

7 第7回宿題解答

追加問題

1 伝達関数

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1}$$

について、その安定性を調べ、単位ステップ応答を求めよ。

- (1) 極は $p = -\frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2}$ であり、実部がすべて負であるから安定である。
 (2) 出力のラプラス変換は

$$\hat{y}(s) = G(s)\hat{u}(s) = \frac{1}{s(s^2 + s + 1)} = \frac{1}{s} - \frac{s + 1/2}{(s + 1/2)^2 + 3/4} - \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3}/2}{(s + 1/2)^2 + 3/4}$$

である。逆ラプラス変換すると、ステップ応答を得る。

$$y(t) = 1 - e^{-\frac{1}{2}t} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{1}{\sqrt{3}} e^{-\frac{1}{2}t} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t$$

2 伝達関数 $G(s) = \frac{1}{s+0.01}$ の単位ステップ応答を求めよ。

$$\begin{aligned} \hat{y}(s) &= \frac{1}{s(s+0.01)} = 100\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+0.01}\right) \\ \Rightarrow y(t) &= 100(1 - e^{-0.01t}), t \geq 0 \end{aligned}$$

発散はしないが、収束が非常に遅い。

4.5(c) 多項式

$$s^4 + 2s^3 + s^2 + 2s + 1 = 0$$

について Routh 表を作ると、以下のようになる。

| | | | |
|-------|---|---|---|
| s^4 | 1 | 1 | 1 |
| s^3 | 2 | 2 | 0 |
| s^2 | 0 | 1 | |
| s^1 | | | |
| s^0 | | | |

1 列目に 0 の値が出たので、特性根が不安定である。

(f) 多項式

$$s^5 + 2s^4 + 3s^3 + 2s^2 + s + 1 = 0$$

について Routh 表を作ると、以下のようになる。

| | | | |
|-------|------|-----|---|
| s^5 | 1 | 3 | 1 |
| s^4 | 2 | 2 | 1 |
| s^3 | 2 | 1/2 | 0 |
| s^2 | 3/2 | 1 | |
| s^1 | -5/6 | 0 | |
| s^0 | 1 | | |

1 列目に 2 回の符号変化があるから、2 個の不安定特性根がある。

4.6 閉ループ系の特性多項式は

$$p(s) = s(s+1)(Ts+1) + 2 = Ts^3 + (1+T)s^2 + s + 2$$

である。その Routh 表を作ると、以下のようになる。

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & T & 1 \\ s^2 & 1+T & 2 \\ \hline s^1 & \frac{1-T}{1+T} & 0 \\ s^0 & 2 & \end{array}$$

よって、安定条件は次式となる。

$$T > 0, \quad 1+T > 0, \quad 1-T > 0 \Rightarrow 0 < T < 1$$

4.4 閉ループ系の特性多項式は

$$p(s) = (1+a)s^2 + 2s + 1 + K$$

である。その Routh 表を作ると、以下のようになる。

$$\begin{array}{c|cc} s^2 & 1+a & 1+K \\ s^1 & 2 & 0 \\ \hline s^0 & 1+K & \end{array}$$

よって、安定条件は次式となる。

$$1+a > 0, \quad 1+K > 0 \Rightarrow K > -1, \quad a > -1$$