3　第３回宿題解答

各問題の図は各自で描くこと。

2.1(a) コンデンサ C 両端の電圧を v_c とおくと、キルヒホッフの電圧則によると

$$v_i = v_c + v_o \Rightarrow v_c = v_i - v_o$$

の関係が成立する。そして、回路を流れる電流は

$$i = \frac{v_o}{R_2} = \frac{v_c}{R_1} + C\dot{v}_c = \frac{v_i - v_o}{R_1} + C(\dot{v}_i - \dot{v}_o)$$

である。この式から入出力間の微分方程式を得る。

$$\dot{v}_o + \left(\frac{1}{R_1C} + \frac{1}{R_2C}\right)v_o = \dot{v}_i + \frac{1}{R_1C}v_i$$

2.1(d) コンデンサ C_2 両端の電圧を v_{C_2} とおくと、$R_1 - R_2 - C_2$ の節点における電流関係より

$$C_2\dot{v}_{C_2} = \frac{v_i - v_{C_2}}{R_1} + \frac{v_o - v_{C_2}}{R_2}$$

の関係が成り立つ。さらに、出力端が開放していることを考えると、C_1 を流れる電流と R_2 を流れる電流は等しい。よって

$$C_1(\dot{v}_i - \dot{v}_o) = \frac{v_o - v_{C_2}}{R_2} \Rightarrow v_{C_2} = v_o + R_2C_1(\dot{v}_o - \dot{v}_i)$$

先頭の式に本式を代入すると

$$C_2\dot{v}_o + R_2C_1C_2(\ddot{v}_o - \ddot{v}_i) = \frac{v_i - v_o - R_2C_1(\dot{v}_o - \dot{v}_i)}{R_1} - C_1(\dot{v}_o - \dot{v}_i)$$

となり、さらに両辺に R_1 をかければ

$$R_1C_2\dot{v}_o + R_1R_2C_1C_2(\ddot{v}_o - \ddot{v}_i) = v_i - v_o - R_2C_1(\dot{v}_o - \dot{v}_i) - R_1C_1(\dot{v}_o - \dot{v}_i)$$

が成り立つ。整理すると

$$R_1R_2C_1C_2\ddot{v}_o + (R_1C_1 + R_1C_2 + R_2C_1)\dot{v}_o + v_o = R_1R_2C_1C_2\ddot{v}_i + (R_1C_1 + R_2C_1)\dot{v}_i + v_i$$

を得る。

2.2(a) 質量 M に働く力の総和は $f_i - Kx_o$ であり、方向が右向きであるので

$$M\ddot{x}_o = f_i - Kx_o \Rightarrow \ddot{x}_o + \frac{K}{M}x_o = \frac{1}{M}f_i$$

が成り立つ。

2.2(c) 質量 M に働く下向きの力の総和は $Mg + f_i - B\dot{x}_o - Kx_o$ であるので、モデルは

$$M\ddot{x}_o = f_i + Mg - B\dot{x}_o - Kx_o \Rightarrow \ddot{x}_o + \frac{B}{M}\dot{x}_o + \frac{K}{M}x_o = \frac{1}{M}f_i + g$$

となる。もし、変位 x_o をバネの力と重力が釣り合った位置からの変位と考えるとき、重力の項が消え、教科書の答えと一致する。