6　第６回宿題解答

4.2(a) 伝達関数 $G(t)$ の単位インパルス応答を $g(t)$ で表す。

$$G(s) = \frac{5}{(s+1)(s+2)} = \frac{5}{s+1} - \frac{5}{s+2} \Rightarrow g(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)] = 5(e^{-t} - e^{-2t})$$

一方、単位ステップ応答は次のようになる。

$$Y(s) = \frac{5}{(s+1)(s+2)}U(s) = \frac{5}{s(s+1)(s+2)} = \frac{5/2}{s} - \frac{5}{s+1} + \frac{5/2}{s+2} \Rightarrow y(t) = \frac{5}{2} - 5e^{-t} + \frac{5}{2}e^{-2t}$$

(b)

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{2(s+3/2)-2}{(s+3/2)^2+7/4} = 2\frac{s+3/2}{(s+3/2)^2+7/4} - \frac{4}{\sqrt{7}}\frac{\sqrt{7}/2}{(s+3/2)^2+7/4} \\ &\Rightarrow g(t) = e^{-3t/2}(2\cos\frac{\sqrt{7}}{2}t - \frac{4}{\sqrt{7}}\sin\frac{\sqrt{7}}{2}t) \end{aligned}$$

また、単位ステップ応答は次のようになる。

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{2s+1}{s(s^2+3s+4)} = \frac{1}{4}\frac{1}{s} - \frac{1}{4}\frac{s+3/2}{(s+3/2)^2+7/4} + \frac{13}{4\sqrt{7}}\frac{\sqrt{7}/2}{(s+3/2)^2+7/4} \\ &\Rightarrow y(t) = \frac{1}{4} - e^{-3t/2}(\frac{1}{4}\cos\frac{\sqrt{7}}{2}t - \frac{13}{4\sqrt{7}}\sin\frac{\sqrt{7}}{2}t) \end{aligned}$$

4.3(a) 閉ループ伝達関数は次式となる。

$$G(s) = \frac{\frac{K}{s(Ts+1)}}{1; \frac{K}{s(Ts+1)}} = \frac{K/T}{s^2+s/T+K/T}$$

よって、

$$\omega_n^2 = \frac{K}{T},\ 2\zeta\omega_n = \frac{1}{T} \Rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{K}{T}},\ \zeta = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{KT}}$$

を得る。

(b)$K = 40,\ T = 0.1$ を上式に代入すると、$\omega_n = 20,\ \zeta = 0.25$ が得られる。式 (4.53) を用いれば、$\beta = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = 19.36$ で単位ステップ応答は

$$y(t) = 1 - e^{-\zeta\omega_n t}(\cos\beta t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\beta t) = 1 - e^{-5t}(\cos 19.36t + 0.258\sin 19.36t)$$

となることがわかる。

4.4 閉ループ伝達関数を計算すると

$$G(s) = \frac{\frac{K}{(1+a)s^2+2s+1}}{1+\frac{K}{(1+a)s^2+2s+1}} = \frac{K/(1+a)}{s^2+\frac{2}{1+a}s+\frac{1+K}{1+a}}$$

となる。よって、以下の関係式が成り立つ。

$$\frac{2}{1+a} = 2\zeta\omega_n = 3.2, \quad \frac{1+K}{1+a} = \omega_n^2 = 4$$

本式を解くと、次の解が得られる。

$$a = -\frac{3}{8}, \quad K = \frac{3}{2}$$