}AT)^* \otimes \beta^T < 0 \end{aligned} \quad (6.9)$$

さらに、この式を直接 \$A\$ で表すために、式 (6.8) および Kronecker 積の性質

$$(AC) \otimes (BD) = (A \otimes B)(C \otimes D)$$

に注意して \$\beta \otimes (T^{-1}AT)\$ を変形していく。

$$\begin{aligned} \beta \otimes (T^{-1}AT) &= (I_2 \cdot \beta) \otimes (T^{-1} \cdot AT) \\ &= (I_2 \otimes T^{-1})[\beta \otimes (AT)] \\ &= (I_2 \otimes T^{-1})[(\beta \cdot I_2) \otimes (ATT^* \cdot T^{-*})] \\ &= (I_2 \otimes T^{-1})[\beta \otimes (ATT^*)](I \otimes T^{-*}) \end{aligned}$$

同様に、次式も成立する。

$$\begin{aligned} (T^{-1}AT)^* \otimes \beta^T &= (T^*A^T T^{-*}) \otimes \beta^T = (I_2 \otimes T^{-1})[(ATT^*)^* \otimes \beta^T](I_2 \otimes T^{-*}) \\ \alpha \otimes I_2 &= \alpha \otimes (T^*T^{-*}) = (I_2 \otimes T^{-1})[\alpha \otimes (TT^*)](I_2 \otimes T^{-*}) \end{aligned}$$

よって、

$$I_2 \otimes T^{-1} = \begin{bmatrix} T^{-1} & \\ & T^{-1} \end{bmatrix}, \quad I_2 \otimes T = \begin{bmatrix} T & \\ & T \end{bmatrix}$$

に注目して、式 (6.9) に左右からそれぞれ \$I\_2 \otimes T\$、\$I\_2 \otimes T^\*\$ をかけると

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} TT^{-1} & \\ & TT^{-1} \end{bmatrix} [\alpha \otimes (TT^*) + \beta \otimes (ATT^*) + (ATT^*)^* \otimes \beta^T] \\ &\quad \times \begin{bmatrix} T^{-*}T^* & \\ & T^{-*}T^* \end{bmatrix} \\ &= \alpha \otimes (TT^*) + \beta \otimes (ATT^*) + (ATT^*)^* \otimes \beta^T < 0 \end{aligned} \quad (6.10)$$

を得る。これは  $A$  の固有値がすべて LMI 領域  $D$  に存在するための必要な条件だ。記述の便宜上  $X = TT^*$  と置くと、上式はさらに

$$\alpha \otimes X + \beta \otimes (AX) + (AX)^* \otimes \beta^T < 0 \quad (6.11)$$

に書き直せる。明らかに、 $X$  がエルミート行列であり正定だ。ただし、一般に複素行列となる。

上述の条件 (6.11) は複素行列  $X$  に関する LMI で与えられている。しかし複素行列は計算上複雑なので、以下では行列  $X$  を実行列に置き換えられるかについて調べる。そこで、まず任意のエルミート行列  $Z$  を考える。 $Z$  の実部と虚部をそれぞれ  $Z_{\text{re}}$ 、 $Z_{\text{im}}$  と置く。エルミート性より

$$Z_{\text{re}} + jZ_{\text{im}} = (Z_{\text{re}} + jZ_{\text{im}})^* = Z_{\text{re}}^T - jZ_{\text{im}}^T$$

が成立する。よって、両辺の実部と虚部がそれぞれ等しいことより

$$Z_{\text{re}} = Z_{\text{re}}^T, \quad Z_{\text{im}} + Z_{\text{im}}^T = 0$$

を得る。すると、虚部  $Z_{\text{im}}$  の歪対称性より適切な次元を持つ任意実ベクトル  $v$  について

$$v^T Z v = v^T Z_{\text{re}} v + jv^T Z_{\text{im}} v = v^T Z_{\text{re}} v + \frac{j}{2} v^T (Z_{\text{im}} + Z_{\text{im}}^T) v = v^* Z_{\text{re}} v$$

が成り立つ。すなわち、 $Z < 0$  と  $Z_{\text{re}} < 0$  が等価だ。

再び (6.11) 式の条件を考察する。エルミート行列  $X$  を除くすべての行列が実行列であることに着目すれば、 $X = X_{\text{re}} + jX_{\text{im}}$  と置いたとき、本式左辺の実部は  $X$  を  $X_{\text{re}}$  に入れ替わった行列になる。よって、 $X_{\text{re}}^* = X_{\text{re}}^T$  に注意すれば、上述の議論から (6.11) 式の等価条件は

$$\alpha \otimes X_{\text{re}} + \beta \otimes (AX_{\text{re}}) + (AX_{\text{re}})^T \otimes \beta^T < 0$$

となる。さらに、 $X_{\text{re}}$  を  $X$  に置き換えて表記すると、 $A$  の固有値すべてが LMI 領域  $D$  に存在するための必要な条件は不等式

$$\alpha \otimes X + \beta \otimes (AX) + (AX)^T \otimes \beta^T < 0 \quad (6.12)$$

を満たす実対称正定行列  $X$  が存在することとなる。

では、2重根の場合はどうだろうか。幾何学的重複度が2の場合、上と同じ条件となる。そうでない場合、相似変換で Jordan 正準形

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} z & 1 \\ & z \end{bmatrix}$$

に変換できる。これにそれぞれ左右から

$$T_k^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{k} & \\ & 1 \end{bmatrix}, \quad T_k = \begin{bmatrix} k & \\ & 1 \end{bmatrix}$$

をかける。  $k$  を無限大に漸近させていくと

$$\begin{aligned} T_k^{-1}T^{-1}ATT_k &= \begin{bmatrix} \frac{1}{k} & \\ & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z & 1 \\ & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k & \\ & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z & \frac{1}{k} \\ & z \end{bmatrix} \\ &\rightarrow \begin{bmatrix} z & \\ & z \end{bmatrix} \end{aligned}$$

になる。ここで、改めて  $S = TT_k$  とおく。すると、式 (6.9) より十分に大きい  $k$  について

$$\alpha \otimes I_2 + \beta \otimes (S^{-1}AS) + (S^*A^T S^{-*}) \otimes \beta < 0 \quad (6.13)$$

が成立する。よって、単根の場合と同様に  $X = (SS^*)_{\text{re}} > 0$  について (6.12) 式が成り立つ。

以下、不等式 (6.12) に現れる行列を

$$M_D(A, X) = \alpha \otimes X + \beta \otimes (AX) + (AX)^T \otimes \beta^T \quad (6.14)$$

と置く。

以上の議論は任意次元の  $A$  について成立するので、次の定理を得る。

**定理 10** 行列  $A$  の固有値がすべて  $LMI$  領域  $D$  に存在するための必要十分条件は

$$M_D(A, X) < 0 \quad (6.15)$$

を満たす実対称正定行列  $X$  が存在することだ。

**証明 11** これまでに行列  $A$  の固有値がすべて  $LMI$  領域  $D$  に存在するとき、ある実対称行列  $X > 0$  が存在し不等式 (6.15) を満足することを示した。

以下その逆、すなわち (6.15) が成り立つとき行列  $A$  の固有値がすべて  $LMI$  領域  $D$  に存在することを示す。このために、 $z$  を  $A$  の固有値、 $v \neq 0$  を  $v^*A = zv^*$  を満たす固有ベクトルとする。  $M_D(A, X)$  の  $(i, j)$  ブロックについて

$$\begin{aligned} v^*(\alpha_{ij}X + \beta_{ij}AX + \beta_{ji}XA^T)v &= \alpha_{ij}v^*Xv + \beta_{ij}v^*AXv + \beta_{ji}v^*XA^Tv \\ &= \alpha_{ij}v^*Xv + \beta_{ij}zv^*Xv + \beta_{ji}\bar{z}v^*Xv \\ &= v^*Xv(\alpha_{ij} + \beta_{ij}z + \beta_{ji}\bar{z}) \\ &= v^*Xv \cdot (f_D(z))_{ij} \end{aligned}$$

が成り立つ。ただし、 $(f_D(z))_{ij}$  は特性関数  $f_D(z)$  の  $(i, j)$  要素を表す。よって

$$(I \otimes v^*)M_D(A, X)(I \otimes v) = (v^*Xv) \cdot f_D(z)$$

が言える。条件  $M_D(A, X) < 0$  及び  $v^*Xv > 0$  より  $f_D(z) < 0$  が成り立ち  $z \in D$  になる。

次は 6.1.1 項で調べた LMI 領域に関する例を見ていこう。

例 28  $A$  の固有値が中心  $(-c, 0)$ 、半径  $r$  の円盤内に存在するための条件を具体的に書いてみよう。この LMI 領域の特性関数は

$$f_D(z) = \begin{bmatrix} -r & c+z \\ c+\bar{z} & -r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r & c \\ c & -r \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \bar{z} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

だ。つまり、

$$\alpha = \begin{bmatrix} -r & c \\ c & -r \end{bmatrix}, \quad \beta = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

定理 10 より求める条件は

$$\begin{aligned} M_D(A, X) &= \alpha \otimes X + \beta \otimes (AX) + (AX)^T \otimes \beta^T \\ &= \begin{bmatrix} -rX & cX \\ cX & -rX \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & AX \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ (AX)^T & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -rX & cX + AX \\ cX + (AX)^T & -rX \end{bmatrix} < 0 \end{aligned} \quad (6.16)$$

となる。

本例の  $M_D(A, X)$  と  $f_D(z)$  をよく観察すると、 $f_D(z)$  の中の定数 1 が  $M_D(A, X)$  の変数行列  $X$  に対応し、変数  $z, \bar{z}$  が行列  $AX, (AX)^T$  に対応することが分かる。この

$$(1, z, \bar{z}) \Leftrightarrow (X, AX, (AX)^T) \quad (6.17)$$

の対応関係はすべての場合について成り立つ。

別の例について確認しよう。左半面上角度  $\theta$  のセクターの特性関数は

$$\begin{aligned} f_D(z) &= \begin{bmatrix} (z + \bar{z}) \sin \theta & (z - \bar{z}) \cos \theta \\ -(z - \bar{z}) \cos \theta & (z + \bar{z}) \sin \theta \end{bmatrix} \\ &= z \begin{bmatrix} \sin \theta & \cos \theta \\ -\cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix} + \bar{z} \begin{bmatrix} \sin \theta & -\cos \theta \\ \cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix} \end{aligned}$$

だ。すなわち

$$\alpha = 0, \quad \beta = \begin{bmatrix} \sin \theta & \cos \theta \\ -\cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix}$$

だ。上述の対応関係 (6.17) を代入すると条件式

$$M_D(A, X) = \begin{bmatrix} (AX + XA^T) \sin \theta & (AX - XA^T) \cos \theta \\ -(AX - XA^T) \cos \theta & (AX + XA^T) \sin \theta \end{bmatrix} < 0 \quad (6.18)$$



を得る。一方、定義に従って  $M_D(A, X)$  を計算すると

$$\begin{aligned} M_D(A, X) &= \begin{bmatrix} \sin \theta & \cos \theta \\ -\cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix} \otimes (AX) + (AX)^T \otimes \begin{bmatrix} \sin \theta & \cos \theta \\ -\cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} (AX + XA^T) \sin \theta & (AX - XA^T) \cos \theta \\ -(AX - XA^T) \cos \theta & (AX + XA^T) \sin \theta \end{bmatrix} \end{aligned}$$

が得られ、同じ結果になる。

そして、直線  $\Re[z] = -\sigma$  左側の半平面  $D$  についてその特性関数が  $f_D(z) = z + \bar{z} - 2\sigma$  であるので、行列  $A$  の固有値がすべてこの半平面に存在するための条件は

$$M_D(A, X) = AX + (AX)^T - 2\sigma X < 0 \quad (6.19)$$

となる。これは 4.1.3 節で示した状態が収束率  $\sigma$  で指数収束の条件に等しい。

例 29 システム行列  $A$  を

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -6 \end{bmatrix}$$

とする。  $A$  の固有値は  $p = -3 \pm j$  だ。上述各領域のパラメータを

(1) 円盤 :  $c = 0, r = 5$  (2) 半平面 :  $\sigma = 2$  (3) セクター :  $\theta = \pi/4$

とする。明らかに行列  $A$  の固有値はこれら LMI 領域すべてに含まれている。条件式 (6.16) の解を  $X_1$ 、(6.2) の解を  $X_2$ 、(6.18) の解を  $X_3$  とする。数値計算よりそれぞれ

$$\begin{aligned} X_1 &= \begin{bmatrix} 0.1643 & -0.2756 \\ -0.2756 & 0.8687 \end{bmatrix}, X_2 = \begin{bmatrix} 0.2320 & -0.2002 \\ -0.2002 & 0.3216 \end{bmatrix} \\ X_3 &= \begin{bmatrix} 0.1335 & -0.2187 \\ -0.2187 & 0.4799 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

が得られ、すべて正定だ。よって、定理 10 から行列  $A$  の固有値がこの三つの領域に入っていることが確認できた。

しかし、 $\sigma = 4$  に大きくとるとシステムの極が半平面の  $\Re[z] < -4$  右側に出る。このとき、条件式 (6.2) を計算すると正定解が存在しない。

## 6.3 複合 LMI 領域

では、行列  $A$  の固有値をいくつかの LMI 領域の共通部分、すなわちそれらの交わりに配置する条件がどうなるか。例として、円と半平面の交わりやセクターと半平面の交わりなどが挙げられる。

これを調べるため、まず2領域の場合を扱う。そこで、LMI領域  $D_1$ ,  $D_2$  の特性関数をそれぞれ

$$f_{D_1}(z) = \alpha_1 + z\beta_1 + \bar{z}\beta_1^T, \quad f_{D_2}(z) = \alpha_2 + z\beta_2 + \bar{z}\beta_2^T \quad (6.20)$$

とする。このとき、 $A$  の固有値がすべて LMI 領域  $D_1$  に入るための条件は

$$M_{D_1}(A, X_1) = \alpha_1 \otimes X_1 + \beta_1 \otimes (AX_1) + (AX_1)^T \otimes \beta_1^T < 0 \quad (6.21)$$

を満たす正定対称行列  $X_1$  が存在することになる。同様に、 $A$  の固有値がすべて LMI 領域  $D_2$  に含まれるための条件は

$$M_{D_2}(A, X_2) = \alpha_2 \otimes X_2 + \beta_2 \otimes (AX_2) + (AX_2)^T \otimes \beta_2^T < 0 \quad (6.22)$$

を満たす正定対称行列  $X_2$  が存在することになる。すると、この2本の行列不等式を満たす  $X_1$ ,  $X_2$  が同時に存在すれば、 $A$  の固有値は LMI 領域  $D_1$ ,  $D_2$  の交わり  $D_1 \cap D_2$  に含まれることになる。

しかし、異なる解  $X_1$ ,  $X_2$  を使ってこの性質を特徴づけると、設計時には不都合だ。そこで、 $X_1 = X_2$  にしてよいかについて調べる。ヒントを得るために、まず (6.11) 式に立ち返る。その中の変数行列  $X$  は、行列  $A$  を対角変換する際に用いた行列  $T$  との間に  $X = TT^*$  の関係がある。変換行列  $T$  は LMI 領域と何ら関係を持たないので、 $X$  も LMI 領域に独立であってよいはずだ。つまり、LMI 領域の交わり  $D_1 \cap D_2$  を考えるとき二つの行列不等式は共通解を持つはずだ。

具体的な証明は次のようになる。まず明らかに複合領域  $D_1 \cap D_2$  の特性関数  $f_{D_1 \cap D_2}$  は

$$\begin{aligned} f_{D_1 \cap D_2}(z) &= \begin{bmatrix} f_{D_1}(z) & 0 \\ 0 & f_{D_2}(z) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \alpha_1 + z\beta_1 + \bar{z}\beta_1^T & 0 \\ 0 & \alpha_2 + z\beta_2 + \bar{z}\beta_2^T \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} \beta_1 & 0 \\ 0 & \beta_2 \end{bmatrix} + \bar{z} \begin{bmatrix} \beta_1 & 0 \\ 0 & \beta_2 \end{bmatrix}^T \quad (6.23) \end{aligned}$$

にまとめることができる。これより  $D_1 \cap D_2$  も LMI 領域となり、定理 10 を用いると次の結果を示せる。

**系 1** 二つの LMI 領域  $D_1$ ,  $D_2$  が与えられたとき、 $A$  の固有値がすべて複合領域  $D_1 \cap D_2$  に入ることを保証するためには、 $M_{D_1}(A, X) < 0$  と  $M_{D_2}(A, X) < 0$  を満たす正定行列  $X$  の存在が必要かつ十分だ。

**証明 12** 定理 10 によると、条件は次の不等式を満たす  $X > 0$  が存在するこ

とだ。

$$\begin{aligned}
& M_{D_1 \cap D_2}(A, X) \\
&= \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix} \otimes X + \begin{bmatrix} \beta_1 & 0 \\ 0 & \beta_2 \end{bmatrix} \otimes (AX) + (AX)^T \otimes \begin{bmatrix} \beta_1^T & 0 \\ 0 & \beta_2^T \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \alpha_1 \otimes X & 0 \\ 0 & \alpha_2 \otimes X \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1 \otimes (AX) & 0 \\ 0 & \beta_2 \otimes (AX) \end{bmatrix} \\
&\quad + \begin{bmatrix} (AX)^T \otimes \beta_1^T & 0 \\ 0 & (AX)^T \otimes \beta_2^T \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} M_{D_1}(A, X) & 0 \\ 0 & M_{D_2}(A, X) \end{bmatrix} < 0 \tag{6.24}
\end{aligned}$$

明らかに、この条件は  $M_{D_1}(A, X) < 0$  と  $M_{D_2}(A, X) < 0$  と等価だ。

二つ以上の領域を複合する場合の結論も同じで、共通解  $X$  を用いればよいことになる。

例を見ていこう。行列  $A$  の固有値がすべて図 6.3 に示す複合領域に入るための条件を求める。この領域は円、セクターと半平面の複合領域であるから、その条件は前の節で求めた各領域に関する条件が共通解  $X > 0$  を持つこととなる。すなわち、 $X > 0$  が次の行列不等式をすべて満足する。

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} -rX & cX + AX \\ cX + (AX)^T & -rX \end{bmatrix} < 0 \\
& \begin{bmatrix} (AX + XA^T) \sin \theta & (AX - XA^T) \cos \theta \\ -(AX - XA^T) \cos \theta & (AX + XA^T) \sin \theta \end{bmatrix} < 0 \\
& AX + (AX)^T - 2\sigma X < 0
\end{aligned}$$

例 30 例 29 では、システム行列

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -6 \end{bmatrix}$$

の固有値がそれぞれ領域

(1) 円盤 :  $c = 0, r = 5$  (2) 半平面 :  $\sigma = 2$  (3) セクター :  $\theta = \pi/4$

に入っていることを確認した。この三つの領域が複合したものは図 6.3 の斜線部になる。ここで、系 1 を用いて行列  $A$  の固有値がすべてこの複合領域に含まれることを確認しよう。

上述の三本の LMI の共通解を計算すると

$$X = \begin{bmatrix} 0.1292 & -0.2052 \\ -0.2052 & 0.5590 \end{bmatrix}$$

が得られる。この行列は正定なので、固有値がすべて複合領域に入っていることが分かる。

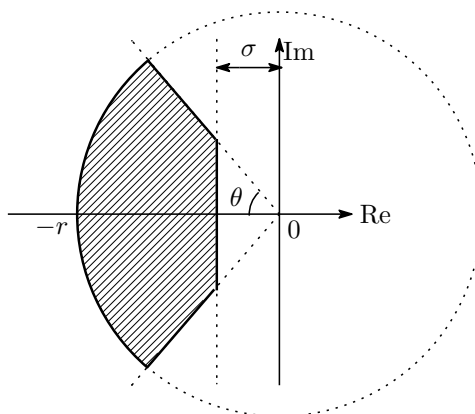


図 6.3: 円盤、半平面とセクターの複合領域

## 6.4 設計例：マス・バネ系

### 6.5 ロバスト極配置

この節では、システムモデルに不確かなパラメータがある場合、その極が指定された LMI 領域に存在するための条件について調べていく。ここでまず次のマス・バネ・ダンパー系の例を調べてみる。

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{d}{m} & -\frac{k}{m} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$p_1 = d/m$ ,  $p_2 = k/m$  と置けば、このシステムは入力  $u = 0$  のとき

$$\dot{x} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + p_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + p_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right\} x$$

のように書ける。すなわち、パラメータベクトル  $p = [p_1, p_2]^T$  に関してシステム行列  $A$  がアフィンだ。当然  $A$  の固有値が  $p$  によって変化する。

一般に、不確かなパラメータのベクトルを  $p \in \mathbb{R}^N$  とするとき、システムの状態方程式は

$$\dot{x} = A(p)x, \quad x(0) \neq 0 \quad (6.25)$$

となる。システム行列  $A(p)$  とパラメータベクトル  $p$  の関係は、上の例に示したアフィン形式のほかに、ポリティップ、あるいは LFT など様々な形式が考えられる。

これまでに、 $p$  が既知の場合上述のシステムの極がある LMI 領域に入るための条件を導いた。この条件とは行列不等式  $M_D(A, X)$  を満たす正定行列  $X$  が存在することだが、行列  $X$  はシステム行列  $A$  に依存するものだった。このことから類推すると、 $A(p)$  が  $p$  に従って変化すると  $X$  も変化するはずだ。

すなわち、 $X$  はパラメータベクトル  $p$  の関数であり、 $X(p)$  と表記するべきだ。すると、定理 10 より次の系が直ちに言える。

定理 11 行列  $A(p)$  の固有値がすべて  $LMI$  領域  $D$  に存在するための必要十分条件は

$$M_D(A(p), X(p)) < 0 \quad (6.26)$$

を満たす実対称正定行列  $X(p) > 0$  が存在することだ。

しかし、 $X(p)$  とパラメータベクトル  $p$  の関数形式が具体的にどのようなになっているかを知ることは大変難しく、未だに答えは分かっていない。そこで、十分条件にしかならないが、2 次安定性の考え方に習い  $X(p)$  を常数列に固定して考える。すると、明らかに行列不等式

$$M_D(A(p), X) < 0 \quad (6.27)$$

を満たす実対称正定行列  $X > 0$  が存在すれば、行列  $A(p)$  の固有値がすべて  $LMI$  領域  $D$  に存在する。

ただし、この条件はまだ不確かなパラメータベクトル  $p$  に依存するので、このままでは確認することができない。以下、パラメータベクトル  $p$  に依存しない条件を調べる。そこで、ポリトープ型不確かシステム

$$A(p) = \sum_{i=1}^N p_i A_i, \quad \sum_{i=1}^N p_i = 1, \quad p_i \geq 0 \quad (6.28)$$

を考える。この行列ポリトープは  $N$  個の頂点を持つ。各頂点  $A_i$  において上述の系を満たすために、

$$M_D(A_i, X) < 0, \quad \forall i = 1, \dots, N \quad (6.29)$$

が必要だ。逆に、 $\sum_{i=1}^N p_i = 1$  より任意の定数行列  $L$  を  $L = \sum_{i=1}^N p_i L$  と書ける。さらに、 $M_D(A(p), X)$  が  $A(p)$  に関してアフィンであること、ならびに  $p_i \geq 0$  に着目すれば、上式が成り立つとき

$$M_D(A(p), X) = \sum_{i=1}^N p_i M_D(A_i, X) < 0$$

となることも分かる。すなわち、(6.29) 式が系 2 の等価条件だ。これで以下の結果を得る。

系 2 ポリトープ行列  $A(p)$  に対して、行列不等式

$$M_D(A_i, X) < 0, \quad \forall i = 1, \dots, N \quad (6.30)$$

を満たす実対称正定行列  $X > 0$  が存在すれば、行列  $A(p)$  の固有値がすべて  $LMI$  領域  $D$  に存在する。

例 31 次の行列

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k & -3 \end{bmatrix}, k \in [2, 5]$$

を考える。これはマス・バネ・ダンパー系において質量 1、摩擦係数 3、バネ  
 定数  $k$  の場合に相当する。

LMI 領域は円心  $-c = -2$ 、 $r = 2$  の円とする。根軌跡解析により  $k \in [2, 5]$   
 のとき特性根がすべて円内にあることが分かる。系 6.29 の条件で調べると、

、 $\times$  両方

この例題から分かるように、共通解で極のロバスト LMI 領域配置を調べる  
 には保守性がかなり強い。そこで、行列  $A(p)$  のポリトップ構造に着眼して行  
 列  $X(p)$  にも同様な構造を要請する。

$$X(p) = \sum_{i=1}^N p_i X_i, X_i > 0, \sum_{i=1}^N p_i = 1, p_i \geq 0 \quad (6.31)$$

こうすればより保守性の弱い条件が見つかるかもしれない。しかし、このよ  
 うな場合定理 10 を用いると不確かパラメータの二乗  $p_i^2$  に関する項が現れ、  
 頂点条件に帰着できなくなる。例えば、2次元システムの場合  $M_D(A, X)$  の  
 内  $AX$  は

$$\begin{aligned} A(p)X(p) &= (p_1 A_1 + p_2 A_2)(p_1 X_1 + p_2 X_2) \\ &= p_1^2 A_1 X_1 + p_2^2 A_2 X_2 + p_1 p_2 (A_1 X_2 + A_2 X_1) \end{aligned}$$

となる。 $p_i^2$  のせいでポリトップ構造が壊れた。

この問題を解決するために、定理 10 の条件式  $M_D(A, X) < 0$  から積  $AX$   
 を分離する必要がある。そのための方法を一つ紹介する。???

## 6.6 フィードバック設計

閉ループ系の極を LMI 領域に配置できる条件について吟味する。ここで、  
 プラントのモデルは

$$\dot{x} = A(p)x + B(p)u \quad (6.32)$$

$$y = C(p)x \quad (6.33)$$

で与えられるとする。

## 第7章 ゲインスケジュール制御

第??章では、非線形システムが時に LPV モデルで表せることを述べた。LPV モデルの時変係数は一部状態の関数であるため、これらの状態を実時間で測れば時変係数も実時間で計算できる。すると、制御器も LPV モデルの係数変換に応じてゲインを変えていけば、ゲインを固定した場合よりはさらに有効に LPV システムを制御可能だ。この手法は、ゲインスケジュール制御 (gain-scheduled control) として知られている。

本章では、ゲインスケジュール制御の設計方法、設計例を説明する。

### 7.1 ゲインスケジュール制御の一般構造

ここで、LPV モデルを

$$\dot{x} = A(p(t))x + B(p(t))u \quad (7.1)$$

$$y = C(p(t))x \quad (7.2)$$

と置く。これに対するゲインスケジュール制御器は同様な LPV 形式に定め、

$$\dot{x}_K = A_K(p(t))x_K + B_K(p(t))y \quad (7.3)$$

$$u = C_K(p(t))x_K + D_K(p(t))y \quad (7.4)$$

と書く。要するに、時変パラメータベクトル  $p(t)$  の変化に応じて制御器のパラメータを変える。これによってより高性能な制御を実現させる。

しかし、係数行列  $A_K(p(t))$  などのパラメータベクトル  $p(t)$  との関係を予め決めないと、設計のしようはない。また、制御器のおパラメータ依存関係を決定する際、LPV モデルのパラメータ依存関係を考慮する必要がある。そこで、LPV モデルの中で二種類の典型的なモデルについて述べることにする。

### 7.2 LFT 型時変パラメータモデル

これは、図 7.1 に示されるように制御対象の不確かさが線形分数変換の構造を持つ場合だ。この図に実際に示したのは構造化時変パラメータ不確かさ

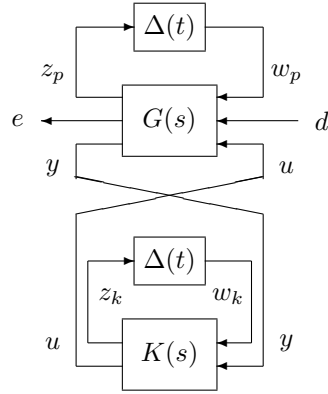


図 7.1: ゲインスケジュール制御系

$\Delta(t)$  に関する一般化プラントの LFT 構造だ。ここで、不確かさ  $\Delta(t)$  は次の対角スカラブロック構造を有するものだ。

$$\Delta(t) = \begin{bmatrix} \delta_1(t)I & & & \\ & \delta_2(t)I & & \\ & & \ddots & \\ & & & \delta_q(t)I \end{bmatrix}, \quad |\delta_i(t)| \leq 1 \quad (7.5)$$

その入出力関係は

$$w_p = \Delta(t)z_p \quad (7.6)$$

で与えられる。一方、図中の公称伝達行列  $G(s)$  の状態方程式は

$$\dot{x} = Ax + B_1w_p + B_2d + B_3u \quad (7.7)$$

$$z_p = C_1x + D_{11}w_p + D_{12}d + D_{13}u \quad (7.8)$$

$$e = C_2x + D_{21}w_p + D_{22}d + D_{23}u \quad (7.9)$$

$$y = C_3x + D_{31}w_p + D_{32}d \quad (7.10)$$

で表される。 $d$  は外乱、 $e$  は評価出力、 $y$  は測定出力、そして  $u$  は制御入力だ。 $z_p$  の式を (7.6) 式に代入して整理すると

$$\begin{aligned} w_p &= (I - \Delta D_{11})^{-1} \Delta (C_1x + D_{12}d + D_{13}u) \\ &= \Delta (I - D_{11}\Delta)^{-1} (C_1x + D_{12}d + D_{13}u) \end{aligned}$$



を得る。本式をさらに上の状態方程式に代入すれば、 $(w_p, z_p)$  を消去した状態方程式

$$\begin{aligned} \dot{x} = & [A + B_1\Delta(I - D_{11}\Delta)^{-1}C_1]x + [B_2 + B_1\Delta(I - D_{11}\Delta)^{-1}D_{12}]d \\ & + [B_3 + B_1\Delta(I - D_{11}\Delta)^{-1}D_{13}]u \end{aligned} \quad (7.11)$$

$$\begin{aligned} e = & [C_2 + D_{21}\Delta(I - D_{11}\Delta)^{-1}C_1]x + [D_{22} + D_{21}\Delta(I - D_{11}\Delta)^{-1}D_{12}]d \\ & + [D_{23} + D_{21}\Delta(I - D_{11}\Delta)^{-1}D_{13}]u \end{aligned} \quad (7.12)$$

$$\begin{aligned} y = & [C_3 + D_{31}\Delta(I - D_{11}\Delta)^{-1}C_1]x + [D_{32} + D_{31}\Delta(I - D_{11}\Delta)^{-1}D_{12}]d \\ & + D_{31}\Delta(I - D_{11}\Delta)^{-1}D_{13}u \end{aligned} \quad (7.13)$$

になる。係数行列は  $\Delta(t)$  に関して LFT 関数になっている。

これに対して、ゲインスケジュール制御器として同じ  $\Delta(t)$  に関する LFT 構造のものを導入したのは図 7.1 だ。制御器の部分を書き下すと、係数行列  $K(s)$  の状態方程式は

$$\dot{x}_K = A_K x_K + B_{K1} w_K + B_{K2} y \quad (7.14)$$

$$z_K = C_{K1} x_K + D_{K11} w_K + D_{K12} y \quad (7.15)$$

$$u = C_{K2} x_K + D_{K21} w_K + D_{K22} y \quad (7.16)$$

となり、ゲインスケジュール信号  $w_K$  は

$$w_K = \Delta(t) z_K \quad (7.17)$$

となる。信号  $w_K$  は時変パラメータ  $\Delta(t)$  に依存するので、制御器のゲインを実時間で変えることになる。このことを、制御入力と測定出力の関係式

$$\hat{u}(s) = \mathcal{F}_u(K(s), \Delta(t)) \hat{y}(s) = [K_{22} + K_{21}\Delta(I - \Delta K_{11})^{-1}K_{12}] \hat{y}(s) \quad (7.18)$$

からより明確に読み取れる。 $K_{ij}(s)$  は係数行列  $K(s)$  を  $2 \times 2$  のブロック分解したときのブロックを表す。

制御系設計の際、これら二つの時変パラメータブロックをブロック線図変換を通して図 7.2 のように一つの拡大した変動ブロックにまとめ、これに対するロバスト制御を小ゲインベースの  $\mathcal{H}_\infty$  制御や  $\mu$  設計、あるいはスケーリング付き  $\mathcal{H}_\infty$  制御などで行なうことができる。ただし

$$\Delta_{gs}(t) = \begin{bmatrix} \Delta(t) & \\ & \Delta(t) \end{bmatrix} \quad (7.19)$$

となっている。なお、新しい一般化プラント  $G_{gs}(s)$  は  $G(s)$  に比べ新たに入力  $(w_K, z_K)$ 、出力  $(w_K, z_K)$  が加わっただけなので、その状態方程式は前掲の  $G(s)$  の状態方程式に入出力関係

$$z_K = z_K$$

$$w_K = w_K$$

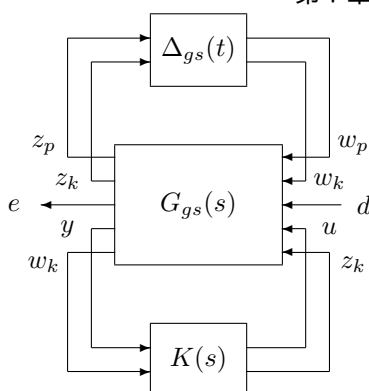


図 7.2: ゲインスケジュール制御系の等価変換

を加えれば  $G_{gs}(s)$  の状態方程式になる。

制御設計の際、時変パラメータ  $\Delta_{gs}(t)$  を不確かさとして扱い、小ゲイン方法を適用することになる。しかし、小ゲイン条件は実変動に対してもともと保守性が強い。加えて、 $\Delta_{gs}(t)$  の対角構造はさらに小ゲイン条件の保守性を拡大している。故に、ただ小ゲイン条件を適用するだけでは、性能のよい制御系設計が期待できない。何らかに工夫が必要だ。その一つに、スケーリング、あるいは  $\mu$  設計の導入が考えられる。

以下、数値計算の容易さを狙った定数スケーリングについて紹介する。

### 7.3 一輪車の姿勢安定化制御

本節では、前節で述べた LFT 型 LPV モデルに基づくゲインスケジュール制御を用いて、図 7.3 の一輪車ロボットの姿勢安定化制御を行なう [3]。このロボットでは、前後方向の姿勢は車輪の回転、横方向の姿勢は逆方向に高速回転する一対のジャイロによってそれぞれの安定化が図られる。

#### 7.3.1 モデル

姿勢角などの定義は図 7.4 に示される。 $\phi$ : 車輪の回転角、 $\theta_1, \theta_2$ : 本体の  $y-z$  面と  $x-z$  面に置ける姿勢角、 $\theta_3, \theta_5$ : ジャイロの本体に対する回転角。

観測される出力は車輪の回転角 ( $\phi$ )、二つのジャイロの回転角 ( $\theta_3, \theta_5$ )、本体の前後方向および横方向の角速度 ( $\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2$ ) だ。これらの信号を測定するために、五つのセンサを用いた: ロータリーエンコーダー一つ ( $\phi$ )、ポテンシャルメータ二つ ( $\theta_3, \theta_5$ ) ならびに速度センサ二つ ( $\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2$ )。入力には車輪モータのトルク ( $\tau_1$ ) と二つのジャイロの枠につながっている外部モータのトルク ( $\tau_2, \tau_3$ )

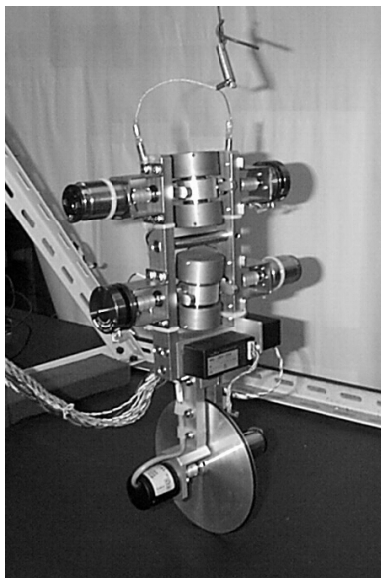


図 7.3: 運動中の一輪車

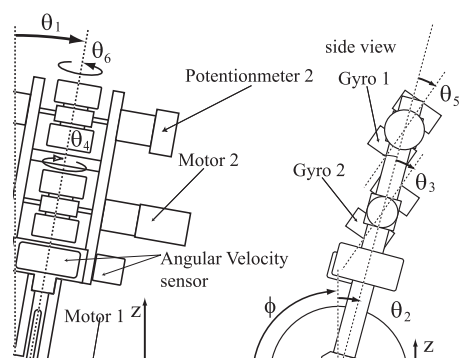


図 7.4: 一輪車の正面図と側面図

だ。ジャイロ内部には、8000[rpm] の速度で高速回転するモータが内部に内蔵してある。

また、各物理パラメータの定義は以下の通りだ。 $S_1 = \dot{\theta}_4, S_2 = \dot{\theta}_6$ : ジャイロフライホイールの角速度 (8000rpm に固定)、 $I_{xi}, I_{yi}, I_{zi}$ :  $i$  番目リンクのそれぞれの軸に関する慣性モーメント、 $D_i$ :  $i$  番目ジョイントの粘性摩擦係数、 $\tau_i$ :  $i$  番目モータのトルク。さらに、記号  $I_{xij} = I_{xi} + I_{xj}$  が用いられる。

### 7.3.2 ジャイロアクチュエータ

図 7.5 に示すように、 $z$  まわりに速度  $\omega_z$  で回転しているフライホイールを  $y$  軸まわりに速度  $\omega_y$  で回転させると、 $x$  軸方向にトルク

$$\tau = -I_z \omega_z \omega_y \quad (7.20)$$

が生じる。このトルク  $\tau$  がジャイロモーメントと呼ばれ、横方向の姿勢安定化に寄与するものだ。ピッチ角が ( $x$  軸に沿う) が  $\theta$  なので、 $x$  軸に沿った横方向のトルク成分  $\tau_{roll}$  は

$$\tau_{roll} = -I_z \omega_z \cos \theta \omega_y = -R(\theta) \omega_y \quad (7.21)$$

で与えられる。その中、 $R(\theta) = I_z \omega_z \cos \theta$  がジャイロモーメント係数と呼ばれる。明らかに、 $|R(\theta)|$  (よって  $|\tau_{roll}|$ ) が  $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  の減少関数だ。

フライホイールの回転速度  $\omega_z$  を上げれば大きいトルクを作れる。 $\omega_y$  はトルク  $\tau$  を制御するために用いられる。フライホイールが傾いた姿勢では、トルク  $\tau$  にヨー成分 (本体を  $z$  軸周りに回転させるトルク成分)  $\tau_{yaw} = -I_z \omega_z \omega_y \sin \theta$  を持つ (図 7.5)。この成分を打ち消しヨー運動を抑えるために、逆回転する一対の同様なジャイロを用いている。なお、各フライホイールの角速度は関係式  $\omega_{z1} = -\omega_{z2}$  および  $\omega_{y1} = -\omega_{y2}$  を満足する。 $\theta_3(0) = \theta_5(0) = 0$  ならば  $\theta_3(t) = -\theta_5(t)$  がすべての  $t \geq 0$  について成立する。よって、ヨー成分が打ち消され、純粋に横方向のトルクが得られる。

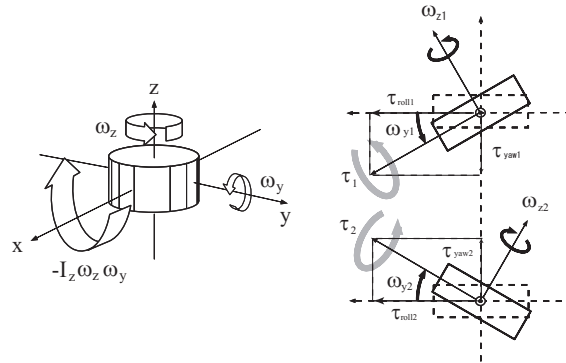


図 7.5: ジャイロモーメント (左) ヨールトルクの打ち消し (右)

### 7.3.3 運動方程式

車輪が滑らない、本体がヨー運動しないと仮定したとき、Lagrange の運動方程式より以下の非線形モデルを導出できる [1, 2]。

$$\tau_1 = J_0 \ddot{\phi} + J_{02}(\theta_2) \ddot{\theta}_2 - C_{22}(\theta_2) \dot{\theta}_2^2 + D_1(\dot{\phi} - \dot{\theta}_2) \quad (7.22)$$

$$0 = J_1(\theta_2, \theta_3, \theta_5) \ddot{\theta}_1 + C_{12}(\theta_2, \theta_3, \theta_5) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + C_{13}(\theta_2, \theta_3) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 + C_{15}(\theta_2, \theta_5) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_5 + R_1(\theta_2, \theta_3)(\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) + R_2(\theta_2, \theta_5)(\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_5) - G_1(\theta_1, \theta_2) \quad (7.23)$$

$$-\tau_1 = J_{02}(\theta_2) \ddot{\phi} + J_2 \ddot{\theta}_2 + I_{y34} \ddot{\theta}_3 + I_{y56} \ddot{\theta}_5 - \frac{1}{2} C_{12}(\theta_2, \theta_3, \theta_5) \dot{\theta}_1^2 - [R_1(\theta_2, \theta_3) + R_2(\theta_2, \theta_5)] \dot{\theta}_1 - G_2(\theta_1, \theta_2) - D_1(\dot{\phi} - \dot{\theta}_2) \quad (7.24)$$

$$\tau_2 = I_{y34}(\ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_3) - R_1(\theta_2, \theta_3) \dot{\theta}_1 - \frac{1}{2} C_{13}(\theta_2, \theta_3) \dot{\theta}_1^2 + D_3 \dot{\theta}_3 \quad (7.25)$$

$$\tau_3 = I_{y56}(\ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_5) - R_2(\theta_2, \theta_5) \dot{\theta}_1 - \frac{1}{2} C_{15}(\theta_2, \theta_5) \dot{\theta}_1^2 + D_5 \dot{\theta}_5. \quad (7.26)$$

この非線形モデルは非常に複雑で、しかもたくさんのパラメータを持つ。このまま直接フィードバック制御を設計しようとすると、これらのパラメータをすべて同定しなければならない。しかし、次に示すように線形近似モデルではパラメータの数が少なくなる。

ちなみに、非線形係数の内後の線形近似モデルに現れるものだけを示すと、以下ようになる。

$$J_{02}(\theta_2) = J_{02} \cos \theta_2, \quad G_1(\theta_1, \theta_2) = G_1(\theta_2) \sin \theta_1, \quad G_2(\theta_1, \theta_2) = G_2 \cos \theta_1 \sin \theta_2$$

$$R_1(\theta_2, \theta_3) = I_{z4} S_1 \cos \theta_{23}, \quad R_2(\theta_2, \theta_5) = I_{z6} S_2 \cos \theta_{25}.$$



表 7.1: 同定したパラメータ

$R_1$	$6.45 \times 10^{-2} [\text{kg m}^2/\text{s}]$
$R_2$	$-6.45 \times 10^{-2} [\text{kg m}^2/\text{s}]$
$J_0$	$1.13 \times 10^{-2} [\text{kg m}^2]$
$J_1$	$1.56 \times 10^{-1} [\text{kg m}^2]$
$J_2$	$7.64 \times 10^{-2} [\text{kg m}^2]$
$J_{02}$	$2.65 \times 10^{-2} [\text{kg m}^2]$
$I_{y34}$	$2.17 \times 10^{-4} [\text{kg m}^2]$
$I_{y56}$	$2.21 \times 10^{-4} [\text{kg m}^2]$
$G_1$	$6.40 \times 10^0 [\text{kg m}^2/\text{s}^2]$
$G_2$	$3.99 \times 10^0 [\text{kg m}^2/\text{s}^2]$
$D_1$	$7.45 \times 10^{-2} [\text{kg m}^2/\text{s}]$
$D_2$	$2.74 \times 10^{-4} [\text{kg m}^2/\text{s}]$
$D_3$	$2.02 \times 10^{-4} [\text{kg m}^2/\text{s}]$

が必要だ。すると、 $(\theta_3, \theta_5)$  の動作範囲が必然的に広がる。実際、その範囲は  $\pm\pi/4$  [rad] に及ぶ。すると、式

$$R_1(\theta_2, \theta_3) = R_1 \cos(\theta_2 + \theta_3), \quad R_2(\theta_2, \theta_5) = R_2 \cos(\theta_2 + \theta_5),$$

より、以上の二つの項が大きく変化するため、設計時に考慮する必要がある。そこで、この二つのパラメータを公称値と変化分に分けて

$$R_1(\theta_2, \theta_3) = R_1 + \Delta_{R_1} \delta_1(t), \quad R_2(\theta_2, \theta_5) = R_2 + \Delta_{R_2} \delta_2(t)$$

に書く。変化分  $\delta_1(t)$ ,  $\delta_2(t)$  は正規化した時変不確かさで  $[-1, 0]$  の範囲で値を取る。 $\Delta_{R_1}$ ,  $\Delta_{R_2}$  は変動幅であり、 $\theta_3$ ,  $\theta_5$  の動作範囲が決まれば計算できる。さらに、 $\theta_2 \approx 0$  に注意すると

$$\delta_1(t) \approx \frac{R_1}{\Delta_{R_1}} (\cos(\theta_3(t)) - 1) \quad (7.29)$$

$$\delta_2(t) \approx \frac{R_2}{\Delta_{R_2}} (\cos(\theta_5(t)) - 1). \quad (7.30)$$

の近似が成り立つ。すなわち、 $\delta_1(t)$ ,  $\delta_2(t)$  が  $\theta_3$ ,  $\theta_5$  から求めることができる。これをスケジュールパラメータとして用いることにする。

線形近似モデルの定数パラメータ  $R_1$ ,  $R_2$  を  $R_1(\theta_2, \theta_3)$ ,  $R_2(\theta_2, \theta_5)$  で置き換えると、LPV モデル

$$\mathbf{E}\dot{\mathbf{x}} = \left( \mathbf{A} + \sum_{i=1}^2 \delta_i(t) \mathbf{A}_i \right) \mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (7.31)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \quad (7.32)$$

ただし

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{O} & & \mathbf{O} & & \\ & 0 & -\Delta_{R_1} & -\Delta_{R_1} & 0 \\ \mathbf{O} & \Delta_{R_1} & 0 & 0 & 0 \\ & \Delta_{R_1} & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{O} & & \mathbf{O} & & \\ & 0 & -\Delta_{R_2} & 0 & -\Delta_{R_2} \\ \mathbf{O} & \Delta_{R_2} & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \Delta_{R_2} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

が得られる。

第??章の方法で変動  $\delta_1, \delta_2$  を引き出せば、LPV モデルは次の LFT 形式に書くことができる

$$\mathbf{y} = \mathcal{F}_u(\mathbf{G}_0(s), \Delta)\mathbf{u}. \quad (7.33)$$

公称プラント  $\mathbf{G}_0(s)$  は

$$\mathbf{G}_0(s) = \left[ \begin{array}{c|cc} \mathbf{E}^{-1}\mathbf{A} & \mathbf{E}^{-1}\mathbf{L} & \mathbf{E}^{-1}\mathbf{B} \\ \hline \mathbf{W} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right] \quad (7.34)$$

であり、 $\Delta$  は時変パラメータの対角行列を表す。

$$\Delta = \text{diag}(\delta_1 \mathbf{I}_2, \delta_2 \mathbf{I}_2), \|\Delta\| \leq 1, \Delta \in \mathbb{R}^{4 \times 4}. \quad (7.35)$$

### 7.3.6 制御設計

ここで、前節で説明した Packard[4] のゲインスケジュール法を利用して、ゲインスケジュール制御系を設計する。

一般化プラント 一輪車には外部からの力外乱が作用する。そこで、設計時  $\ddot{\phi}$  (前後方向) と  $\ddot{\theta}_1$  (横方向) にそれぞれ働く力外乱を想定した。よって、外乱項  $\mathbf{H}\mathbf{d}$  ( $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^2$ ) を  $\mathbf{E}\dot{\mathbf{x}}$  に加える。

$$\mathbf{E}\dot{\mathbf{x}} = \left( \mathbf{A} + \sum_{i=1}^2 \delta_i(t) \mathbf{A}_i \right) \mathbf{x} + \mathbf{H}\mathbf{d} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

ただし

$$\mathbf{H} = [\mathbf{O}_{2 \times 5} \quad \mathbf{I}_{2 \times 2} \quad \mathbf{O}_{2 \times 3}]^T$$



評価出力は次の考察に基づいて決定した。前後方向の目標値追従のために  $\phi - r$ 、横方向のバランスのために  $(\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2)$  を評価する。そして、横方向安定化トルクは  $(\cos \theta_3, \cos \theta_5)$  に比例するため、より大きいトルクを発生できるようにするために定常時に  $(\theta_3, \theta_5)$  を小さくしなければならない。よって、これも評価する。さらに、角速度センサは圧電型でジャイロ振動による高周波成分を持つ。この雑音も外乱として評価する。最後に、制御入力  $u$  を抑えるために評価出力に入れる。

この指針で設定した一般化プラント  $G_p(s)$  は図 7.6 になる。その中、 $w_p, z_p \in \mathbb{R}^4$  は時変パラメータブロックの入出力、 $r \in \mathbb{R}$  は車輪回転角  $\phi$  の目標値、 $n \in \mathbb{R}$  はセンサ雑音、 $e_u \in \mathbb{R}^3$  は入力評価信号だ。

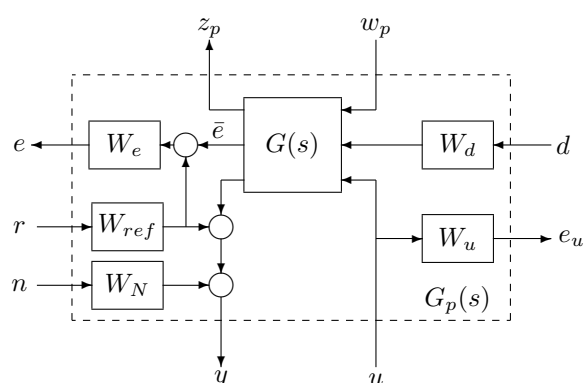


図 7.6: 一般化プラント

評価信号ベクトルは

$$\bar{e} = [\phi, \theta_3, \theta_5, \dot{\phi}, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2]^T = \mathbf{M}\mathbf{x}$$

で、伝達行列  $\mathbf{G}(s)$  は次式だ。

$$\mathbf{G}(s) = \left[ \begin{array}{c|ccc} \mathbf{E}^{-1}\mathbf{A} & \mathbf{E}^{-1}\mathbf{L} & \mathbf{E}^{-1}\mathbf{H} & \mathbf{E}^{-1}\mathbf{B} \\ \hline \mathbf{W} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{M} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right] \quad (7.36)$$

重み関数行列には次の対角構造を持たせた。対角構造にしたのは、チューニ

ングする重み関数の数を減らすためだ。

$$\mathbf{W}_e = \text{diag} \left[ W_\phi \quad W_{\theta_3} \quad W_{\theta_5} \quad W_{\theta_1} \quad W_{\theta_2} \right] \quad (7.37)$$

$$\mathbf{W}_u = \text{diag} \left[ W_{\tau_1} \quad W_{\tau_2} \quad W_{\tau_3} \right] \quad (7.38)$$

$$\mathbf{W}_d = \text{diag} \left[ W_{d_1} \quad W_{d_2} \right] \quad (7.39)$$

$$\mathbf{W}_{\text{ref}} = \left[ -W_r \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right]^T \quad (7.40)$$

$$\mathbf{W}_N = \left[ 0 \quad 0 \quad 0 \quad W_n \quad 0 \right]^T \quad (7.41)$$

全体のシステムは

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}_p \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} = \mathcal{F}_u(\mathbf{G}_p(s), \Delta) \begin{bmatrix} \mathbf{d}_p \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} \quad (7.42)$$

にまとめられる。ただし、 $\mathbf{d}_p = [\mathbf{d}^T, r, n]^T$ ,  $\mathbf{e}_p = [\mathbf{e}^T, \mathbf{e}_u^T]^T$ 。

性能レベル  $\gamma$  について、設計は誘導ノルム  $\mathcal{L}_2$  が

$$\sup_{0 \neq \mathbf{d} \in \mathcal{L}_2} \frac{\|\mathbf{e}_p\|_{\mathcal{L}_2}}{\|\mathbf{d}_p\|_{\mathcal{L}_2}} < \gamma \quad (7.43)$$

想定されるすべての  $\Delta(t)$  に対して満たすようにゲインスケジュール制御器を設計する。小ゲイン方法でこの問題を扱うとき、保守性が強いので、次の定数スケール小ゲイン条件に基づいて設計を行うことにする。

$$\|\mathbf{S}^{-1} \mathcal{F}_l(\mathbf{G}_{gs}, \mathbf{K}) \mathbf{S} \mathbf{H}_\gamma\|_\infty < 1 \quad (7.44)$$

ここに、 $\Delta_p (\|\Delta_p\|_\infty \leq 1)$  は (7.43) 式の外乱抑制仕様を代表する性能ブロックだ。また、 $\mathbf{H}_\gamma = \text{diag}(\mathbf{I}_{21}, \mathbf{I}/\gamma)$  と  $\mathbf{S}$  は  $\text{diag}(\Delta, \Delta, \Delta_p)$  と可換の定数スケール行行列で

$$\mathbf{H}_\gamma = \text{diag}(H_1, H_2), \quad \mathbf{S} = \text{diag}(S_1, S_2, sI_2)$$

のブロック対角構造を有する。なお、各ブロックは  $H_i, S_j \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  の行列だ。

### 7.3.7 重みと制御器

ステップ状の目標値を想定して、目標値モデル  $W_\phi$  を近似積分器にした。同様に、外乱モデル  $W_{\theta_3}$ ,  $W_{\theta_5}$  も近似積分器とした。一方、入力の高周波成分を抑えるためにその重みを高域通過フィルタにした。他の重みは定数の調節ゲインとした。

各重みのゲインは試行錯誤を経て、次のように決めた。

$$\begin{aligned} W_\phi &= \frac{0.2s + 4}{s + 0.0001}, \quad W_{\theta_3} = W_{\theta_5} = \frac{0.3s + 3}{s + 0.0001}, \quad W_{\theta_1} = W_{\theta_2} = 0.01 \\ W_{\tau_1} &= \frac{0.5s + 1}{s + 1000} \times 10^3, \quad W_{\tau_2} = W_{\tau_3} = \frac{4s + 40}{s + 2000} \times 10^3 \\ W_{d_1} &= 0.02, \quad W_{d_2} = 0.03, \quad W_r = 0.1, \quad W_n = 0.001. \end{aligned}$$

また、ジャイロの動作範囲を  $|\theta_3|, |\theta_5| \leq \frac{\pi}{4}$  と想定した。対応するジャイロモーメント係数変動の幅は次のように計算される。

$$\Delta_{R_1} = |R_1 \times (\cos \frac{\pi}{4} - 1)| \approx |R_1| \times 0.3, \quad \Delta_{R_2} = |R_2 \times (\cos \frac{\pi}{4} - 1)| \approx |R_2| \times 0.3$$

設計では、性能レベル  $\gamma = 0.961$  が得られた。そのときの制御器は 16 次だ。

$\theta_3, \theta_5 = 0$  (実線)、 $\theta_3, \theta_5 = \frac{\pi}{6}$  (破線)、 $\theta_3, \theta_5 = \frac{\pi}{4}$  (一点破線)、 $\theta_3, \theta_5 = \frac{\pi}{3}$  (+) のときの Bode 線図を調べた結果、信号  $\dot{\theta}_1 \mapsto \tau_1$ ,  $(\phi, \theta_3, \theta_5, \dot{\theta}_2) \mapsto \tau_2$ ,  $(\phi, \theta_3, \theta_5, \dot{\theta}_2) \mapsto \tau_3$  間のゲインに大きな変化が見られた。例として  $\dot{\theta}_1$  から  $\tau_1$  までの伝達関数を図 7.7 に示した。

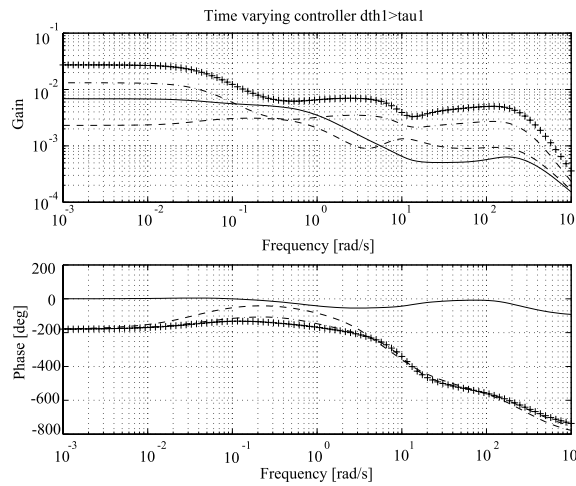


図 7.7: ゲインスケジュール制御器の Bode 線図

### 7.3.8 実験結果

6[ms] のサンプリング周期のもとで双一次変換によって  $K(s)$  を離散化して、RT-Linux 上で C 言語を用いて実装した。以下、三つの制御実験を示す。

姿勢安定化 実験結果は図 7.8 に示される。

外乱抑制 外乱抑制性能を確認するため、手でそれぞれ前後、横方向にパルス状の力を印加した。結果を図 7.9 と 7.10 に示す。図中姿勢が大きく動く時刻は力外乱を加えて時だ。

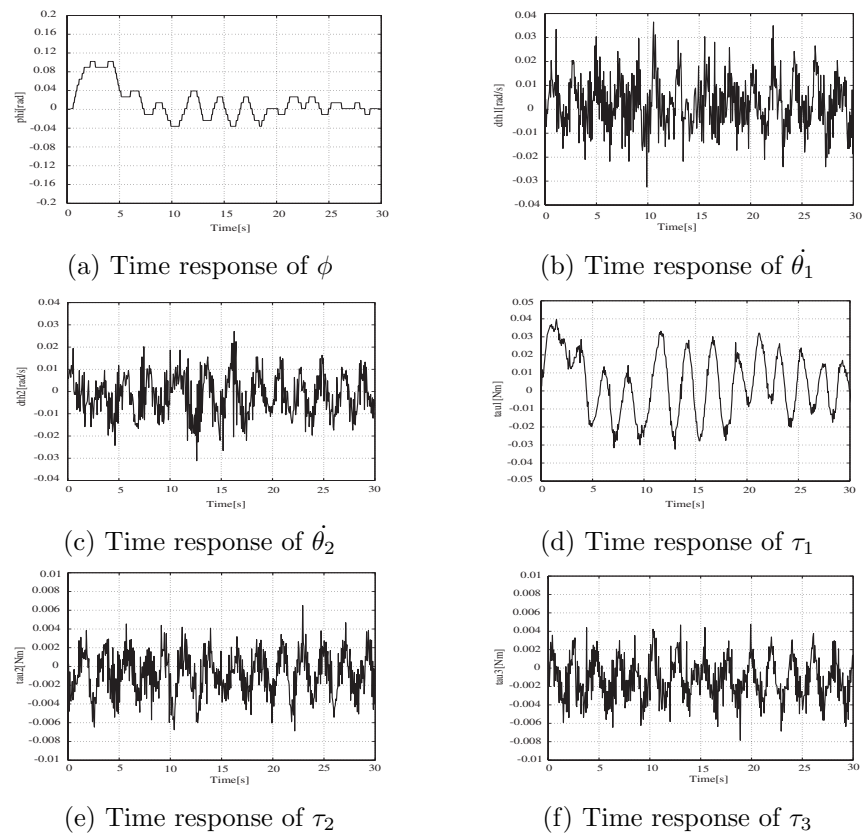


図 7.8: 姿勢安定化実験

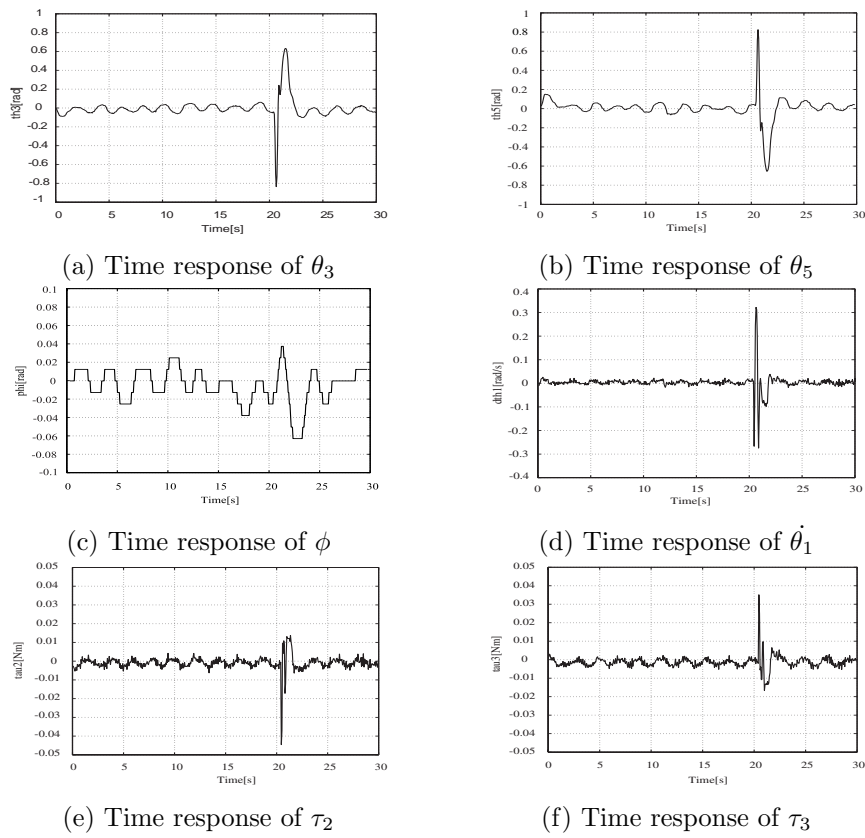


図 7.9: 横方向力外乱の応答

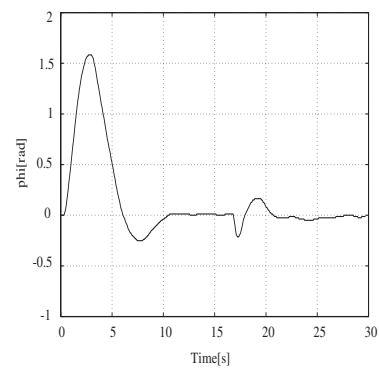
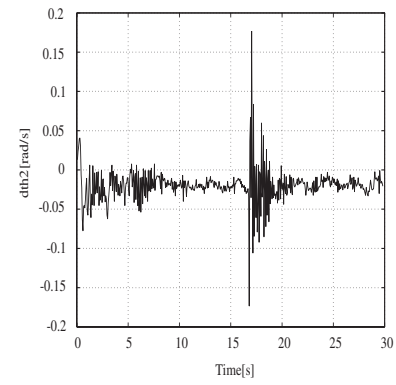
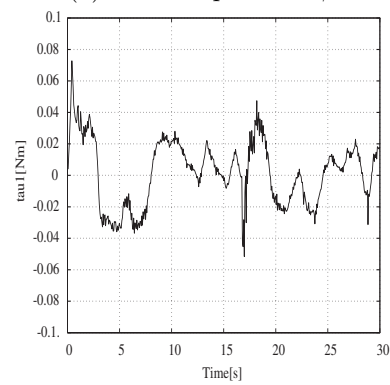
(a) Time response of  $\phi$ (b) Time response of  $\dot{\theta}_2$ (c) Time response of  $\tau_1$ 

図 7.10: 前後方向力外乱の応答

前後方向の目標値追従 一輪車を前進させる実験で用いた  $\phi$  の目標値信号  $r(t)$  を図 7.11(1) に破線で示す。これは 40[cm] の距離に相当する。図 7.11 が実験結果を示している。

以上の実験結果は、設計したゲインスケジュール制御系が有効に働いていることを示している。

## 7.4 アフィン構造モデル

これまで示した非線形システムの LPV モデルから分かるように、制御対象状態方程式の係数行列を時変パラメータに関するアフィン形式にすると、LFT 形式よりも現実のシステムによく合う。そこで、次のアフィン構造モデルを考える。

$$\dot{x} = A(p(t))x + B_1(p(t))d + B_2(p(t))u \quad (7.45)$$

$$z = C_1(p(t))x + D_{11}(p(t))d + D_{12}(p(t))u \quad (7.46)$$

$$y = C_2(p(t))x + D_{21}(p(t))d \quad (7.47)$$

その内、 $(d, z, y)$  はそれぞれ外乱、評価出力と測定出力を表す。また、各係数行列は時変パラメータベクトル  $p(t) \in \mathbb{R}^q$  に関して次のアフィン構造を持つ。

$$A(p) = A_0 + \sum_{i=1}^q p_i(t)A_i \quad (7.48)$$

$$B_1(p) = B_{10} + \sum_{i=1}^q p_i(t)B_{1i}, \quad B_2(p) = B_{20} + \sum_{i=1}^q p_i(t)B_{2i}$$

$$C_1(p) = C_{10} + \sum_{i=1}^q p_i(t)C_{1i}, \quad C_2(p) = C_{20} + \sum_{i=1}^q p_i(t)C_{2i}$$

$$D_{11}(p) = D_{110} + \sum_{i=1}^q p_i(t)D_{11i}, \quad D_{12}(p) = D_{120} + \sum_{i=1}^q p_i(t)D_{12i}$$

$$D_{21}(p) = D_{210} + \sum_{i=1}^q p_i(t)D_{21i}$$

ただし、時変の  $p(t)$  を除けば各行列はすべて既知だ。そして、各時変パラメータは実時間で測定されるものとし、その変化の範囲は

$$p_i(\delta) \in [p_{im}, p_{iM}], \quad i = 1, \dots, q \quad (7.49)$$

であり、事前に入手できるとする。

ゲインスケジュール制御器にも同様なアフィン構造を持たせる。すなわち、制御器の状態方程式を

$$\dot{x}_K = A_K(p(t))x_K + B_K(p(t))y \quad (7.50)$$

$$u = C_K(p(t))x_K + D_K(p(t))y$$

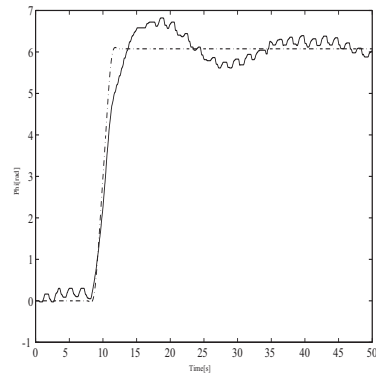
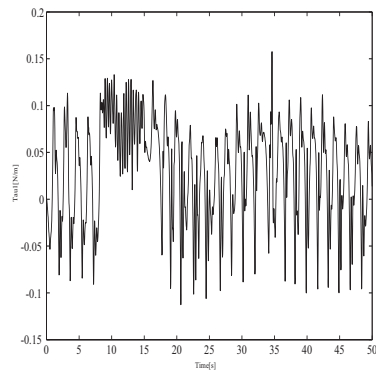
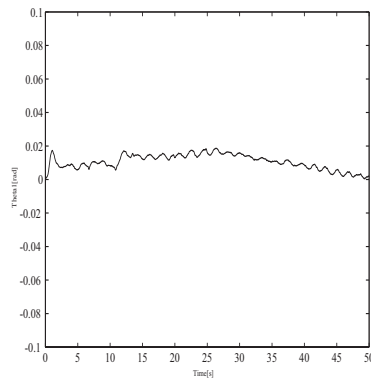
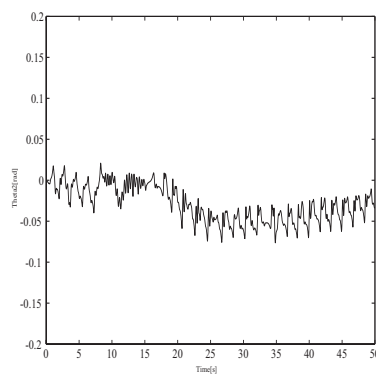
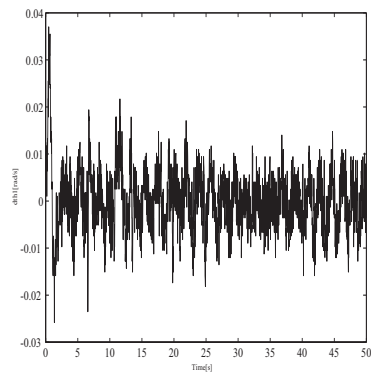
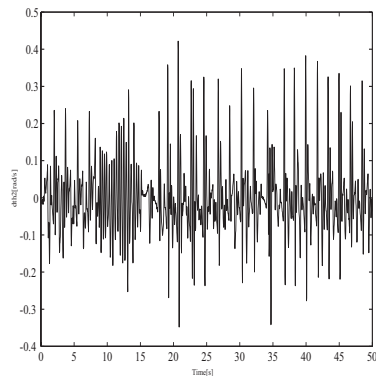
(a) Time response of  $\phi$ (b) Time response of  $\tau_1$ (c) Time response of  $\theta_1$ (d) Time response of  $\theta_2$ (e) Time response of  $\dot{\theta}_1$ (f) Time response of  $\dot{\theta}_2$ 

図 7.11: 前後方向の移動実験



とし、その係数行列を

$$\begin{aligned} A_K(p) &= A_{K0} + \sum_{i=1}^q p_i(t) A_{Ki}, & B_K(p) &= B_{K0} + \sum_{i=1}^q p_i(t) B_{Ki} \\ C_K(p) &= C_{K0} + \sum_{i=1}^q p_i(t) C_{Ki}, & D_K(p) &= D_{K0} + \sum_{i=1}^q p_i(t) D_{Ki} \end{aligned} \quad (7.51)$$

とする。 $p(t)$  を除いて各行列はすべて定数行列だ。

閉ループシステムの状態ベクトルを

$$\xi = \begin{bmatrix} x \\ x_K \end{bmatrix}$$

とするとき、その状態方程式は

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= A_c(p)\xi + B_c(p)d \\ z &= C_c(p)\xi + D_c(p)d \end{aligned} \quad (7.52)$$

となる。ただし、

$$\begin{aligned} A_c(p) &= \begin{bmatrix} A(p) + B_2(p)D_K(p)C_2(p) & B_2(p)C_K(p) \\ B_K(p)C_2(p) & A_K(p) \end{bmatrix} \\ B_c(p) &= \begin{bmatrix} B_1(p) + B_2(p)D_K(p)D_{21}(p) \\ B_K(p)D_{21}(p) \end{bmatrix} \\ C_c(p) &= \begin{bmatrix} C_1(p) + D_{12}(p)D_K(p)C_2(p) & D_{12}(p)C_K(p) \end{bmatrix} \\ D_c(p) &= D_{11}(p) + D_{12}(p)D_K(p)D_{21}(p) \end{aligned} \quad (7.53)$$

本式より明らかなように、 $A_c(p)$  など一般に必ずしも時変パラメータベクトル  $p(t)$  に関してアフィンにならない。しかし、設計を実行可能にするには、これら閉ループ系の係数行列を  $p(t)$  に関してアフィンにする必要がある。これは、基本的に制御対象係数行列の  $p(t)$  に関する構造に応じて制御器の係数行列に制限を加えることで実現される。

例えば、行列  $(B_2(p), C_2(p))$  が共に  $p(t)$  に依存するとき、 $D_K = 0$  とした上、 $(B_K, C_K)$  を定数行列にしなければならない。(ほかのケース：宿題)

ゲインスケジュール制御をおこなう際、このアフィンモデルは以下の優れた性質を持つ。

1. 実システムとの相性がきわめてよい。また、アフィンモデルとポリトップモデルは等価なので、制御仕様は頂点で満たされればよく、数値設計が非常に楽だ。
  2. Lyapunov 法が適用でき、実変動に対して小ゲイン条件より保守性が弱い。
  3. 共通 Lyapunov 関数法を用いれば、多目的制御設計が容易にできる。
- 次節では、事例を挙げてゲインスケジュール制御系の設計を説明する。

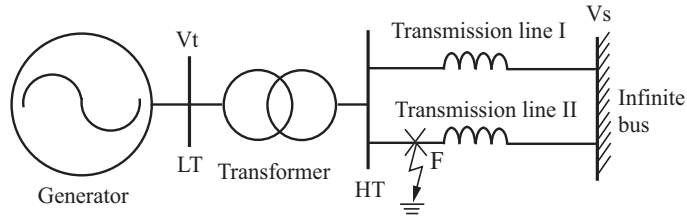


図 7.12: 一機対無限大母線電力系統

## 7.5 設計事例：電力安定化制御

3.3.1 節で説明したように、図 7.12 の非線形システムである電力系統は三つの時変パラメータを持つ LPV システムに等価変化できる。しかし制御系設計する際、時変パラメータが不確かさとして扱われるため、その数が多いと制御性能を上げにくい。そこで、本節ではまず二つのパラメータしか持たない別の LPV モデルを導出してから、ゲインスケジュール制御器の設計を説明する。

### 7.5.1 2-パラメータ LPV モデル

2-パラメータ LPV モデルを構成するアイデアは、内部過渡電圧  $E'_q$  にある非線形項を消すように励磁電圧に予め非線形フィードバック

$$V_f = \bar{V}_f - \frac{x_d - x'_d}{x'_{d\Sigma}} V_s \cos \delta \quad (7.54)$$

を施しておくことだ。すると、 $E'_q$  の動特性は線形に変わる。

$$\dot{E}'_q = \frac{1}{T_{d0}} \left\{ -\frac{x_{d\Sigma}}{x'_{d\Sigma}} E'_q + \frac{x_d - x'_d}{x'_{d\Sigma}} V_s \cos \delta + V_f \right\} = \frac{1}{T_{d0}} \left\{ -\frac{x_{d\Sigma}}{x'_{d\Sigma}} E'_q + \bar{V}_f \right\} \quad (7.55)$$

次に、新しい電圧入力  $\bar{V}_f$  の偏差を

$$u = \bar{V}_f - \bar{V}_{f0}$$

と置く。ただし、 $\bar{V}_{f0} = V_{f0} + \frac{x_d - x'_d}{x'_{d\Sigma}} V_s \cos \delta_0$ 。以上で二つの時変パラメータしか持たない LPV モデルが得られる。この 2-パラメータ LPV モデルは (3.33) 式とまったく同じ形式

$$\begin{cases} \dot{x} = A(p)x + B_1 d + B_2 u \\ y = C_2 x \end{cases} \quad (7.56)$$

を持つ。唯一の違いは時変パラメータが

$$p_1(\delta) = \frac{k_1(\sin \delta - \sin \delta_0) - k_2(\sin 2\delta - \sin 2\delta_0)}{\delta - \delta_0}, \quad p_2(\delta) = \sin \delta$$

の二つだけになり、 $A(p)$  が

$$A(p) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ c_1 p_1(\delta) & c_2 & c_3 p_2(\delta) \\ 0 & 0 & c_5 \end{bmatrix} \quad (7.57)$$

に変わったことだ。

### 7.5.2 多目的制御設計

以上に述べた二つの LPV モデルにおいて、係数行列  $A(p)$  は時変パラメータベクトル  $p(\delta)$  に関してアフィンだ。

$$A(p) = A_0 + \sum_{i=1}^q p_i A_i, \quad q = 2 \text{ or } 3 \quad (7.58)$$

相差点  $\delta$  を測れば、 $p(\delta)$  を実時間で計算できる。また、 $\delta$  の稼働範囲を想定しておけば対応する  $p_i$  ( $i = 1, \dots, q$ ,  $q = 2 \text{ or } 3$ ) の範囲も見積もることができる。ここで、パラメータの変動範囲を

$$p_i(\delta) \in [p_{im}, p_{iM}], \quad i = 1, \dots, q, \quad q = 2 \text{ or } 3. \quad (7.59)$$

とする。

設計指針は、優れた安定性を保証し、大きい擾乱もしくは系統事故に対して満足のいく過渡応答性能を実現することだ。また、励磁電圧の動作範囲が狭く、簡単に飽和してしまうから、設計時にはこのことを意識する必要がある。

#### 出力フィードバックゲインスケジュール

閉ループ系 (7.52) においては、係数行列が

$$A_{cl}(p) = \begin{bmatrix} A(p) + B_2 D_K(p) C_2 & B_2 C_K(p) \\ B_K(p) C & A_K(p) \end{bmatrix}, \quad B_{cl} = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$A_{cl}(p)$  の式から分かるように、ゲインスケジュール制御器の係数行列すべてに時変パラメータ  $p(t)$  を入れても  $p(t)$  に関してアフィンになる。設計問題は制御器係数行列に関する (7.51) 式において、定数行列  $A_{Ki}$ ,  $B_{Ki}$ ,  $C_{Ki}$  および  $D_{Ki}$  ( $i = 0, \dots, q$ ,  $q = 2 \text{ or } 3$ ) を求めることになる。

スケジュールパラメータ  $p_i(\delta)$  が (7.59) の集合から値を取るとき、2-パラメータの場合  $p(\delta)$  は四つの頂点を持つポリトッブを形成する。

$$\theta_1 = \begin{bmatrix} p_{1m} \\ p_{2m} \end{bmatrix}, \quad \theta_2 = \begin{bmatrix} p_{1M} \\ p_{2M} \end{bmatrix}, \quad \theta_3 = \begin{bmatrix} p_{1m} \\ p_{2M} \end{bmatrix}, \quad \theta_4 = \begin{bmatrix} p_{1M} \\ p_{2m} \end{bmatrix}$$

同様に、3-パラメータの場合  $p(\delta)$  は八つの頂点を持つポリトッブになる。

極の領域配置と  $L_2$  ゲイン最小化設計

同期発電機のローター速度系において減衰がきわめて弱い。減衰を補うためにまず閉ループ系の極を適切に設定した円盤内に入るように設計を試みた。しかし、シミュレーションで確認した結果、送電線短絡事故の状況下で有効電力とローター速度の減衰は十分ではなかった。その理由として考えられるのは、励磁電圧の飽和のせいで極の領域配置で意図した減衰を実現できなかった。実際、欲を虚軸から遠ざけると設計されたシステムは事故に対してより脆弱になる。そしてその時の応答をよく観察すると、相差角  $\delta$  最初に発散して、他の状態の発散を引き起こしたことが分かった。

そこで、極の領域配置に加え、有効電力外乱  $d$  から  $\delta$  までの閉ループ系の  $L_2$  ゲインも最小に抑えるようにする。評価出力を

$$z = x_1 = C_1 x, \quad C_1 = [1 \ 0 \ 0] \quad (7.60)$$

とし、与えられた  $\gamma > 0$  について

$$\sup_{\|d\|_2 \neq 0} \frac{\|z\|_2}{\|d\|_2} \leq \gamma \quad (7.61)$$

とるように制御器を設計する。この多目的制御問題の一般化プラントは

$$G(s) = \left[ \begin{array}{c|cc} A(p) & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & 0 & 0 \\ C_2 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (7.62)$$

となる。この例題において、制御器のすべての係数行列にゲインスケジュールパラメータを持たせてよい。

## LMI 条件

第6章で述べたように  $A_{cl}(p)$  固有値がすべて円心  $(-c, 0j)$  ( $c > 0$ ) 半径  $r > 0$  の円盤内に存在するための条件は、次式を満たす行列  $X_D > 0$  が存在することだ。

$$\left[ \begin{array}{cc} -rX_D & A_{cl}(p)X_D + cX_D \\ X_D A_{cl}^T(p) + cX_D & -rX_D \end{array} \right] < 0 \quad (7.63)$$

しかも、この条件は想定するすべての  $p(\delta)$  に対して成り立つ必要がある。

そして、有界実補題によると  $L_2$  ゲイン条件 (7.61) が成り立つためには、すべての  $p(\delta)$  について

$$\left[ \begin{array}{ccc} X_\infty A_c^T(p) + A_c(p)X_\infty & B_{cl} & X_\infty C_c^T \\ B_c^T & -\gamma I & D_c^T \\ C_c X_\infty & D_c & -\gamma I \end{array} \right] < 0 \quad (7.64)$$

を満たす  $X_\infty > 0$  が存在しなければならない。

多目的制御の考え方に従い、上記条件式の解に拘束条件

$$X_D = X_\infty = X > 0 \quad (7.65)$$

を加える。そして、変数変換によって (7.63) 式と (7.64) 式を新しい変数  $R, S$  および  $\mathbb{A}(p), \dots, \mathbb{C}(p)$  に関する以下の LMI に等価変換する (これらの行列も  $p$  に関してアフィンであることに注意)

$$\Theta_y = \begin{bmatrix} R & I \\ I & S \end{bmatrix} > 0 \quad (7.66)$$

$$\begin{bmatrix} -r\Theta_y & c\Theta_y + \Phi(\theta_j) \\ c\Theta_y + \Phi(\theta_j)^T & -r\Theta_y \end{bmatrix} < 0 \quad (7.67)$$

$$\begin{bmatrix} \Psi_{11}(\theta_j) & \Psi_{21}(\theta_j)^T \\ \Psi_{21}(\theta_j) & \Psi_{22}(\theta_j) \end{bmatrix} < 0 \quad (7.68)$$

ただし、 $j = 1, \dots, s$ ,  $s = 4$  or  $8$  であり、パラメータ依存の各行列はそれぞれ

$$R = R^T \in \mathbb{R}^{3 \times 3}, S = S^T \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \quad (7.69)$$

$$\Phi(\cdot) = \begin{bmatrix} A(\cdot)R + B_2\mathbb{C}(\cdot) & A(\cdot) + B_2D_K(\cdot)C_2 \\ \mathbb{A}(\cdot) & SA(\cdot) + \mathbb{B}(\cdot)C_2 \end{bmatrix} \quad (7.70)$$

$$\Psi_{11}(\cdot) = \begin{bmatrix} \text{He}(A(\cdot)R + B_2\mathbb{C}(\cdot)) & B_1 \\ B_1^T & -\gamma I \end{bmatrix} \quad (7.71)$$

$$\Psi_{21}(\cdot) = \begin{bmatrix} \mathbb{A}(\cdot) + (A(\cdot) + B_2D_K(\cdot)C_2)^T & SB_1 \\ C_1R & 0 \end{bmatrix} \quad (7.72)$$

$$\Psi_{22}(\cdot) = \begin{bmatrix} \text{He}(SA(\cdot) + \mathbb{B}(\cdot)C_2) & C_1^T \\ C_1 & -\gamma I \end{bmatrix} \quad (7.73)$$

となっている。ここで、記号の簡略化のため、パラメータポリトップの頂点  $(\theta_j)$  を  $(\cdot)$ 、 $\Lambda + \Lambda^T$  を  $\text{He}(\Lambda)$  で代表した。

一旦  $R, S, \gamma, \mathbb{A}_i, \mathbb{B}_i, \mathbb{C}_i$  と  $D_{Ki}(i = 0, \dots, q, q = 2$  or  $3)$  が求まったら、制御器の係数行列  $A_{Ki}, B_{Ki}, C_{Ki}$  と  $D_{Ki}(i = 0, \dots, q, q = 2$  or  $3)$  はこれらから一意に決定される。

以上をまとめると、解くべきは次の最適化問題だ。

$$\begin{aligned} & \text{minimize } \gamma \\ & \text{subject to } (7.66), (7.67), (7.68) \end{aligned} \quad (7.74)$$

### 7.5.3 シミュレーション

以上で設計したゲインスケジュール制御器を用いて、一機対無限大母線電力システムに対して適用する。シミュレーションでは、励磁機を以下の1次伝達関数

$$\frac{K_A}{1 + sT_A}$$

およびリミッタを用いてモデル化した(図7.14と7.18を参照)。

過渡安定性のテストとして、図Fig.3.11に示されたように、発電機出力端で起きる三相短絡事故を想定した。これは最悪の事故に相当する。相角度  $\delta$  の測定には時間がかかるので、この時間遅れの影響を考慮するために2[msec]の時間遅れを入れた。いま想定している短絡事故では、 $V_s = 0$  となるため有効電力  $P_e$  も零となる。つまり、事故中に電力は母線を通して送電されない。

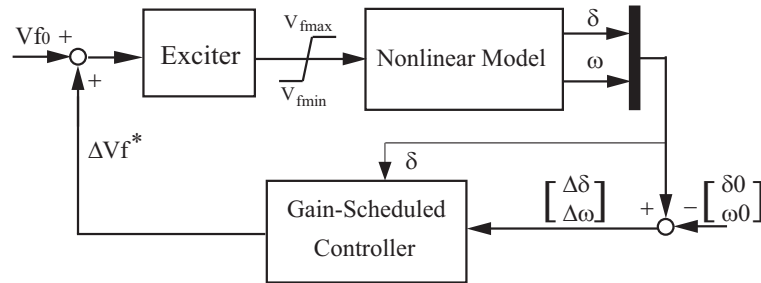


図 7.13: ゲインスケジュール制御のブロック線図

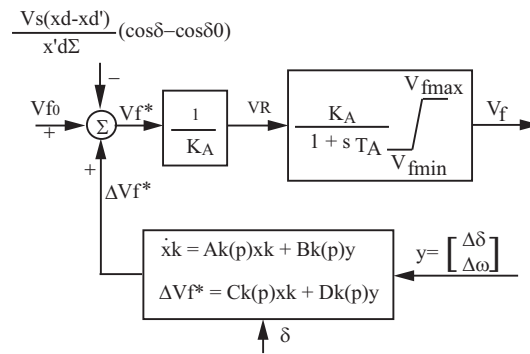


図 7.14: 2p-LPV ゲインスケジュール制御の詳細図

想定した事故の時系列 (永久事故)

Step 1 事故が起きる前まで電力システムが定常状態にあり、 $t = 0.0[\text{sec}]$  に事故が起きる;

Step 2  $t_F$ [sec] にブレーカを開き短絡した線路を遮断する；

Step 3 系統が事故後状態に入る。

非線形電力系統のパラメータは [20] に準拠した (p.864, Example 13.2):

$$D = 0.15, M = 7.00, T_{d0} = 8.00, V_s = 0.995$$

$$x_d = 1.81, x'_d = 0.30, x_{l1} = 0.5, x_{l2} = 0.93, x_T = 0.15$$

動作点は

$$\delta_0 = 0.8807 (\approx 50.5^\circ), \omega_0 = 314, E'_{q0} = 1.3228, V_{f0} = 2.6657$$

だ。また、励磁機のパラメータは [16] によった:

$$T_A = 0.05, K_A = 50$$

励磁電圧に対する物理的制約は以下のように設定した [20]。

$$0.0 \text{ [pu]} \leq V_f(t) \leq 5.0 \text{ [pu]}$$

さらに、設計時に  $\delta$  の動作範囲を  $[40^\circ, 90^\circ]$  と想定し、短絡線路遮断時刻を  $t_F = 0.168$ [sec] とした。

### 異なる LPV モデルの比較

まず、2p-LPV モデルと 3p-LPV モデルで設計した制御系の比較を行う。比較に際し、設計とシミュレーションを繰り返しながらそれぞれ最もよい性能が出るように設計パラメータの円盤をチューニングした。その結果、2p-LPV の場合円心  $(-8, 0j)$  半径  $r = 6$  と決めた。一方、3p-LPV の場合円心  $(-7.8, 0j)$  半径  $r = 5.8$  となった。比較の結果は図 7.15 に示される。明らかに、2p-LPV の方が 3p-LPV より振動減衰が速い。

一般に、事故後送電線のリアクタンス  $x_L$  が増加するから電力曲線が下がる。故に、相角  $\delta$  は  $\delta_0$  より大きい値に収束する。図 7.15 では、 $\delta_0 = 50.5^\circ$  に対し  $\delta$  が  $51.7^\circ$  に収束したが、さほど増えていない。その理由は、内部過渡電圧  $E'_q$  が  $1.466$ [p.u.] 収束し、 $E'_{q0} = 1.3228$ [p.u.] より大幅に増加したので、電力曲線を持ち上げたからだ。

### 2p-LPV ゲインスケジュール制御のロバスト性

大規模な事故が起きたとき、送電線リアクタンス  $x_L$  のみならず、母線電圧  $V_s$  も大きく変化する [31]。設計時にはこれらパラメータの変化を想定していないので、シミュレーションでそのロバスト性を確認する必要がある。そこ

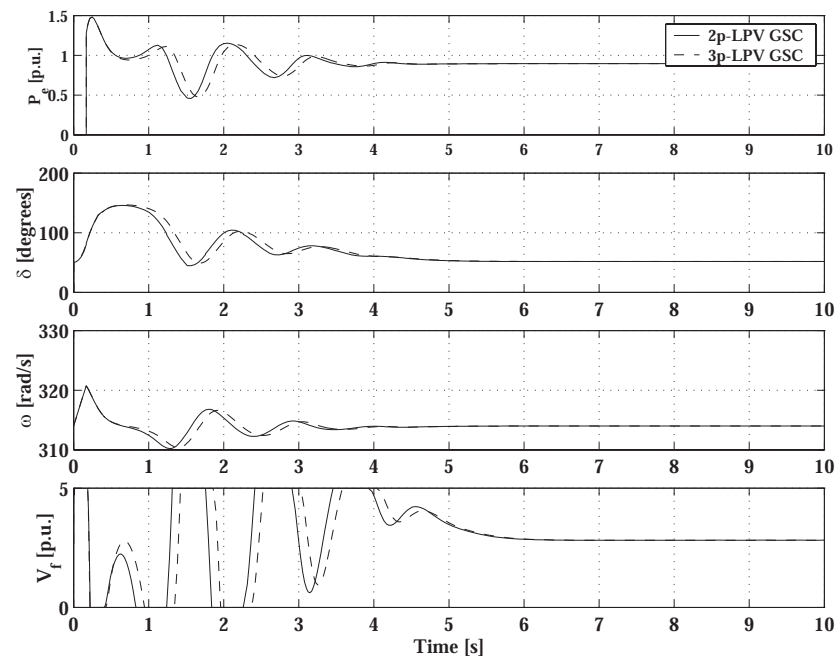


図 7.15: 2p-LPV ゲインスケジュール制御と 3p-LPV ゲインスケジュール制御の比較



で、パラメータ変動に対するロバスト性を調べるために、 $V_s$ 、 $x_L$  と  $x_T$  について最大 10% の変動を想定してシミュレーションを行った。ここで、 $\Delta V_s$ 、 $\Delta x_L$  と  $\Delta x_T$  はそれぞれ  $V_s$ 、 $x_L$  と  $x_T$  の変動分を表す。シミュレーションの結果を図 7.16 に示す。この図から分かるように、パラメータ変動した場合応答の質が多少劣るものの、整定時間はほぼ変わっていない。

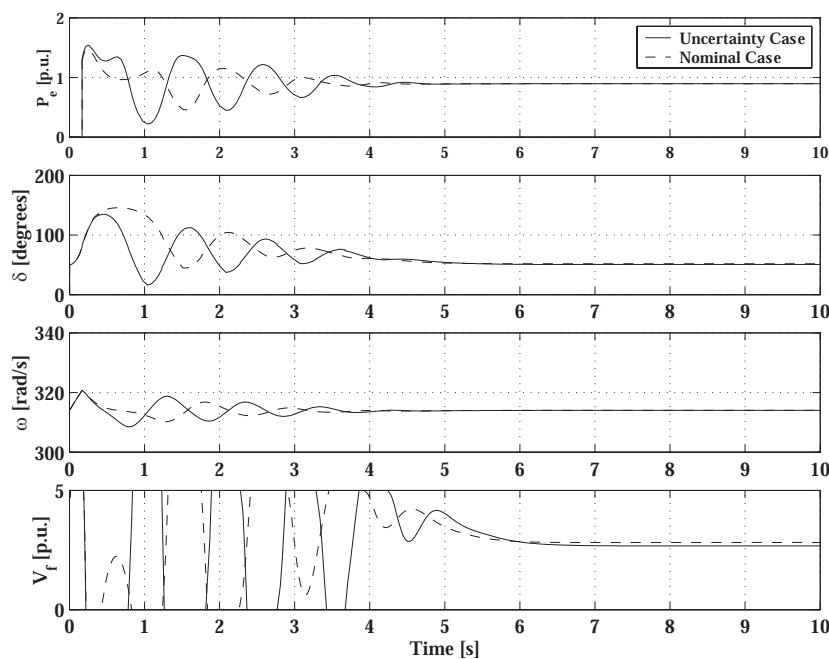


図 7.16: パラメータ変動に対するロバストテスト:  $\Delta V_s = 0.1V_s$ ,  $\Delta x_L = 0.1x_L$ ,  $\Delta x_T = 0.1x_T$

## 2p-LPV ゲインスケジュールと PSS の比較

次に、ゲインスケジュール制御の効用を確かめるために、励磁制御で最もよく使用される PSS との比較も行った。

PSS の構造を図 7.18 に示す。[21] の設計手順に沿って PSS を設計し、性能が最もよくなるようにパラメータをチューニングした。

なお、端子電圧  $V_t$  は

$$V_t = \frac{1}{x_{d\Sigma}} \sqrt{E_q^2 x_s^2 + V_s^2 x_d^2 + 2x_s x_d E_q V_s \cos \delta}$$

であり、誘導起電力  $E_q$  は

$$E_q = \frac{x_{d\Sigma}}{x'_d} E'_q - \frac{x_d - x'_d}{x'_{d\Sigma}} V_s \cos \delta.$$

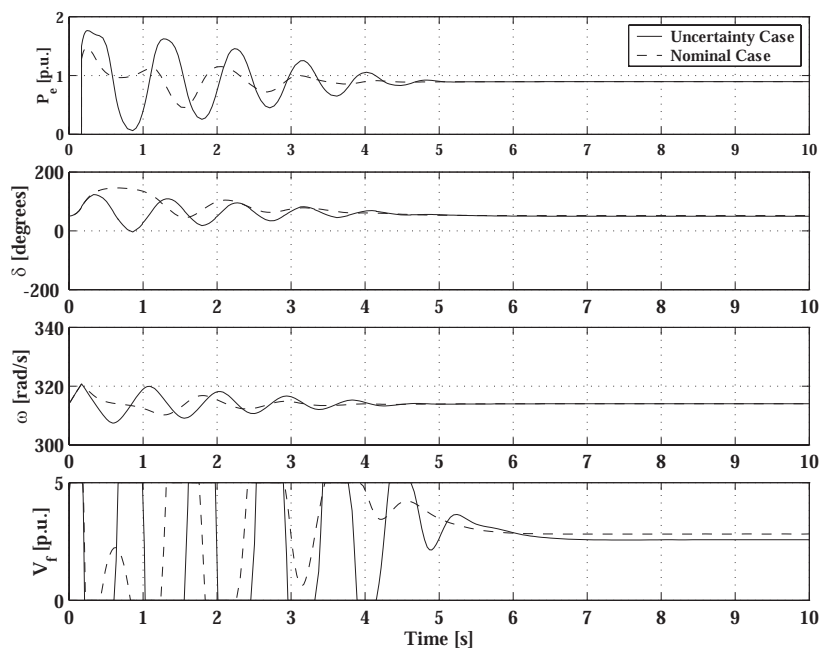


図 7.17: パラメータ変動に対するロバストテスト:  $\Delta V_s = 0.1V_s$ ,  $\Delta x_L = -0.1x_L$ ,  $\Delta x_T = -0.1x_T$

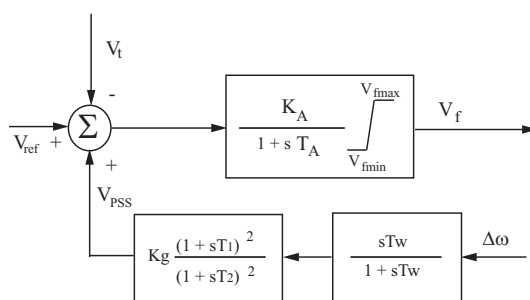


図 7.18: PSS のブロック線図

だ。

PSS 補償器の伝達関数は

$$V_{PSS} = K_g \left( \frac{sT_w}{1 + sT_w} \right) \left( \frac{1 + sT_1}{1 + sT_2} \right)^2 \quad (7.75)$$

の構造を持ち、そのパラメータは以下のようにチューニングした。

$$K_g = 0.3, \quad T_w = 0.1, \quad T_1 = 0.1, \quad T_2 = 0.05$$

比較の結果 図 7.19 は短絡事故が起きたときの、2p-LPV ゲインスケジュールと PSS の応答を示す。

有効電力  $P_e$ 、相差角  $\delta$  およびローター角速度  $\omega$  の応答から分かるように、ゲインスケジュールの方が PSS より性能が優れている。

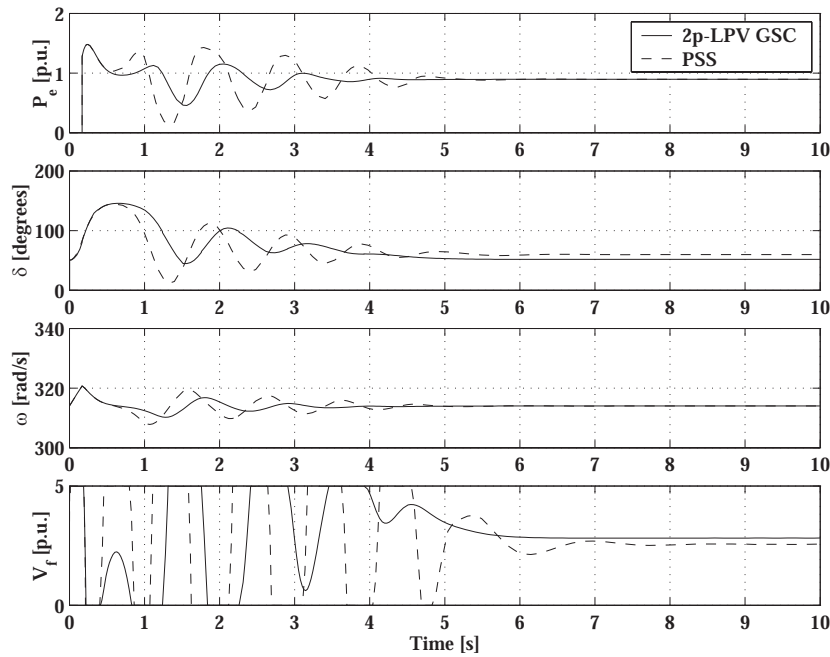


図 7.19: 2p-LPV ゲインスケジュールと PSS の比較

表 7.2: 電力系統パラメータの記述

$\delta$	相差角, rad	$\omega$	ローター速度, rad/sec
$f$	発電機の周波数, Hz	$P_e$	有効電力, p.u.
$P_M$	機械パワー, p.u.	$E_q$	誘導起電力, p.u.
$V_t$	発電機の端子電圧, p.u.	$V_s$	無限大母線電圧, p.u.
$E'_q$	過渡誘導起電力, p.u.	$V_f$	発電機の界磁電圧, p.u.
$V_R$	励磁機の実出力電圧, p.u.	$V_{ref}$	目標電圧, p.u.
$I_d$	電機子 d 軸電流, p.u.	$D$	減衰係数, p.u.
$M$	発電機の慣性定数, seconds	$T_{d0}$	界磁回路の時定数, seconds
$K_A$	励磁機のゲイン	$T_A$	励磁機の時定数, seconds
$x_d$	d 軸リアクタンス, p.u.	$x'_d$	d 軸過渡リアクタンス, p.u.
$x_T$	変圧器のリアクタンス, p.u.	$x_{l1}$	送電線 I のリアクタンス, p.u.
$x_{l2}$	送電線 II のリアクタンス, p.u.	$x_L$	送電線のリアクタンス, p.u.
$x_{d\Sigma}$	$x_{d\Sigma} = x_d + x_T + x_L$ , p.u.	$x'_{d\Sigma}$	$x'_{d\Sigma} = x'_d + x_T + x_L$ , p.u.

## 関連図書

- [1] M.Tanaka and K. Z. Liu: Posture Stabilization Control of Unicycle Robot by Constant-Scheduled  $\mathcal{H}_\infty$  Control, Proc. of Movic'98, pp.907-912, Zurich (1998)
- [2] M.Q. Dao: The construction of real time control system for unicycle robot and experiments (In Japanese), Bachelor thesis of Chiba University (2000)
- [3] M.Q. Dao and K.Z. Liu: Gain-scheduled stabilization control of a unicycle robot, JSME International Journal, C-48-4, pp.649-656 (2005)
- [4] A.Packard: Gain Scheduling Via Linear Fractional Transformations, Systems & Control Letters, Vol. 22, pp. 79-92 (1994)
- [5] T.Iwasaki: LMI and Control, Shokodo(In Japanese), (1994)
- [6] K. Zhou, J. C. Doyle and K. Glover: Robust and Optimal Control , Prentice Hall (1995)
- [7] P.Gahinet, A.Nemirovski, A.J.Laub, M.Chilali: LMI Control Toolbox, The Math-Works, Inc. (1995)
- [8] Z.Sheng and K.Yamafuji: Postural Stability and Motion Control of Unicycle (2nd Report, Design of Unicycle Robot and Experimental Results), JSME International Journal Vol. 61, No.583, pp. 1042-1049(1995)
- [9] D.Honma N.Iguchi: One wheel-Locomotive Robot and It's Control, Journal of the Robotics Society of Japan Vol.2, No.4, pp. 86-91 (1984)
- [10] N.Matsunaga, S.Kawaji: Control of Unicycle by Spin Motion, Proc. of the 3rd Annual Meeting of the Robotics Society of Japan, pp. 439-440(1985)
- [11] S. S. Ahmed, L. Chen and A. Petroianu: "Design of Suboptimal  $H_\infty$  Excitation Controllers", *IEEE Tran. on Power Syst.*, Vol. 11, No. 1, pp. 312-318 (1996)

- [12] P. Apkarian, P. Gahinet and G. Becker: “Self-scheduled  $H_\infty$  Control of Linear Parameter-Varying Systems: a Design Example”, *Automatic*, Vol. 31, No. 9, pp.1251-1261 (1995)
- [13] Chen S, Malik OP.: “ $H_\infty$  Optimization-based Power System Stabilizer Design”, *IEE Proceedings Part C*, Vol. 142, No. 5, pp.179-184 (1995)
- [14] M. Chilali , P. Gahinet and P. Apkarian: “Robust Pole Placement in LMI Regions”, *IEEE Tran. on Automat. Contr.*, Vol. 44, No. 12, pp.2257-2270 (1999)
- [15] M. Chilali and P. Gahinet: “ $H_\infty$  Design with Pole Placement Constraints: An LMI Approach”, *IEEE Tran. on Automat. Contr.*, Vol. 41, No. 3 pp.358-367 (1996)
- [16] Hardian, Seizo Furuya and Juichi Irisawa: “LMI-based Robust  $H_2$  Control Design with Regional Pole Constraints for Damping Power System Oscillations”, *Euro Trans. Electr. Power*, Vol. 15, pp.13-29 (2005)
- [17] Hardian, Seizo Furuya and Juichi Irisawa: “A Robust  $H_2$  Output Feedback controller design for damping power system oscillations: An LMI Approach”, *IEEJ Trans. PE*, Vol. 125, No.2, pp.157-164 (2005)
- [18] S. Kaprielian, K. Clements and J. Turi: “Applications of Exact Linearization Techinques for Steady-state Stability Enhancement in a Weak AD/DC System”, *IEEE Tran. on Power Syst.*, Vol. 7, No. 2, pp.536-543 (1992)
- [19] M. Klein, L. X. Le, G. J. Rogers, S. Farrokhpay and N. J. Balu: “ $H_\infty$  Damping Controller Design in Large Power Systems”, *IEEE Tran. on Power Syst.*, Vol. 10, No. 1, pp. 158-165 (1995)
- [20] P. Kundur: *Power System Stability and Control*, McGraw-Hill, ERPI (1994)
- [21] E. V. Larsen and D. A. Swann: “Applying Power System Stabilizers Part I, II, III”, *IEEE Tran. on Power App. Syst.*, Vol. PAS-100, No. 6, pp. 3017-3046 (1981)
- [22] Q. Lu, Z. Wang and Y. Han: *Optimal Control for Power System*, Science Publisher, pp.137-183, (1982)(In Chinese)
- [23] Q. Lu, Y. Sun: “Nonlinear Stabilizing Control of Multimachine Systems”, *IEEE Tran. on PES*, Vol. 4, No. 1, pp.236-241 (1989)

- [24] Q. Lu, Y. Sun, Z. Xu and T. Mochizuki: “Decentralized Nonlinear Optimal Excitation Control”, *IEEE Tran. on Power Syst.*, Vol. 11, No. 4, pp.1957-1962 (1996)
- [25] S. Mei, T. Shen and K.Z. Liu: *Modern Robust Control Theory and Application*, Tsinghua Press (2003)(In Chinese)
- [26] W.Qiu, V. Vittal and M. Khammash: “Decentralized Power System Stabilizer Design Using Linear Parameter Varying Approach”, *IEEE Tran. on Power Syst.*, Vol. 19, No. 4, pp.1951-1960 (2004)
- [27] Rios M, Hadjsaid N, Feuillet R and Torres A: “Power System Stability Robustness Evaluation by  $\mu$  Analysis”, *IEEE Trans. on Power Syst.*, Vol. 14, No. 2, pp.648-653 (1999)
- [28] P.Shrikant Rao, I. Sen: “Robust Pole Placement Stabilizer Design Using Linear Matrix Inequalities”, *IEEE Tran. on Power Syst.*, Vol. 15, No. 1, pp.313-319 (2000)
- [29] Son K.M., Park J.K.: “On the Robust LQG Control of TCSC for Damping Power System Oscillations”, *IEEE Trans. on Power Syst.*, Vol. 15, No. 4, pp.1306-1312 (2000)
- [30] Y. Wang, D. J. Hill, R. H. Middleton and L. Gao: “Transient Stability Enhancement and Voltage Regulation of Power Systems”, *IEEE Tran. on Power Syst.*, Vol. 8, No. 2, pp.620-627 (1993)
- [31] Y. Wang, D. J. Hill: “Robust Nonlinear Coordinated Control of Power Systems”, *Automatica*, Vol. 32, No. 4, pp.611-618 (1996)