10　第９回宿題解答

5.2 グラフは各自描くこと。まず、周波数応答を計算すると

$$G(j\omega)=\frac{2}{j\omega(1+j0.1\omega)}=-\frac{0.2}{1+0.01\omega^2}-j\frac{2}{\omega(1+0.01\omega^2)}=\frac{2}{\omega\sqrt{1+(0.1\omega)^2}}e^{-j(\pi/2+\arctan(0.1\omega))}$$
$$\Rightarrow |G(j\omega)|=\frac{2}{\omega\sqrt{1+(0.1\omega)^2}},\quad \angle G(j\omega)=-(\pi/2+\arctan(0.1\omega))\in[-\frac{\pi}{2},-\pi)$$

これより、以下の漸近的性質が分かる。

1. $\omega\to 0_+$ のとき

$$\mathrm{Re}\ G(j\omega)\to -0.2,\quad \mathrm{Im}\ G(j\omega)\to -\infty,\quad \angle G(j\omega)\to -\frac{\pi}{2}$$

2. $\omega\to+\infty$ のとき

$$|G(j\omega)|\to 0,\quad \angle G(j\omega)\to -\pi$$

3. $\omega\uparrow$ のとき、$|\mathrm{Re}\ G(j\omega)|$、$|\mathrm{Im}\ G(j\omega)|$ がともに単調減少する

したがって、位相角の関係 $\angle G(j\omega)\in[-\frac{\pi}{2},-\pi)$ からナイキスト軌跡は第３象限に位置し、虚軸から -0.2 離れた直線に沿って負の無限大から出発して、実部虚部共に減少しながら負の実軸に沿って原点に収束する ($\omega:0\to\infty$ のとき)。与えられた周波数におけるゲインと位相を求めると、かなり正確にナイキスト軌跡を描ける。

さらに、軌跡がとこで閉じるかを知るには、虚軸に存在する $G(s)$ の特異点 $s=0$ を小半円の右半分

$$s=\epsilon e^{j\theta},\quad \theta\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}],\ \epsilon\ll 1$$

に沿った軌跡 $G(s)$ を調べる。

$$G(\epsilon e^{j\theta})=\frac{2}{\epsilon e^{j\theta}(1+0.1\epsilon e^{j\theta})}\approx\frac{2}{\epsilon}e^{-j\theta}$$

の位相角は変数 s が小半円に沿って動くとき、$\pi/2$ から $-\pi/2$ へ変化する。つまりこのとき $G(s)$ の軌跡が円心が原点で半径 $2/\epsilon$ の円の右半分上を動く。すなわち、軌跡が右半面で閉じる。

5.3 与えられたナイキスト軌跡から、以下の特徴が読み取れる。

1. $G(j0)=2$
2. $\angle G(j\infty)=-\frac{3\pi}{2},\ |G(j\infty)|=0$

２番の性質から、次数差が３であることが分かる。例えば

$$G(s)=\frac{K}{(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)(1+\tau_3 s)},\quad \tau_1,\tau_2,\tau_3>0$$

が考えられる。さらに１番目の性質より $K=G(j0)=2$ も分かる。