2　第２回宿題解答

1.7 (2) 線形性質を用いると

$$\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[1] + 3\mathcal{L}[t] + \mathcal{L}[e^{-2t}] = \frac{1}{s} + \frac{3}{s^2} + \frac{1}{s+2}$$

(4) 公式 $\mathcal{L}[\sin\omega t] = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$ 及び性質 $\mathcal{L}[e^{-at}f(t)] = F(s+a)$ を使う。

$$\mathcal{L}[e^{-2t}\sin t] = \frac{1}{(s+2)^2+1}$$

(5) 同様に公式 $\mathcal{L}[\cos\omega t] = \frac{s}{s^2+\omega^2}$ を使うと

$$\mathcal{L}[e^{-2t}\cos t] = \frac{s+2}{(s+2)^2+1}$$

1.10(2)

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

であることに注意し、ラプラス変換の定義に従って計算すると

$$\mathcal{L}[e^{-at}f(t)] = \int_0^\infty e^{-at}f(t)e^{-st}dt = \int_0^\infty f(t)e^{-(s+a)t}dt = F(s+a)$$

が成り立つ。

1.11(1)

$$F(s) = \frac{a}{s} + \frac{b}{s+4}, \quad a = sF(s)\Big|_{s=0} = \frac{s+2}{s+4}\Big|_{s=0} = \frac{1}{2},\ b = (s+4)F(s)\Big|_{s=-4} = \frac{s+2}{s}\Big|_{s=-4} = \frac{1}{2}$$

よりその逆ラプラス変換は次式となる。

$$f(t) = \frac{1}{2}(1+e^{-4t}),\ t \geq 0$$

1.11(4)

$$F(s) = \frac{a}{s} + \frac{bs+c}{s^2+6s+12}, \quad a = sF(s)\Big|_{s=0} = \frac{6(s+2)}{s^2+6s+12}\Big|_{s=0} = 1$$

のように部分分数展開した式を再び通分すると

$$\frac{6(s+2)}{s(s^2+6s+12)} = \frac{s^2+6s+12+s(bs+c)}{s(s^2+6s+12)} \Rightarrow b+1=0,\ c+6=6 \Rightarrow b=-1,\ c=0$$

が得られる。すると、

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{1}{s} - \frac{s}{(s+3)^2+3} = \frac{1}{s} - \left(\frac{s+3}{(s+3)^2+3} - \sqrt{3}\frac{\sqrt{3}}{(s+3)^2+3}\right) \\ \Rightarrow &\quad f(t) = 1 - e^{-3t}\left(\cos\sqrt{3}t - \sqrt{3}\sin\sqrt{3}t\right),\ t \geq 0 \end{aligned}$$

となる。なお、部分分数展開は以下のようにして得ることもできる。

$$F(s) = \frac{6s+12}{s(s^2+6s+12)} = \frac{(s^2+6s+12)-s^2}{s(s^2+6s+12)} = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+6s+12}$$

1.11(5)

$$
\begin{aligned}
F(s) &= \frac{a}{(s+1)^2}+\frac{b}{s+1}+\frac{c}{s+2}, \quad a=(s+1)^2F(s)\Big|_{s=-1}=\frac{s}{s+2}\Big|_{s=-1}=-1\\
& b=\frac{d}{ds}\left[(s+1)^2F(s)\right]\Big|_{s=-1}=\frac{d}{ds}\left[\frac{s}{s+2}\right]\Big|_{s=-1}=\frac{s}{(s+2)^2}\Big|_{s=-1}=2\\
& c=(s+2)F(s)\Big|_{s=-2}=\frac{s}{(s+1)^2}\Big|_{s=-2}=-2\\
\Rightarrow \quad & F(s)=-\frac{1}{(s+1)^2}+\frac{2}{s+1}-\frac{2}{s+2}\Rightarrow f(t)=-te^{-t}+2e^{-t}-2e^{-2t},\ t\geq 0
\end{aligned}
$$