

序 文

制御工学の発展は、古典制御の時代(1930-50)と現代制御の時代(1960-80)を経て、いまやポスト現代制御時代(1990-)に突入している。ロバスト制御理論に代表されるポスト現代制御は、周波数域の古典制御と時間域の現代制御を見事に融合させ、より実用的でかつ普遍的な理論体系を作り上げている。現在の制御工学はもはや周波数応答、モデル不確かさと状態空間を抜きには語れない。

本書はこのような新しい時代に相応しい現代制御の教科書を目指している。新しい試みとして、制御性能を基軸に据え、システムの内部構造が性能に如何に影響を及ぼすか、性能を達成できる条件が何であるか、どこまで性能を実現し得るかを解明することに重点を置く。具体的な制御系設計法についてあえて深く触れないようにしている。設計理論はポスト現代制御でより高い次元で構築されており、他の成書を使って勉強されたい。

本書の特徴 従来の教科書に比べ、本書は以下の特徴をもつ。

1. まず、題材の選択についてシステム解析に重点を置いた。設計に関しては安定化だけを扱い、LQ最適制御やサーボ系など時間域における設計法を省いた。その代わりに、ポスト現代制御成果の一部であるシステム性能解析、安定化制御器のパラメータ化、そしてフィードバック制御の性能限界に関する内容を取り入れた。さらに、将来への視野を広げるために非線形制御の入門的な内容も導入した。
2. 内容の説明に関しては、読者が取っ付きやすいように簡単な例から新しい概念を導入するように努めた。分かりやすい例題もたくさん設けた。しかし理論体系の美しさと厳密さを犠牲することなく、すべての結果対して著者が知る限りの最も分かりやすい証明を与えている。
3. 行き過ぎ量・逆振れが生じる条件、感度関数を中心とした性能限界の解析を丁寧に記述した。
4. 性能を保証できる制御系の設計方法を紹介していないが、それが解析的に行えることを6章で例題と練習問題を使って示している。
5. 非線形システムの基本的な概念と厳密線形化による制御法を含めた。

各章の内容 1章は物理法則に基づく動的システムのモデル化を述べている。2章はシステムの構造的性質、とりわけ可制御性・可観測性、極・零点を説明する。3章は安定性の概念と安定条件を解説している。4章は過渡応答と定常応答

の両面からシステムの性能およびその条件を述べている．5章は状態フィードバックとオブザーバによる安定化手法，6章は安定化制御器のすべてを公式化することならびにその応用を説明している．7章はフィードバック制御の性能限界を解析している．さらに，非線形制御入門として8章で非線形システムの基礎的な概念を説明し，9章で厳密な線形化による制御手法を紹介している．また，線形代数の知識は付録Aにまとめた．

本書は，学部3年次もしくは修士課程1年次の講義，および制御技術者の参考書としての使用を想定している．本書を講義に使う場合，次の表に示すようなカリキュラムを勧める．なお，付録Aの線形代数は自習用に用意したものであり，読者には是非一読を勧めたい．特に，不変部分空間の概念はシステムの構造解析を理解するために欠かせないものであり，勉強しておくべきである．

推奨カリキュラム

学部	1 - 6章，付録の一部
大学院	4 - 7章，(余裕がある場合)8 - 9章

本書は2001年から本格的に書き始め，骨格を固めたのは2003年ごろであった．それ以来，大学の講義と研究室セミナーで使用し，そのフィードバックに基づいて数回全面的に書き直し結果，いまの形となった．本書の執筆に際し，著者が米国 Louisiana 州立大学で講義した経験，友人の Kemin Zhou, Guoxiang Gu 両教授との討論および彼らの講義ノートが非常に参考になった．また，慶應義塾大学の佐野昭先生と信州大学の千田有一先生から貴重なコメントを多数頂いた．ここに感謝の意を表する．

万全を期しているが，思わぬ誤りがあるかもしれないので，読者諸兄からのご指摘を歓迎する．誤りの訂正は下記ウェブサイトで公開する予定である．また，Latex で書かれた講義用スライドおよび詳細な練習問題解答も用意してある．本書を教科書に使う先生方でこれらを参考されたい場合は下記連絡先へご連絡ください．

本書のウェブサイト：<http://foo.tm.chiba-u.jp/~kzliu>

著者への連絡先：kzliu@faculty.chiba-u.jp

本書は第一著者の師である故東京工業大学美多勉先生の勧めで始めたプロジェクトである．先生に本書の上梓を報告できず，残念でならない．

2005年12月

劉 康志，申 鉄竜

目 次

1. 線形システムの表現

1.1	システムとモデル	2
1.2	物理モデル	4
1.2.1	機械系	4
1.2.2	電気系	6
1.2.3	メカトロ系	7
1.3	伝達関数表現	8
1.3.1	伝達関数の次数, プロパー性と次数差	10
1.3.2	伝達関数の極と零点	11
1.4	状態空間表現	12
1.4.1	システムの状態と状態方程式	12
1.4.2	状態の選び方	13
1.5	伝達関数と状態方程式の関係	14
1.6	非線形モデルと線形近似	15
1.6.1	平衡点	16
1.6.2	線形近似	17

2. 線形システムの構造解析

2.1	状態方程式の解	20
2.2	双対性	24
2.3	可制御性	24
2.4	可観測性	30
2.5	状態変換と正準形式	34
2.5.1	状態変換	34
2.5.2	Kalman の正準形式*	35
2.6	極・零点と応答	38
2.6.1	極	38
2.6.2	1 入出力系の零点	40
2.6.3	多入出力系の零点*	42
2.6.4	次数差と無限零点	47
2.7	逆システム	48
2.8	システムの結合関係	49
2.8.1	直列結合	49

2.8.2	並列結合	50
2.8.3	フィードバック結合	50
2.8.4	LFT 結合	50
2.8.5	結合系の可制御性・可観測性	52

3. 線形システムの安定性

3.1	安定性の概念	56
3.1.1	入出力安定性	56
3.1.2	状態の安定性	59
3.1.3	可安定性と可検出性	61
3.1.4	内部安定性	63
3.2	安定判別法	66
3.2.1	Routh-Hurwitz の安定判別法	67
3.2.2	Nyquist の安定判別法	69
3.2.3	Lyapunov の安定理論	71

4. システムの性能

4.1	テスト信号	76
4.1.1	目標値信号	76
4.1.2	持続外乱	77
4.1.3	テスト信号の性質	77
4.2	定常応答	78
4.2.1	閉ループ伝達関数に対する解析	78
4.2.2	目標値追従	80
4.2.3	外乱制御	83
4.3	過渡応答	86
4.3.1	評価基準	86
4.3.2	基準 2 次系	87
4.3.3	付加した極/零点の影響	89
4.3.4	行き過ぎ量と逆振れ	91
4.3.5	バンド幅と速応性	93
4.4	開ループ制御と閉ループ制御の性能比較	95
4.4.1	目標値追従	95
4.4.2	モデル不確かさが存在する場合	96
4.4.3	外乱抑制	98
4.5	応答の定量評価：ノルムの導入*	99
4.5.1	信号のノルム	100
4.5.2	システムのノルム	101
4.5.3	システムノルムと入出力ノルムの関係	103

4.5.4	外乱制御と重み関数	104
-------	-----------------	-----

5. 線形システムの安定化

5.1	状態フィードバック	108
5.1.1	可制御正準形と可観測正準形	110
5.1.2	1入力系の極配置	114
5.1.3	多入力系の極配置	116
5.1.4	極選択の指針	118
5.2	オブザーバ	121
5.2.1	同一次元オブザーバ	121
5.2.2	最小次元オブザーバ	123
5.3	併合系と分離原理	127
5.3.1	同一次元オブザーバを用いる場合	127
5.3.2	最小次元オブザーバを用いる場合	129

6. 安定化制御器のパラメータ化

6.1	一般化フィードバック構成の導入	132
6.2	安定化制御器のパラメータ化	136
6.3	Youlaのパラメータ化	140
6.4	閉ループ系の構造	142
6.4.1	制御器のパラメータに関するアフィン構造	142
6.4.2	自由パラメータに関するアフィン構造	143
6.5	2自由度制御系の構造解析	145

7. フィードバック制御の限界*

7.1	予備知識	151
7.1.1	Poissonの積分公式	151
7.1.2	全域通過伝達関数と最小位相伝達関数	152
7.1.3	信号の2ノルムと内積	153
7.1.4	2ノルムと内積の計算	154
7.2	実現可能な閉ループ伝達関数の限界	155
7.2.1	補間条件	155
7.2.2	感度関数に対する解析	156
7.3	積分条件	158
7.3.1	Bodeの感度積分条件	158
7.3.2	開ループ系不安定極と感度限界の関係	160
7.3.3	Bodeの位相公式	162
7.4	目標値追従の限界	165

7.4.1	1 自由度系	165
7.4.2	2 自由度系	170

8. 非線形システムの安定論

8.1	非線形システムの状態空間表現	172
8.1.1	物理系の非線形モデル	172
8.1.2	非線形状態方程式	173
8.1.3	解の存在性と一意性	174
8.2	Lyapunov 安定論	176
8.2.1	平衡点と安定性	177
8.2.2	Lyapunov 定理	178
8.2.3	LaSalle 不変性原理	183
8.3	線形近似表現	185

9. フィードバック線形化*

9.1	非線形システムの正準形	188
9.1.1	座標変換	188
9.1.2	相対次数	190
9.1.3	正準形	191
9.2	状態フィードバック線形化	194
9.2.1	フィードバック等価	195
9.2.2	厳密線形化	196
9.3	入力 - 出力線形化	199
9.3.1	入力 - 出力線形化	200
9.3.2	ゼロ・ダイナミクス	202

A. 線形代数のまとめ

A.1	行列式, 逆行列とブロック行列	207
A.2	行列の基本操作とその行列表現	209
A.3	線形ベクトル空間	211
A.3.1	線形独立性	211
A.3.2	次元と基底	212
A.3.3	部分空間	213
A.4	ベクトルのノルムと内積	214
A.4.1	ベクトルのノルム	214
A.4.2	ベクトルの内積	215
A.5	行列と線形写像	217
A.5.1	像と零空間	217

A.5.2	行列のランク	219
A.5.3	線形代数方程式	220
A.6	固有値と固有ベクトル	222
A.6.1	Cayley-Hamiltonの定理	226
A.7	不変部分空間	226
A.7.1	写像の不変部分空間への制限	228
A.7.2	\mathbf{R}^n 上の不変部分空間	228
A.8	2次形式と正定行列	230
A.8.1	2次形式とエネルギー関数	230
A.8.2	正定行列と半正定行列	231
A.9	行列のノルムと特異値	232
A.9.1	行列ノルム	232
A.9.2	特異値	234
A.10	ベクトルと行列の微積分	235

記号集

\forall	すべてに対して
\exists	存在する
$:=$	定義する
\in	含まれる
$\sup_x f(x)$	x に関する関数 $f(x)$ の上限値
\mathbf{R}	実数体
\mathbf{C}	複素数体
$\operatorname{Re}(\lambda)$	複素数 λ の実部
x^*	共役転置 $x^* = (\bar{x})^T$
$Q \geq 0, Q > 0$	半正定行列, 正定行列
A^{-1}	行列 A の逆行列
$\det(A) = A $	行列 A の行列式
$\operatorname{Im}A$	行列 A の像
$\operatorname{Ker}A$	行列 A の零空間
$\dim(X)$	線形空間 X の次元
$\operatorname{span}\{x_1, \dots, x_n\}$	ベクトル x_1, \dots, x_n によって張られる部分空間
$\operatorname{rank}(A)$	行列 A のランク (階数)
$\operatorname{normalrank}A(s)$	関数行列 $A(s)$ の正規ランク
$\sigma(A)$	行列 A の固有値集合
$\sigma_i(A)$	行列 A の i 番目の特異値
$\sigma_{\max}(A)$	行列 A の最大特異値
$\ x\ $	x のノルム
$\langle u, v \rangle$	u, v の内積
$AS \subset S$	部分空間 S が A 不変, すなわち $x \in S \Rightarrow Ax \in S$
$\hat{x}(s) = \mathcal{L}[x(t)]$	$x(t)$ の Laplace 変換
$\dot{x}(t), \ddot{x}(t)$	1 階導関数 $\frac{dx(t)}{dt}$, 2 階導関数 $\frac{d^2x(t)}{dt^2}$
$\left[\begin{array}{c c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right]$	伝達行列 $D + C(sI - A)^{-1}B$
(A, B, C, D)	伝達行列 $D + C(sI - A)^{-1}B$
$L_f h(x)$	関数 $h(x)$ のベクトル場 $f(x)$ に沿った Lie 微分
$[f, g](x)$	ベクトル関数 $f(x)$ と $g(x)$ の Lie 積

1

線形システムの表現

本章では、線形システムの数学表現、すなわちモデル (model) について考える。ここでは、まずモデルとは何かを説明してから、物理モデルの立て方を述べる。さらに、制御工学で用いるモデルの二つの表現方法、つまり伝達関数と状態方程式について詳しく説明する。

以下では、記号 $\dot{x}(t)$, $\ddot{x}(t)$ で時間に関する 1 階導関数 dx/dt , 2 階導関数 d^2x/dt^2 を表すことにする。また、時間関数 $x(t)$ の Laplace 変換 $\mathcal{L}[x(t)]$ を $\hat{x}(s)$ で表すことにする。

1.1 システムとモデル

因果関係をもつ物事はすべてシステム (system) と呼ぶことができる。例えば、銀行の預貯金の機構は一つのシステムであり、銀行そのものも一つのシステムである。また、自動車も、自動車の製造工場もすべてシステムである。これらがすべて機能、すなわち因果関係をもつ。例えば、銀行に預金をすると、一定の期間が経てば利息がもらえる。また、自動車工場に部品や原材料を運び込めば車が作れる。このような関係は因果関係 (causality) という。銀行預貯金システムの場合、預ける金は入力といい、利息は出力という。同じように、自動車工場の場合、部品と原材料は入力で、出来上がった自動車は出力である。

利息は預金したそのときにももらえるものではなく、一定の期間が経ってはじめてもらえるものである。つまり、出力は入力が増加されたその瞬間に反応するのではなく、時間の経過に伴って応答するのである。このようなシステムは動的システム (dynamic system) という。同様に、自動車はアクセルを踏めばすぐさま 60 キロの時速になるのではなく、加速のプロセスを経てそうなるのである。一般に、動的システムの入出力間の関係は微分方程式か差分方程式によっ

て表される．

これに対して，出力が入力の係数倍，つまり瞬時に入力に応答する場合は静的システム (static system) と呼ぶ．例えば，抵抗 R に電圧 u をかけると電流 $i = u/R$ が流れるので，一つの静的システムとなる．ただし，物理系を動的システムと見なすか，静的システムと見なすかは考える入出力による．質量 M について加える力 f を入力，加速度 a を出力と考える場合， $a = f/M$ なので静的システムになる．しかし，出力を速度 v あるいは変位 x とする場合入出力関係は $\dot{v} = f/M$, $\ddot{x} = f/M$ に変わり，動的システムとなる．

本書で説明する制御工学では，物理システムだけを扱う．

制御の目的は，対象物 (システム) の物理量をわれわれが望むように動かすことである．制御工学で扱う物理系はほとんど動的なものであり，運動特性をもつ．制御しようとする物理系は制御対象 (もしくはプラント, plant) と呼ばれる．制御対象の性質を解析するには，実験でその振る舞いを調べるか，物理法則を用いて解析的に調べるかの二通りの方法がある．しかし，システムの性能を改善するためにどのような制御系を設計したらよいかを考えると，何らかの数学モデルを用いなければならない．制御の本質はシステムの未来の振る舞いを予測し，これを改善すべく制御動作を加えることにある．静的システムの場合，出力が入力の係数倍なので，所望の出力から必要な入力を逆算すれば十分である．これに対して動的システムの場合，現在の出力は現在までのすべての入力とシステムの初期値に依存するため，現在を見るだけではだめなのである．こういう依存関係は微分方程式や差分方程式で記述でき (運動方程式という)，これはシステムの物理モデルとなる．

まとめると，制御系を解析・設計するためには，制御対象の動特性を数式モデルで表現する必要がある．モデルを作ることはモデル化 (modelling) と呼ばれる．

まず，次の例を見てみよう．

■ 例 1.1 自動車の車速を一定値に保つ状況を考えよう．これは一般にクルーズ制御と呼ばれ，多くの自動車にこのような制御装置が実装されている．ここでは，簡単のためにエンジンの動特性を省略し，駆動力を直接操作できると仮定する．

$v(t)$ を車速， M を自動車の質量， D を路面の粘性摩擦係数とし，駆動力を $f(t)$ とすると，Newton の第 2 の法則によれば方程式

$$M\dot{v}(t) + Dv(t) = f(t) \quad (1.1)$$

が成立する．これは車速に関する運動方程式であり，車速制御のモデルである． □

また，本例において v は制御したい物理量で出力 (output) といい，駆動力 f は出力 v を動かすためのもので入力 (input) という．さらに，入力を作る機構は制御器 (controller) という．

1.2 物理モデル

制御工学における制御対象は機械系や電気系などの物理系である．その物理量の時間的变化 (応答という) は物理法則によって支配される．多くの場合，物理法則は微分方程式で記述される．例えば，質量 M の変位 x と質量に加わる力 f の関係は Newton の第 2 の法則 $f = M\ddot{x}$ で与えられる．このような微分方程式は物理モデル (physical model)，あるいは運動方程式 (motion equation) と呼ばれる．

物理法則に基づいて物理モデルを求める場合，基本的には各要素に関する物理法則と Newton や Kirchhoff の法則を利用する．以下，機械，電気系別にそれぞれの方法について説明する．

1.2.1 機械系

機械系の場合，並進運動 (translational motion) ではマス (質点)，バネおよびダンパ (粘性摩擦) の三つの基本要素がある (図 1.1)．各要素の物理法則は次のようになる．ただし， $x(t)$ は変位， $f(t)$ は外部から加わる力を表す．

$$\text{マス } M: \quad f(t) = M\ddot{x}(t)$$

$$\text{バネ } K: \quad f(t) = Kx(t)$$

$$\text{ダンパ } D: \quad f(t) = D\dot{x}(t)$$

これらの間の関係を支配する基本法則は Newton の法則である．また，これらを組み合わせた機械系の運動方程式を立てる手順としては，まずマスを仮想的に切り離してそれに働く力を図で解析する．この解析に際し，速度と加速度が変位と同じ方向にあるベクトルであることに注意する．次に Newton の法則をマスに適用すれば運動方程式が得られる．

そして，回転運動 (rotational motion) では慣性モーメント，ねじれバネとダンパの三つの基本要素がある． $\theta(t)$ を回転角， τ を外部から加わるトルクとすると，これらに関する物理法則は以下ようになる．

$$\text{慣性モーメント } J: \quad \tau(t) = J\ddot{\theta}(t)$$

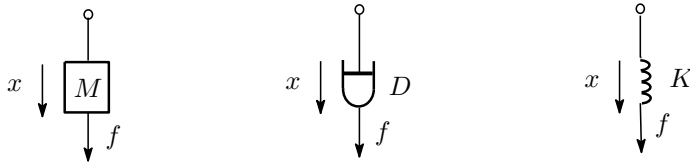


図 1.1 機械系の基本要素

ねじれバネ K : $\tau(t) = K\theta(t)$

ダンパ D : $\tau(t) = D\dot{\theta}(t)$

例として、図 1.2 に示す 1 自由度振動系の運動を考えよう。

■ 例 1.2 図 1.2 において、マスの質量を M 、バネ定数を K 、外力を $f(t)$ 、マスの変位を y とする。図示のように下向きを正の方向とする。このとき、マス M に働く力は図 1.2 の右図に示す通りとなり、力の総和は $f + Mg - Ky$ となる。よって

$$M\ddot{y}(t) = f(t) + Mg - Ky(t)$$

が成り立つ。変位に関する項を左辺にまとめて整理すると、運動方程式

$$\ddot{y}(t) + \frac{K}{M}y(t) = \frac{1}{M}f(t) + g \tag{1.2}$$

を得る。この式は変位 $y(t)$ に関する 2 階微分方程式である。

ただし、上述の運動方程式には定数項である重力を含み、扱うには不便である。そこで、この定数項を運動方程式からなくすことを考える。ここで、外力 $f = 0$ で、重力とバネの反発力が釣り合って質量が止まった状態を考える。このときの変位を y_0 とすると $Mg = Ky_0$ が成立する。次に、重力との釣り合い状態からの変位 $\Delta y = y - y_0$ に関する運動方程式を考える。 y_0 が定数であることを考慮すれば、 $\Delta\ddot{y} = \ddot{y}$ が成り立つ。ゆえに、上の微分方程式から

$$\Delta\ddot{y}(t) + \frac{K}{M}\Delta y(t) = \frac{1}{M}f(t) \tag{1.3}$$

が得られる。すなわち、重力との釣り合い状態からの変位 Δy を考えれば、重力を運動方程式から排除することができる。

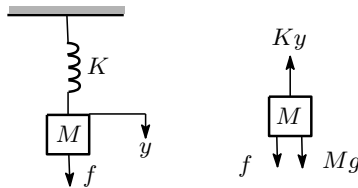


図 1.2 1 自由度振動系

□

次に、より複雑な例を挙げよう。

【例題 1.1】 図 1.3 に示す自動車サスペンション制御のための 1/4 モデル (四つの車輪の内の一つに関するモデル) を求めよ。図中では、 M_1 はシャシーの質量、 M_2 は車体の質量、 K_s と D はサスペンションのバネ定数と粘性摩擦定数、 K_w は車輪のバネ定

数である。 $y(t)$ は車体の変位， $x(t)$ はシャシーの変位を表す。ただし，各変位は自由状態からではなく，重力とのつり合い状態からのものとする。また， $r(t)$ は路面から車輪軸までの距離を表す。路面に段差があると，タイヤの変形により $r(t)$ が変化する。サスペンションの目的から制御したい出力を車体の変位 y とし，また外乱入力は r である。

解答 まず，運動方程式を立てるために M_1 と M_2 に加わる力を図で解析する。ここで上向きを正とする。この力解析の際，作用と反作用の法則から M_1 ， M_2 間のバネとダンパが両者に加える力は大きさが同じで，方向が逆であることに注意する。例えば， K_s の正の方向への相対変位（つまり伸び）は $y - x$ なので， M_2 に働く力は $K_s(y - x)$ で，下向きである[†]。一方， M_1 に働く力は同じ大きさで，上向きである。

M_1 と M_2 に加わる力は図 1.4 に示す通りである。この図より，運動方程式

$$M_1 \ddot{x} = D(\dot{y} - \dot{x}) + K_s(y - x) - K_w(x - r) \tag{1.4}$$

$$M_2 \ddot{y} = -D(\dot{y} - \dot{x}) - K_s(y - x) \tag{1.5}$$

を得る。

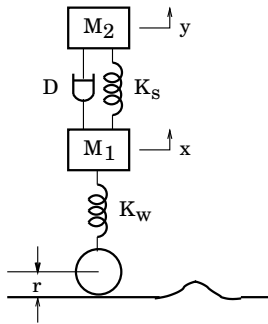


図 1.3 自動車の 1/4 モデル

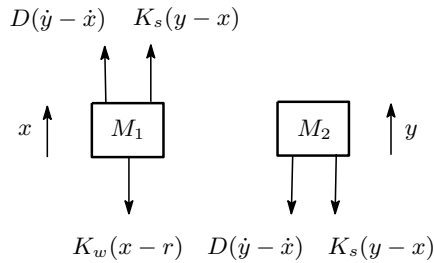


図 1.4 力の解析

◇

1.2.2 電気系

電気系の場合，抵抗 R ，コンデンサ C とコイル L の三つの基本要素がある（図 1.5）。各要素を流れる電流 $i(t)$ と両端の電圧 $v(t)$ の間の関係は次のようになる。

抵抗 R : $v(t) = Ri(t)$

コンデンサ C : $i(t) = C\dot{v}(t)$

コイル L : $v(t) = L \frac{di(t)}{dt}$

これらの間の関係を支配するのは Kirchhoff の電流則と電圧則である。

[†] $y - x < 0$ のとき， $K_s(y - x) < 0$ となるから方向は図と逆で上向きになる。つまり，バネの力の符号で実際の力の方向が判明できるので， $y - x > 0$ の場合について考えるだけでよいのである。

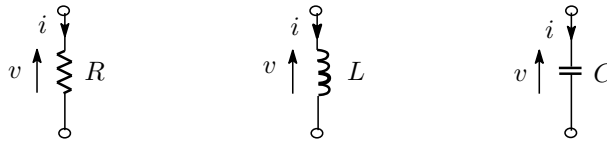


図1.5 電気系の基本要素

■ 例 1.3 図 1.6 に示す並列 LCR 回路の運動方程式を求める．電流源の電流を $i(t)$ ，出力電圧を $v(t)$ ，抵抗，コンデンサとコイルを流れる電流をそれぞれ i_R ， i_C ， i_L とすると，

$$i_R(t) = \frac{1}{R}v(t), \quad i_C(t) = C\dot{v}(t), \quad i_L(t) = i_L(0) + \frac{1}{L} \int_0^t v(\tau) d\tau$$

が成り立つ．次に， $i_L(0) = 0$ と仮定して Kirchhoff の電流則を用いると，

$$\begin{aligned} i(t) &= i_R(t) + i_C(t) + i_L(t) \\ &= \frac{1}{R}v(t) + C\dot{v}(t) + \frac{1}{L} \int_0^t v(\tau) d\tau \end{aligned}$$

が得られる．本式から初期電圧 $v(0) = Ri(0)$ が求まる．さらに，上式の両辺を微分して整理すると，最終的に次の 2 階微分方程式を得る．

$$\ddot{v}(t) + \frac{1}{RC}\dot{v}(t) + \frac{1}{LC}v(t) = \frac{1}{C} \frac{di(t)}{dt} \quad (1.6)$$

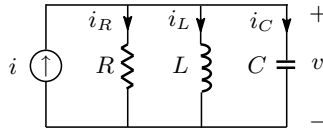


図1.6 並列 LCR 回路

□

1.2.3 メカトロ系

メカトロ (電子機械) 系の場合，電子的な駆動部 (アクチュエータ) と機械的な機能部から構成される．多くの制御対象はこの範疇に属する．その典型はモータと負荷からなるシステムである．このようなシステムのモデルを作るとき，アクチュエータ (例えばモータ) の特性も知る必要がある．

■ 例 1.4 図 1.7 の無負荷 DC サーボモータを考える．ただし，モータコイルのインダクタンスは十分小さいとし，無視する．

ここで抵抗を R ，モータ軸の慣性モーメントを J ，粘性摩擦係数を D とする．また，入力電圧を u ，モータの逆起電力を v_c ，回路を流れる電流を i ，モータの回転角速度を ω ，モータトルクを τ とする．電気的にはモータ回転の反作用として駆動回路は逆起電力

$$v_c(t) = K\omega(t) \quad (1.7)$$

を受けるので，

$$i(t) = \frac{u(t) - v_c(t)}{R} \quad (1.8)$$

の関係が成り立つ。ただし、 K はモータ定数である。また機械的にはモータが回転軸に加えるトルクは

$$\tau(t) = Ki(t) \quad (1.9)$$

であり、トルクのつり合い関係

$$\tau(t) = J\dot{\omega} + D\omega(t) \quad (1.10)$$

が成り立つ。式(1.7)を式(1.8)に代入すると

$$i(t) = \frac{1}{R}u(t) - \frac{K}{R}\omega(t)$$

となる。さらに、本式と式(1.9)を式(1.10)に代入することによって入力 u と出力 ω に関する 1 階微分方程式

$$\dot{\omega}(t) + \frac{K^2 + RD}{JR}\omega(t) = \frac{K}{JR}u(t) \quad (1.11)$$

が導かれる。

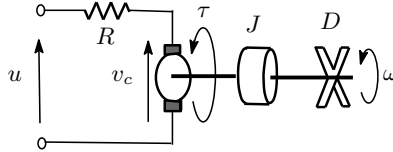


図 1.7 直流サーボモータ

□

明らかに、制御対象が変われば運動方程式も変わる。特に、高次の微分方程式や多変数の微分方程式になると、数式はきわめて複雑になり不便である。したがって、一般性をもつ制御理論を構築するにはもっと簡潔な表現が必要である。制御理論でよく使われるモデル表現は伝達関数(行列)と状態方程式の二種類である。以下の節ではこれらについてそれぞれ説明し、両者の関係も明らかにする。

1.3 伝達関数表現

これ以降、信号 $x(t)$ の Laplace 変換を $\hat{x}(s)$ で表すことにする。例 1.1 のクルーズ制御において駆動力と車速間の関係だけに注目したいとき、初期速度を $v(0) = 0$ とおいて考えることができる。この場合、Laplace 変換の微分公式を利用して微分方程式

$$M\dot{v}(t) + Dv(t) = f(t)$$

の両辺を変換すると、

$$(Ms + D)\hat{v}(s) = \hat{f}(s)$$

を得る．ただし， $\hat{v}(s)$, $\hat{f}(s)$ は $v(t)$, $f(t)$ の Laplace 変換である．その比

$$G(s) = \frac{\hat{v}(s)}{\hat{f}(s)} = \frac{1}{Ms + D} \quad (1.12)$$

が伝達関数と定義される．すなわち，常微分方程式で表された入出力間の関係が Laplace 変換により代数関係に簡略される．当然ながら，微分方程式を扱うよりも代数演算の方がはるかに容易である．これは伝達関数を用いる最大の利点である．明らかに，伝達関数は入出力に依存せず，システム自身の性質で決まる．このことは線形システムの特徴である．

一般的には，線形システムの入力を $u(t)$ ，出力を $y(t)$ とし，対応する Laplace 変換をそれぞれ $\hat{u}(s)$, $\hat{y}(s)$ すると，その伝達関数 (transfer function) は

$$G(s) = \frac{\hat{y}(s)}{\hat{u}(s)} \quad (1.13)$$

で与えられる．また，多入出力系の場合，伝達行列 (transfer matrix) は

$$\hat{y}(s) = G(s)\hat{u}(s) \quad (1.14)$$

を満たす関数行列 $G(s)$ で定義される．

伝達関数 (行列) の定義から分かるように，伝達関数は入力と出力の関係だけを表しており，システム内部状態の初期値と出力の関係は表現していない．したがって，伝達関数表現では陰に初期状態を零と仮定している．このことに注意されたい．

もう一つの例を挙げる．

【例題 1.2】 例 1.4 の DC モータと例 1.3 の LCR 回路の伝達関数を求めよ．

解答 DC モータの運動方程式は

$$\dot{\omega}(t) + \frac{K^2 + RD}{JR} \omega(t) = \frac{K}{JR} u(t)$$

で与えられる．零初期値の条件の下で上式の両辺を Laplace 変換し整理すると，電圧入力から角速度出力までの伝達関数

$$P_1(s) = \frac{\hat{\omega}(s)}{\hat{u}(s)} = \frac{K/JR}{s + (K^2 + RD)/JR} \quad (1.15)$$

を得る．また，LCR 回路に関する微分方程式は

$$\ddot{v}(t) + \frac{1}{RC} \dot{v}(t) + \frac{1}{LC} v(t) = \frac{1}{C} \frac{di(t)}{dt}$$

であるが，両辺について Laplace 変換を行うと伝達関数

$$P_2(s) = \frac{\hat{v}(s)}{\hat{i}(s)} = \frac{s/C}{s^2 + s/RC + 1/LC} \quad (1.16)$$

が求まる．

◇

システムに時間遅れ (time delay) 要素を含まない場合, 伝達関数は変数 s に関する有理関数となる. また, 多入出力系するとき有理関数行列となる. このようなシステムは有限次元システムと呼ばれる. しかし, 伝達関数表現の強みは時間遅れ要素などの無限次元システムも表現できることにある.

■ 例 1.5 熱交換機, バルブ機械や化学プラントなどでは熱やエネルギーの伝達は流体 (空気, 液体) を通して行うので, 入力を印加してから出力が反応するまでに時間がかかり, 時間の遅れが生じる.

例えば, 図 1.8 のパイプの左端から温度 T の空気 (入力 $u(t)$) を入れて, 時間 τ が経ってから右端の空気 (出力 $y(t)$) も同じ温度になったとする. この熱交換のプロセスを精密に描写することは極めて困難であるが, 制御の立場では入力と出力の関係が分ればよいので, このプロセスを理想化したむだ時間 (time delay) 要素, すなわち

$$y(t) = u(t - \tau), \quad \forall t \geq \tau \quad (1.17)$$

で記述することができる. 両辺を Laplace 変換すると, むだ時間要素の伝達関数は

$$G(s) = \frac{\hat{y}(s)}{\hat{u}(s)} = e^{-\tau s} \quad (1.18)$$

となることが分かる. 明らかに, この伝達関数は s の有理関数ではない. □

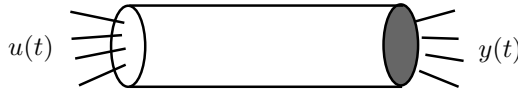


図 1.8 熱空気の伝達

1.3.1 伝達関数の次数, プロパー性と次数差

有理関数の伝達関数で表されるシステムは有限次元システム (finite dimensional system) と呼ばれ, その分母多項式の次数は伝達関数の次数 (degree) という. そうでないシステムは無次元システム (infinite dimensional system) と呼ばれる. 例えば, むだ時間要素について, $e^{\tau s}$ の Taylor 変換を使うと

$$e^{-\tau s} = \frac{1}{e^{\tau s}} = \frac{1}{1 + \tau s + (\tau s)^2/2! + \cdots + (\tau s)^n/n! + \cdots}$$

と書け, 無限次元系であることが分かる. 本書では, 有限次元システムだけを扱う.

また, 有理伝達関数で分母多項式の次数が分子多項式以上であるとき, プロパー (proper) であるという. さらに, 分母多項式の次数が分子多項式の次数より高いとき, 厳密にプロパー (strictly proper) であるという. 例えば, 以下の伝達関数はプロパーである.

$$G_1(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}, \quad G_2(s) = \frac{2s^2 + 1}{s^2 + 3s + 5} \quad (1.19)$$

特に, $G_1(s)$ は厳密にプロパーである. 一方,

$$\frac{s^2 + 2s + 1}{s + 10} = s - 8 + \frac{81}{s + 10} \quad (1.20)$$

のような伝達関数はプロパーでない. プロパーでない伝達関数は, 分子多項式の次数が分母よりも高いがゆえに, 純粋な微分動作を有する (上式右辺の s の項は微分器である). 物理的には, 信号の微分はその未来値に依存するので, プロパーでない伝達関数ではその出力が入力の未来値に依存することになる. このようなシステムは, 因果性をもつ物理世界では存在しえない. したがって, 制御対象が常にプロパーであるだけでなく, 制御器もプロパーなものに限定しなければならない. これはシステム設計における制約条件の一つである.

さらに, 伝達関数分母多項式と分子多項式の次数の差は伝達関数の次数差 (relative degree, 相対次数ともいう) と呼ばれる. したがって, 次数差が負である伝達関数はプロパーではない. 一方, 次数差が零または正の伝達関数はプロパーとなる. 次数差は入力が入力に伝達されるまでの信号遅れ要因の一つであり, 応答性に大きな影響を与える.

1.3.2 伝達関数の極と零点

すでに述べたように, 1 入出力の有限次元システムは有理関数の伝達関数で記述できる. したがって, その伝達関数は

$$G(s) = \frac{n(s)}{d(s)} = \frac{b_{m+1}s^m + b_m s^{m-1} + \cdots + b_2 s + b_1}{s^n + a_n s^{n-1} + \cdots + a_2 s + a_1} \quad (1.21)$$

のように分母多項式 $d(s)$ と分子多項式 $n(s)$ の比で書ける. なお, s^n の係数が 1 でないとき, その係数で分母分子を割ると, 常に 1 とおける.

分母多項式 $d(s)$ の根 p_i ($i = 1, \dots, n$) は伝達関数 $G(s)$ の極 (pole) といい,

$$d(p_i) = 0 \Rightarrow G(p_i) = \infty \quad (1.22)$$

を満たす. 一方, 分子多項式 $n(s)$ の根 z_j ($j = 1, \dots, m$) は伝達関数 $G(s)$ の零点 (zero) といい,

$$n(z_j) = 0 \Rightarrow G(z_j) = 0 \quad (1.23)$$

を満たす. 極と零点はシステムに関する非常に重要な概念である. これらはシステムの応答を特徴づけている. これに関しては, 後に詳述する.

■ 例 1.6 伝達関数

$$G(s) = \frac{5s + 3}{s^2 + 2s + 5} = \frac{5(s + 0.6)}{(s + 1)^2 + 4}$$

の分子多項式の根は -0.6 で、分母多項式の根は $-1 \pm j2$ である。よって、この伝達関数の零点は $z = -0.6$ 、極は $p_1 = -1 - j2$, $p_2 = -1 + j2$ となる。□

1.4 状態空間表現

1.4.1 システムの状態と状態方程式

■ 例 1.7 例 1.2 の 1 自由度振動系の運動方程式は

$$\ddot{y}(t) + \frac{K}{M}y(t) = \frac{1}{M}f(t) \quad (1.24)$$

で与えられ、重力とのつり合い位置からの変位 $y(t)$ に関する 2 階微分方程式である。

ここで、この 2 階微分方程式を 1 階微分方程式に等価変換することを考える。このために、中間変数 $\dot{y}(t)$ (速度) を導入する。記号を分かりやすくするため、 $x_1 = y$, $x_2 = \dot{y}$ とおく。すると、まず $x_2 = \dot{y} = \dot{x}_1$ より

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

の関係が成立する。次に、 $x_2 = \dot{y}$ および運動方程式から

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{K}{M}x_1(t) + \frac{1}{M}f(t)$$

が得られる。この二つの式は共に 1 階の微分方程式である。導入された新しい変数 x_1 , x_2 はシステムの状態 (state) という。さらに、これらの状態をベクトルにまとめて

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

と書くと、上述の二つの連立 1 階微分方程式は

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{M} & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} f(t) \quad (1.25)$$

のようにベクトルに関する 1 階微分方程式と書ける。このような式は状態方程式 (state equation) といい、 $x(t)$ は状態ベクトル (state vector) という。□

この例から分かるように、高階微分方程式の代わりにいくつかの 1 階連立微分方程式で運動モデルを表すことができる。ただし、その代償として微分方程式の数を増やさなければならない。しかし、連立するいくつかの 1 階微分方程式は常に一つのベクトル形式の 1 階微分方程式にまとめることができるので、行列論の知識を駆使すれば一つのスカラー形式の 1 階微分方程式のように扱うことが可能である。

一般に、状態ベクトル $x(t) \in \mathbf{R}^n$ 、入力 $u(t) \in \mathbf{R}^m$ 、出力 $y(t) \in \mathbf{R}^p$ の有限次元線形系は

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (1.26)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (1.27)$$

で表せる。ただし、 (A, B, C, D) は適切な次元をもつ係数行列である。式 (1.26) は状態方程式 (state equation)、式 (1.27) は出力方程式 (output equation) と呼ばれる。また、状態の数 n をシステムの次元 (dimension) と呼ぶ。

さらに、この状態方程式は

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} \quad (1.28)$$

のようにより簡潔な表現にまとめることもできる。

どんなに複雑な有限次元線形システムでも、適切に状態ベクトルを選べば、式 (1.26) で表現できるので、式 (1.26) だけを研究すればよいことになる。これは状態方程式表現の大きな魅力である。

なお、状態方程式の係数行列が定数ではなく、時間の関数である場合、すなわち、状態方程式が

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \quad (1.29)$$

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t) \quad (1.30)$$

であるとき、システムは時変 (time-varying) であるという。他方、式 (1.26)、(1.27) のように係数行列が定数行列である場合、システムは時不変 (time-invariant) であるという。本書では、時不変系について述べる。

1.4.2 状態の選び方

状態方程式を立てるとき、まず状態を適切に選ぶ必要がある。状態とは、システムの運動特性を 1 階の連立微分方程式で表すのに必要最小限の変数である。一般に物理法則に基づいて状態方程式を立てるとき、機械系の場合は各質量の変位と速度 (回転系の場合は角度と角速度)、そして電気系の場合はコンデンサの電圧とコイルの電流を状態として選ぶ。後で示すように、状態の選択は唯一ではなく、無数にある。これらはすべて状態変換によって結ばれ、入出力伝達関係が等しい意味で等価である。

【例題 1.3】 例題 1.1 のサスペンション系の状態方程式を求めよ。ただし、状態ベクトルを次のように選ぶ。

$$z = [z_1 \ z_2 \ z_3 \ z_4]^T = [x \ \dot{x} \ y \ \dot{y}]^T$$

解答 まず、 $\dot{z}_1 = z_2$ 、 $\dot{z}_3 = z_4$ と $\dot{z}_2 = \dot{x}$ 、 $\dot{z}_4 = \dot{y}$ が成り立つ。そして、運動方程式より

$$\dot{z}_2 = -\frac{K_s + K_w}{M_1}x - \frac{D}{M_1}\dot{x} + \frac{K_s}{M_1}y + \frac{D}{M_1}\dot{y} + \frac{K_w}{M_1}r$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{K_s + K_w}{M_1} z_1 - \frac{D}{M_1} z_2 + \frac{K_s}{M_1} z_3 + \frac{D}{M_1} z_4 + \frac{K_w}{M_1} r \\
\dot{z}_4 &= \frac{K_s}{M_2} x + \frac{D}{M_2} \dot{x} - \frac{K_s}{M_2} y - \frac{D}{M_2} \dot{y} \\
&= \frac{K_s}{M_2} z_1 + \frac{D}{M_2} z_2 - \frac{K_s}{M_2} z_3 - \frac{D}{M_2} z_4
\end{aligned}$$

を得る．最後に，これらを一つのベクトル方程式にまとめると，状態方程式

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{K_s + K_w}{M_1} & -\frac{D}{M_1} & \frac{K_s}{M_1} & \frac{D}{M_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{K_s}{M_2} & \frac{D}{M_2} & -\frac{K_s}{M_2} & -\frac{D}{M_2} \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K_w}{M_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} r \quad (1.31)$$

が得られる．また，出力である車体の変位 $y(t)$ は

$$y = [0 \ 0 \ 1 \ 0]z \quad (1.32)$$

と書ける．

◇

1.5 伝達関数と状態方程式の関係

すでに述べたように，伝達関数は入出力関係しか表しておらず，初期状態による応答を表現できない．したがって，伝達関数をいうときには暗黙に零初期状態を仮定している．一方，状態方程式では入力と初期状態の両方による応答をすべて表現できる．

初期状態 $x(0) = 0$ のもとで状態方程式 (1.26) を Laplace 変換すると，

$$\begin{aligned}
s\hat{x}(s) &= A\hat{x}(s) + B\hat{u}(s) \Rightarrow (sI - A)\hat{x}(s) = B\hat{u}(s) \\
\Rightarrow \hat{x}(s) &= (sI - A)^{-1}B\hat{u}(s)
\end{aligned} \quad (1.33)$$

が導出される．さらに，この式を $\hat{y}(s) = C\hat{x}(s) + D\hat{u}(s)$ に代入すると，

$$\hat{y}(s) = [C(sI - A)^{-1}B + D]\hat{u}(s) \quad (1.34)$$

を得る．よって，入出力間の伝達行列は

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \quad (1.35)$$

となる．これは状態方程式と伝達関数の関係を表している．すなわち，システムの状態方程式が与えられれば，その伝達行列は上式で計算できる．

逆に，伝達行列が与えられる場合，対応する状態方程式を求めることも可能である．このことは実現 (realization) という．実現を求める方法の一つは，5章で紹介する正準形を利用することである．ただし，状態の選び方は一意でないため，伝達行列の実現は無数にある．

さらに，伝達行列間の演算を容易にするために，記号

$$\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right] := C(sI - A)^{-1}B + D \quad (1.36)$$

を用いる場合がある．そして，次の記号もしばしば使われる．

$$(A, B, C, D) := C(sI - A)^{-1}B + D \quad (1.37)$$

1.6 非線形モデルと線形近似

物理モデルは一般に非線形の微分方程式で与えられる．

【例題 1.4】 図 1.9 に示す倒立振り子を考える．振り子は質量を無視できる剛体の棒で台車につながっており，棒の長さは l である．また，台車と地面，棒とジョイントの間の摩擦を無視する．このシステムの目的は，台車に適切な力入力 u を加えることによって振り子の姿勢角 θ と台車の位置 y を制御することである．その運動方程式を導け．

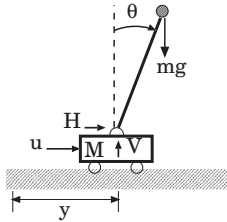


図 1.9 倒立振り子

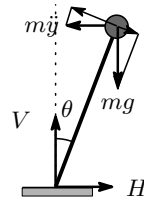


図 1.10 回転運動のトルク解析

解答 まず H, V をそれぞれ台車が振り子に働く水平方向と鉛直方向の力とする．振り子先端質量の横方向の変位は $y + l \sin \theta$ であり，縦方向の変位は $l \cos \theta$ であるから，振り子の縦と横方向にそれぞれ Newton の法則を適用すると，

$$\begin{aligned} H &= m \frac{d^2}{dt^2} (y + l \sin \theta) = m\ddot{y} + ml\ddot{\theta} \cos \theta - ml(\dot{\theta})^2 \sin \theta \\ V - mg &= m \frac{d^2}{dt^2} (l \cos \theta) = ml[-\ddot{\theta} \sin \theta - (\dot{\theta})^2 \cos \theta] \end{aligned} \quad (1.38)$$

が得られる．また，台車に関する運動方程式は

$$M\ddot{y} = u - H \Rightarrow M\ddot{y} + m\ddot{y} + ml\ddot{\theta} \cos \theta - ml(\dot{\theta})^2 \sin \theta = u \quad (1.39)$$

で与えられる．さらに，振り子のジョイント回りの回転運動を考えるにあたって，Newton の法則が加速度零の慣性座標系においてのみ成り立つことに注意する必要がある．Newton の法則を使えるようにするためには，台車と質量 m の並進運動を仮想力 $-M\ddot{y}$ と $-m\ddot{y}$ で止めておく必要がある．すると，図 1.10 から分かるように質量 m に働く回転トルクは $(mg \sin \theta - m\ddot{y} \cos \theta)l$ になる．振り子の慣性モーメントが ml^2 であることより，回転運動の方程式は

$$ml^2\ddot{\theta} = (mg \sin \theta - m\ddot{y} \cos \theta)l \quad (1.40)$$

になる．これらは変数 θ の非線形関数を含む非線形の微分方程式である．

以下では，運動方程式 (1.39)，(1.40) を状態方程式に書き換えてみる．式 (1.40) から $\ddot{\theta}$ を計算すると

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{l}(g \sin \theta - \ddot{y} \cos \theta) \quad (1.41)$$

を得る．これを式(1.39)に代入し $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ を使って整理すると

$$(M + m \sin^2 \theta) \ddot{y} + mg \sin \theta \cos \theta - ml(\dot{\theta})^2 \sin \theta = u$$

$$\Rightarrow \ddot{y} = \frac{ml(\dot{\theta})^2 \sin \theta - mg \sin \theta \cos \theta}{M + m \sin^2 \theta} + \frac{1}{M + m \sin^2 \theta} u$$

が導かれる．これをさらに式(1.41)に代入して整理すると

$$\ddot{\theta} = \frac{(M + m)g \sin \theta - ml(\dot{\theta})^2 \sin \theta \cos \theta}{(M + m \sin^2 \theta)l} - \frac{\cos \theta}{(M + m \sin^2 \theta)l} u$$

が得られる．すると，状態ベクトル $[x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4] = [y \ \dot{y} \ \theta \ \dot{\theta}]$ について次の非線形状態方程式が求まる．

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{mlx_4^2 \sin x_3 - mg \sin x_3 \cos x_3}{M + m \sin^2 x_3} \\ x_4 \\ \frac{(M+m)g \sin x_3 - mlx_4^2 \sin x_3 \cos x_3}{(M+m \sin^2 x_3)l} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M+m \sin^2 x_3} \\ 0 \\ -\frac{\cos x_3}{(M+m \sin^2 x_3)l} \end{bmatrix} u$$

◇

1.6.1 平衡点

一般に，非線形システムの状態を $x \in \mathbf{R}^n$ ，入力を $u \in \mathbf{R}^m$ ，出力を $y \in \mathbf{R}^p$ とするとき，その状態方程式および出力方程式は

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (1.42)$$

$$y = h(x) \quad (1.43)$$

で表される．ある (x_0, u_0) において $\dot{x}_0 = 0$ が成り立つとする．入力を u_0 のままにしておくと，状態の導関数 \dot{x} がずっと零になるので $x(t) \equiv x_0$ となる．すなわち，システムの状態が静止し続ける．ゆえに， (x_0, u_0) が非線形システムの平衡点 (equilibrium) と呼ばれる．これは運動方程式において，変数の導関数値がすべて零である状況と等価である．

平衡点を求めるとき，運動方程式を非線形の状態方程式に書き直してから計算してもよいが，一般に複雑になる．直接運動方程式において状態の導関数値を零とにおいて計算した方がずっと簡単である．例えば，上記振子の例では平衡点で $\dot{\theta}_0 = \dot{y}_0 = \ddot{\theta}_0 = \ddot{y}_0 = 0$ であるので，運動方程式(1.39)と(1.40)から平衡点における変位 y_0 ， θ_0 と入力 u_0 を計算すると

$$u_0 = 0, \quad y_0 \text{ 任意}, \quad 0 = mg \sin \theta_0 l \Rightarrow \theta_0 = 0, \pi$$

が求まる．状態 θ に関して平衡点が二つあり，一意でない．物理的には，外力を加えない条件下で振子が真上あるいは真下に静止できることを意味する．さらに，台車の位置 y は無限個の平衡点を有する．

1.6.2 線形近似

ある限られた範囲内でシステムの振舞いを調べる場合、非線形のモデルを近似的に線形化することが可能である。例えば、上記振子の例において制御目的は振子を真上に立てることなので、平衡点は $\dot{y}_0 = y_0 = \dot{\theta}_0 = \theta_0 = 0, u_0 = 0$ となる。その近傍において変位(角度)と(角)速度が十分に小さいと仮定できる。このとき、 $\sin \theta \approx \theta, \cos \theta \approx 1$ が成り立ち、2次以上の項 $(\dot{\theta})^2, \theta(\dot{\theta})^2$ や $\ddot{\theta}\theta$ は無視できる。よって、線形近似モデルでは(1.39)と(1.40)が

$$M\ddot{y} = u - m\ddot{y} - ml\ddot{\theta}, \quad ml\ddot{\theta} = mg\theta - m\ddot{y} \quad (1.44)$$

になる。両式の差からまず

$$M\ddot{y} = u - mg\theta \Rightarrow \ddot{y} = -\frac{mg}{M}\theta + \frac{1}{M}u$$

を得る。次に、式(1.44)の2番目の式を変形した式 $\ddot{\theta} = (g\theta - \ddot{y})/l$ に上式を代入して整理すると

$$\ddot{\theta} = \frac{(M+m)g}{Ml}\theta - \frac{1}{Ml}u$$

が得られる。さらに、この二つの式から線形近似した状態方程式を求めることができる。

練習問題

- 1.1 図1.11に示す直列LCR回路の状態方程式と出力方程式を求めよ。ただし、出力をコンデンサCの電圧 y とする。

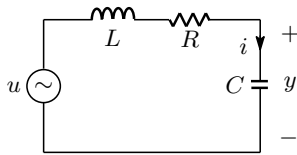


図 1.11 直列LCR回路

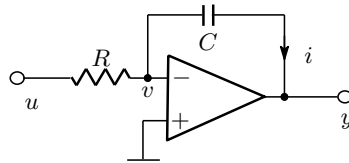


図 1.12 積分回路

- 1.2 図1.12に示す演算増幅器回路において、増幅倍数が十分に大きいため、演算増幅器内部を流れる電流および電圧 v はすべて0と考えてよい。出力 y を演算増幅器の出力電圧とする。その状態方程式を求め、この回路が積分器の役割を果たすことを示せ。
- 1.3 図1.13の機械システムについて、その状態方程式を導け。ただし、 M_1 の変位を y_1 、 M_2 の変位を y_2 とし、質量と地面の摩擦は無視する。
- 1.4 図1.14に示す簡略化した飛行機のモデルを考える。座標原点は重心Pである。巡航速度 v_0 、巡航高度 h_0 のもとでの平衡状態は θ_0, u_0 である。また、平衡状態からのピッチ角偏差を θ 、昇降舵角偏差を u 、高度偏差を h とする。これらの偏差が十分に小さいとき、図示する揚力は $f_1 = k_1u, f_2 = k_2\theta$ で与えられ

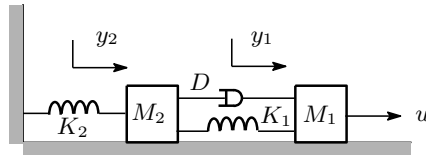


図 1.13 マス・バネ系

る．飛行機の質量は m ，重心周りの慣性モーメントは J ，空力減衰によるトルクは $b\dot{\theta}$ である．本システムの上下運動と回転運動の運動方程式を求めてから， $\ddot{\theta} \approx 0$ のときの u から h までの線形近似状態方程式と伝達関数を求めよ．

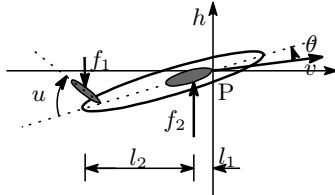


図 1.14 飛行機の高度制御

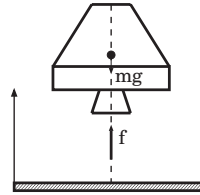


図 1.15 月面探査機

- 1.5 図 1.15 に示すのは月面に軟着陸する月面探査機のモデルである．探査機の質量を m とすると，スラスターの推力は $f = km\dot{y}$ である．入力を $u = \dot{m}$ ，探査機の高度を y とする．月表面の重力定数を g とし，このシステムの状態 (y, \dot{y}, m) に関する状態方程式を導出せよ（ヒント：質量が変化する場合の Newton の法則は $F = d(mv)/dt$ となる．ただし， v は速度を表す）．
- 1.6 図 1.16 に示す 2 重振子の運動方程式を求めよ．ただし，棒の質量を無視し，角度が十分に小さくバネが常に水平であるとする．棒の長さは l [m] で，バネは棒の下から $1/3$ のところに取り付けられる．

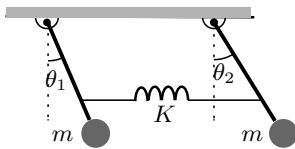


図 1.16 2 重振り子

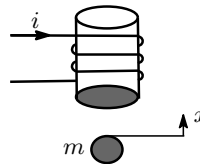


図 1.17 磁気浮上系

- 1.7 図 1.17 は磁気浮上システムを表している．鉄球と電磁石間の隙間を x とする．電磁石に電流 i を流すとき，鉄球に電磁吸引力 $f = ki^2/x^2$ [N] が働く．ただし， k は定数である．鉄球の質量を m [kg] とする．
- (a) 運動方程式を立てよ．
- (b) 平衡点 (x_0, \dot{x}_0, i_0) を求め， x_0 と i_0 の関係の物理的意味を吟味せよ．さらに，平衡点まわりの線形近似状態方程式を求めよ．（ヒント：2 変数関数の一次 Taylor 展開は $f(x + \Delta x, y + \Delta y) = f(x, y) + \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(x,y)} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(x,y)} \Delta y$ で与えられる）

1.8 図1.18に示しているのはマイクロフォンの簡略化モデルである．このシステムは一對のキャパシタ極板を電気回路とつなぐことで構成される．極板aはマイクロフォンの枠に固定されるが，極板bはバネ K とダンパ D を通して枠につなぐ．音波が極板bに力 $f(t)$ を加える．極板の表面積は A ，極板間の距離が x で，材料の誘電率が ϵ であるとき，極板間のキャパシタンス $C(x)$ は $C(x) = \epsilon A/x$ で与えられる．また，電荷 q と極板間電圧 e の関係は $q = C(x)e$ であり，電界は極板bに抵抗力 $f_e = q^2/(2\epsilon A)$ を加える．

- (a) 運動方程式を立てよ．
- (b) 平衡点および平衡点近傍の線形近似モデルを求めよ．
- (c) 線形近似から状態方程式を導け．

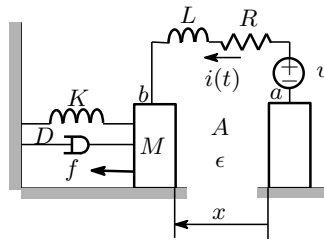


図1.18 マイクロフォン

2

線形システムの構造解析

本章では、線形システムの可制御性、可観測性や極、零点、およびシステムの結合などの構造的性質について説明する。これらは状態空間表現をベースとする現代制御理論を理解するのに欠かせない基礎的なものである。

ここでは、 n 次元、 m 入力、 p 出力の状態方程式

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

あるいは等価的に次数が n である $p \times m$ の伝達行列

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

で与えられる有限次元線形系について考察する。

2.1 状態方程式の解

システムの状態方程式が与えられたとき、システムの性能を計算機シミュレーションなどで確認したい場合がある。このようなとき、状態方程式の解を求める必要がある。以下、その解を与える。

状態方程式(2.1)の解を述べる前に、まず行列指数関数 e^{At} について説明しておく。スカラーの指数関数 e^{at} は次のようにTaylor展開できる。

$$e^{at} = 1 + at + \frac{1}{2!}(at)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}(at)^n + \cdots$$

これに模して、正方行列 A に関する行列指数関数 e^{At} は

$$e^{At} = I + At + \frac{1}{2!}(At)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}(At)^n + \cdots \quad (2.2)$$

と定義される。この行列指数関数は以下の性質をもつ。

- (1) $e^{A \cdot 0} = I$
- (2) $e^{A(t+s)} = e^{At}e^{As}$

$$(3) \quad (e^{At})^{-1} = e^{-At}$$

$$(4) \quad \frac{de^{At}}{dt} = Ae^{At} = e^{At}A$$

性質(1)は $t=0$ を定義式(2.2)に代入することで得られる。(2)は式両辺を展開することによって確認できる。また、(2)に $s=-t$ を代入すれば $I=e^{At}e^{-At}$ となるので、逆行列の定義より(3)が分かる。(4)は式(2.2)両辺を t で微分して整理することによって導かれる。

行列の積が可換でない場合、つまり $AB \neq BA$ のとき、 $e^{(A+B)t}$ は e^{At} と e^{Bt} の積に分解できない。このことに注意されたい。

ここでまず、状態方程式解の一意性を示す。仮に初期状態 $x(t_0)$ から出発するシステム(2.1)に二つの解 $x_1(t)$ と $x_2(t)$ があるとすると、状態方程式を積分することによって

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x(t_0) + A \int_{t_0}^t x_1(\tau) d\tau + B \int_{t_0}^t u(\tau) d\tau \\ x_2(t) &= x(t_0) + A \int_{t_0}^t x_2(\tau) d\tau + B \int_{t_0}^t u(\tau) d\tau \end{aligned}$$

が得られる。ここで、 $0 < \rho < 1$ について正数 ϵ が $\epsilon \leq \rho/\|A\|$ を満たすとすると、この場合、時刻 $t \in [t_0, t_0 + \epsilon]$ について $x_1(t)$ と $x_2(t)$ の差は次の不等式を満足する。(行列ノルム $\|A\|$ とベクトルノルム $\|x\|$ については付録Aを参照)

$$\begin{aligned} \|x_1(t) - x_2(t)\| &= \|A \int_{t_0}^t (x_1(\tau) - x_2(\tau)) d\tau\| \\ &\leq \|A\| \int_{t_0}^t \|x_1(\tau) - x_2(\tau)\| d\tau \\ &\leq \|A\|(t - t_0) \sup_{[t_0, t_0 + \epsilon]} \|x_1(\tau) - x_2(\tau)\| \\ &\leq \epsilon \|A\| \sup_{[t_0, t_0 + \epsilon]} \|x_1(\tau) - x_2(\tau)\| \\ &\leq \rho \sup_{[t_0, t_0 + \epsilon]} \|x_1(\tau) - x_2(\tau)\| \\ \Rightarrow \sup_{[t_0, t_0 + \epsilon]} \|x_1(\tau) - x_2(\tau)\| &\leq \rho \sup_{[t_0, t_0 + \epsilon]} \|x_1(\tau) - x_2(\tau)\| \quad (2.3) \end{aligned}$$

$\rho < 1$ より、上式が成立するために区間 $[t_0, t_0 + \epsilon]$ において $x_1(t) = x_2(t)$ とならなければならない。よって、この区間において解が一意である。さらに、 $t_0 + \epsilon$ を初期時刻としてこの議論を繰り返していけば、すべての時間帯において状態方程式(2.1)の解が一意であることが分かる。

次に、入力 $u(t) \equiv 0$ のときの解を求める。この場合、状態方程式は

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \quad (2.4)$$

となる。行列指数関数の性質(4)により、 $x(t) = e^{At}a$ がこの式の一般解である

ことが確認できる．初期状態 $x(0)$ のもとで $a = x(0)$ となるので，入力がないときの状態方程式の解は

$$x(t) = e^{At}x(0) \quad (2.5)$$

となる．次に，定数変化法で入力がある場合の解を導出する．つまり，入力があるとき，その影響で行列指数関数の係数が $x(0)$ から $x(0) + w(t)$ に変化すると考え，状態方程式 (2.1) の解を

$$x(t) = e^{At}(x(0) + w(t)) \quad (2.6)$$

とおく．そして，これを状態方程式に代入して変数ベクトル $w(t)$ を求める．上式を微分して式 (2.1) に代入すると，

$$\begin{aligned} Ae^{At}(x(0) + w(t)) + e^{At}\dot{w}(t) &= Ae^{At}(x(0) + w(t)) + Bu(t) \\ \Rightarrow \dot{w}(t) &= e^{-At}Bu(t) \end{aligned} \quad (2.7)$$

を得る．式 (2.6) より $w(0) = 0$ は明らかである．よって，上式を積分すると

$$w(t) = \int_0^t e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau \quad (2.8)$$

が得られる．結局，状態方程式 (2.1) の解は

$$x(t) = e^{At}x(0) + e^{At} \int_0^t e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau \quad (2.9)$$

$$= e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \quad (2.10)$$

となる[†]．この解の特徴は，初期状態による第 1 項と入力による第 2 項の和となっていることである．これは線形システムの特徴であり，重ね合わせの原理と呼ばれる．

入力が $u(t) \equiv 0$ の場合の応答を零入力応答 (zero-input response) といい，初期状態が $x(0) = 0$ の場合の応答を零状態応答 (zero-state response) という．したがって，状態解の式において第 1 項は零入力応答，第 2 項は零状態応答を表している．

初期時刻が 0 でなく， t_0 のとき，状態方程式の解は

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \quad (2.11)$$

[†] ここで，積分区間に $t = 0$ が含まれることに注意する．これはインパルスのような入力も考えているためである．例えば，時刻 $t = 0$ でインパルス入力を印加する場合，積分区間に $t = 0$ を含めないとすると零状態応答が 0 という間違った結果になってしまう．

で与えられる．これは式(2.9)を次のように変形すれば分かる．

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{At}x(0) + e^{At} \left[\int_0^{t_0} e^{-A\tau} Bu(\tau)d\tau + \int_{t_0}^t e^{-A\tau} Bu(\tau)d\tau \right] \\ &= e^{A(t-t_0)} \left[e^{At_0}x(0) + e^{At_0} \int_0^{t_0} e^{-A\tau} Bu(\tau)d\tau \right] + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau)d\tau \\ &= e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau)d\tau \end{aligned}$$

なお， e^{At} の定義式の両辺を Laplace 変換すると

$$\mathcal{L}[e^{At}] = \frac{1}{s}I + \frac{1}{s^2}A + \frac{1}{s^3}A^2 + \dots \tag{2.12}$$

となるが，恒等式

$$(sI - A)\left(\frac{1}{s}I + \frac{1}{s^2}A + \frac{1}{s^3}A^2 + \dots\right) = I \tag{2.13}$$

を用いると， $\mathcal{L}[e^{At}] = (sI - A)^{-1}$ と書ける．よって，行列指数関数は

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1}] \tag{2.14}$$

に等しいことが分かる．すなわち，行列指数関数は逆 Laplace 変換で求めることができる．

【例題 2.1】 例 1.7 の 1 自由度振動系の応答を求めよ．ただし，初期状態は $x(0) = [1 \ 0]^T$ で，入力は単位インパルス $u(t) = \delta(t)$ とする．

解答 $\omega = \sqrt{K/M}$ とおくと，状態方程式の係数行列は

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix}$$

と書ける．よって，

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ \omega^2 & s \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{s}{s^2 + \omega^2} & \frac{1}{s^2 + \omega^2} \\ -\frac{\omega^2}{s^2 + \omega^2} & \frac{s}{s^2 + \omega^2} \end{bmatrix}$$

を得る．逆 Laplace 変換をすると

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1}] = \begin{bmatrix} \cos \omega t & \frac{1}{\omega} \sin \omega t \\ -\omega \sin \omega t & \cos \omega t \end{bmatrix}$$

が得られる．これを式(2.10)に代入して計算すれば，状態の応答

$$\begin{aligned} x(t) &= \begin{bmatrix} \cos \omega t \\ -\omega \sin \omega t \end{bmatrix} + \frac{1}{M} \int_0^t \begin{bmatrix} \frac{1}{\omega} \sin \omega(t - \tau) \\ \cos \omega(t - \tau) \end{bmatrix} \delta(\tau) d\tau \\ &= \begin{bmatrix} \cos \omega t + \frac{1}{M\omega} \sin \omega t \\ \frac{1}{M} \cos \omega t - \omega \sin \omega t \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2.15}$$

が求まる．ただし，インパルス信号の性質 $\int_0^t f(\tau)\delta(\tau)d\tau = f(0)$ を使った． ◇

公式(2.10)を用いることなく，状態の応答をすべて Laplace 変換だけで計算

することもできる．実際，初期状態 $x(0)$ のもとで状態方程式 (2.1) を Laplace 変換すると，

$$\begin{aligned} s\hat{x}(s) - x(0) &= A\hat{x}(s) + B\hat{u}(s) \Rightarrow (sI - A)\hat{x}(s) = x(0) + B\hat{u}(s) \\ \Rightarrow \hat{x}(s) &= (sI - A)^{-1}x(0) + (sI - A)^{-1}B\hat{u}(s) \end{aligned} \quad (2.16)$$

が導出される．後はこれを逆 Laplace 変換することで状態の解 $x(t)$ が計算できる．いまの例では， $\hat{u}(s) = 1$ より

$$\hat{x}(s) = (sI - A)^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s}{s^2 + \omega^2} + \frac{1}{M} \frac{1}{s^2 + \omega^2} \\ \frac{1}{M} \frac{s}{s^2 + \omega^2} - \frac{\omega^2}{s^2 + \omega^2} \end{bmatrix}$$

が得られる．逆 Laplace 変換をすれば上と同じ解が求まる．

2.2 双対性

伝達行列 $G(s)$ を転置 (transpose) して得られる

$$G^T(s) = B^T(sI - A^T)^{-1}C^T + D^T = \left[\begin{array}{c|c} A^T & C^T \\ \hline B^T & D^T \end{array} \right] \quad (2.17)$$

を $G(s)$ の双対システム (dual system) と呼ぶ．あるシステムに二つの物理的に異なる性質 A, B があつたとき，もし性質 B が数学的に双対システムの性質 A と等しい場合，性質 A, B は双対であるという．このような現象は物理の世界で多く見受けられるので，双対性の概念を利用すると，性質 A の数学的特性だけを調べれば性質 B の特性も分かり，数学的には非常に簡潔になる．次節から述べる可制御性と可観測性はその典型である．

2.3 可制御性

システムを制御する前提として，入力で制御したい信号を望まれるように動かせる必要がある．システム内部の信号はすべて状態によって生成されるから，まずシステムの状態を任意に制御できなければならない．このことを可制御性 (controllability) という．数学的には，可制御性は次のように定義される．

定義 2.1 任意に与えられた初期状態 $x(t_0) = x_0$ ，有限時刻 $t_f (> t_0)$ および終端状態 x_f に対し，式 (2.1) の解が $x(t_f) = x_f$ を満たすようにする有界な入力 $u(t)$ が存在すれば，式 (2.1) のシステムあるいは (A, B) は可制御 (controllable) であるという．そうでない場合は不可制御 (uncontrollable) であるという．

状態を位相平面(各状態を座標軸とする直交座標系)で見ると、可制御性は図2.1に示されるように、有限時間内で有界な入力で状態を任意の初期値 x_0 から任意に指定された終端状態 x_f へ移動できることに対応している。初期状態と終端状態はすべて任意で、状態空間のどの状態も取りうるものが可制御性のポイントである。これは3章で紹介する可安定性と本質的に異なるところである。

また、一般に状態の数は入力より多い。どうして少ない入力で状態を全部制御できるか、不思議に思うかもしれない。その味噌は、状態が指定時刻に終端状態に到達できればよく、途中の軌道を問わないところにある。

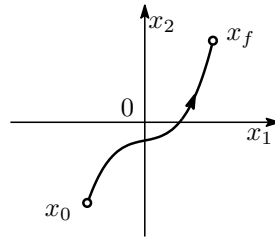


図2.1 状態の軌道

システムの可制御性は、定義にしたがって調べる必要はなく、次のいくつかの簡単な代数的条件で判定することができる。

定理2.1 以下の命題は等価である。

- (1) (A, B) が可制御である。
- (2) 可制御行列

$$C = \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

が行フルランクである。

- (3) 行列 $[A - \lambda I \quad B]$ が任意の $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して行フルランクである。
- (4) 行列 $[A - \lambda I \quad B]$ が任意の $\lambda \in \sigma(A)$ に対して行フルランクである。

ただし、 $\sigma(A)$ は行列 A の固有値集合を表す。この定理より、可制御性が状態方程式の係数行列 (A, B) だけに依存することが分かる。条件(2)は次数の低いシステムに対して使いやすい。また、条件(3)、(4)は A 行列がブロック対角や三角形などの特殊構造をもつシステムに関して利用しやすく、理論展開でよく用いられる。

本定理の命題(3)より (A, B) が不可制御のとき, ある λ について $[A - \lambda I \quad B]$ のランクが落ちる. すると,

$$v^*(A - \lambda I) = 0, \quad v^*B = 0$$

を満たすベクトル $v \neq 0$ がある. すなわち, この λ は必ず A の固有値となる. このような A の固有値を不可制御モード (uncontrollable mode) という.

この定理を証明する前に, まず二つの補題を示しておこう.

補題 2.1 任意の $t > 0$ について, 次の等価関係が成立する.

$$G_c(t) := \int_0^t e^{A\tau} B (e^{A\tau} B)^T d\tau > 0 \iff C \text{ が行フルランク}$$

証明 明らかに, $G_c(t)$ は半正定行列である. C が行フルランクであるとき, もし $G_c(t) > 0$ でなければ, 非零ベクトル $v \in \mathbf{R}^n$ があり,

$$0 = v^T G_c(t) v = \int_0^t \|v^T e^{A\tau} B\|^2 d\tau$$

を満たす. ノルムが常に非負なので, 上式が成り立つために

$$v^T e^{A\tau} B \equiv 0, \quad \tau \in [0, t]$$

でなければならない. 本式を τ について $(n-1)$ 階まで微分すると,

$$v^T e^{A\tau} B = 0, \quad v^T e^{A\tau} AB = 0, \quad \dots, \quad v^T e^{A\tau} A^{n-1} B = 0 \Rightarrow v^T e^{A\tau} C = 0$$

を得る. $v^T e^{A\tau} \neq 0$ なので, C の行フルランク性に矛盾する.

逆に, $G_c(t) > 0$ であるとき, C が行フルランクでないと仮定すると

$$v^T [B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1} B] = 0$$

を満たす $v \neq 0$ が存在する. Cayley-Hamilton の定理を繰り返し適用することによって, 任意の $i \geq 0$ について $v^T A^i B = 0$ を示せる. すると

$$v^T e^{A\tau} B = v^T B + v^T AB\tau + \dots + v^T A^i B\tau^i + \dots = 0, \quad \forall \tau \quad (2.19)$$

となる. よって, $v^T G_c(t) v = 0$ となり, $G_c(t) > 0$ に矛盾する.

補題 2.2 $\text{rank } C = k < n$ のとき, 次式を満たす正則行列 T が存在する.

$$A = T \begin{bmatrix} A_1 & A_{12} \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} T^{-1}, \quad B = T \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ただし, $A_1 \in \mathbf{R}^{k \times k}$, $A_2 \in \mathbf{R}^{(n-k) \times (n-k)}$ であり, (A_1, B_1) に関する可制御行列 $C_1 = [B_1 \quad A_1 B_1 \quad \dots \quad A_1^{k-1} B_1]$ が行フルランク k をもつ.

証明 q_1, \dots, q_k を C の線形独立な列ベクトルとすると, $\text{Im } C = \text{span}\{q_1, \dots, q_k\}$ となる. ここで, まず $\text{Im } C$ が A 不変であることを示す. $x \in \text{Im } C$ とすると, x はベクトル u_1, u_2, \dots, u_n を使って $x = Bu_1 + ABu_2 + \dots + A^{n-1}Bu_n$ のように書ける. すると, Cayley-Hamilton の定理 $A^n = -(a_1 A^{n-1} + \dots + a_n I)$ を使えば,

$$\begin{aligned} Ax &= ABu_1 + A^2Bu_2 + \cdots + A^nBu_n \\ &= B(-a_nu_n) + AB(u_1 - a_{n-1}u_n) + \cdots + A^{n-1}B(u_{n-1} - a_1u_n) \\ &\in \text{Im}C = \text{span}\{q_1, \dots, q_k\} \end{aligned}$$

がいえる．故に，任意の $x \in \text{Im}C$ について Ax が q_1, \dots, q_k の線形結合で表せる．次に，

$$T := [q_1 \ \cdots \ q_k \ q_{k+1} \ \cdots \ q_n]$$

が正則となるように実ベクトル q_{k+1}, \dots, q_n を選ぶ．このとき， $Aq_i (i = 1, 2, \dots, k)$ が q_1, \dots, q_k の線形結合で書けることに注意すると，

$$\begin{aligned} Aq_i &= a_{1i}q_1 + \cdots + a_{ki}q_k = [q_1 \ \cdots \ q_k] \begin{bmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ki} \end{bmatrix} \\ &\Rightarrow [Aq_1 \ \cdots \ Aq_k] = [q_1 \ \cdots \ q_k] A_1 \end{aligned}$$

がいえる．よって，適当な行列 A_1, A_{12}, A_2 について

$$\begin{aligned} AT &= [Aq_1 \ \cdots \ Aq_k \ Aq_{k+1} \ \cdots \ Aq_n] \\ &= [q_1 \ \cdots \ q_k \ q_{k+1} \ \cdots \ q_n] \begin{bmatrix} A_1 & A_{12} \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \\ &= T \begin{bmatrix} A_1 & A_{12} \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

が成り立つ．同様に，行列 B の各列は q_1, \dots, q_k の線形結合であり，ある行列 B_1 について

$$B = T \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

が成り立つ．最後に，上の関係式を用いれば $T^{-1}AB = T^{-1}AT \cdot T^{-1}B = [(A_1B_1)^T \ 0]^T$ などとなることが分かり，よって

$$T^{-1}C = \begin{bmatrix} C_1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rank } C_1 = k$$

が成り立つ．

定理 2.1 の証明 この証明を理解するポイントは，可制御性が状態を任意の初期値から任意の終端値へ自由に移動できることを要求している，という点にある．

(2) \Leftrightarrow (1) : 命題 (2) が成立するとき，補題 2.1 より $G_c(t_f - t_0) > 0$ である．このとき，入力を

$$u(\tau) = (e^{A(t_f-\tau)}B)^T G_c^{-1}(t_f - t_0) [x_f - e^{A(t_f-t_0)}x_0]$$

とすると，状態方程式の解から終端状態は

$$\begin{aligned} x(t_f) &= e^{A(t_f-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^{t_f} e^{A(t_f-\tau)}Bu(\tau)d\tau \\ &= e^{A(t_f-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t_f} e^{A(t_f-\tau)}B(e^{A(t_f-\tau)}B)^T \\ &\quad \times G_c^{-1}(t_f - t_0) [x_f - e^{A(t_f-t_0)}x_0] \end{aligned} \tag{2.20}$$

$$\begin{aligned}
&= e^{A(t_f-t_0)}x_0 + G_c(t_f-t_0)G_c^{-1}(t_f-t_0)[x_f - e^{A(t_f-t_0)}x_0] \\
&= x_f
\end{aligned}$$

となる．よって，可制御である．逆に，命題(2)が成立たないとき，式(2.19)より $v^T e^{A(t_f-\tau)}B = 0$ を満たす非零ベクトル $v \in \mathbb{R}^n$ がある．すると，式(2.20)に左から v^T をかけると

$$v^T x(t_f) = v^T e^{A(t_f-t_0)}x_0$$

となる． $x_0 = 0$ のとき， $x(t_f) = v$ は上式を満たさない．すなわち， $x(t_f)$ が $x_f = v$ に到達できない．よって，不可制御となる．

(2) \Rightarrow (3)：ある λ に対して命題(3)が成立しないとき，ベクトル $v \neq 0$ があり

$$v^*A = \lambda v^*, \quad v^*B = 0 \Rightarrow v^*A^i = \lambda^i v^*$$

を満足する．可制御行列 C に左から v^* をかけ，上式を代入すると

$$\begin{aligned}
v^*C &= [v^*B \quad v^*AB \quad \cdots \quad v^*A^{n-1}B] \\
&= [v^*B \quad \lambda v^*B \quad \cdots \quad \lambda^{n-1}v^*B] = 0
\end{aligned}$$

を得る．これは命題(2)に矛盾する．

(3) \Rightarrow (2)：背理法を用いる． $\text{rank } C = k < n$ と仮定すると，補題2.2より

$$AT = T \begin{bmatrix} A_1 & A_{12} \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}, \quad B = T \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

を満たす正則行列 T が存在する．ここで λ と $w \neq 0$ を A_2^T の固有値とその固有ベクトルとすると， $w^T A_2 = \lambda w^T$ が成立する．すると，上式からベクトル $v^T = w^T [0 \quad I] T^{-1} \neq 0$ に関して

$$v^T A = \lambda v^T, \quad v^T B = 0$$

が成立し，命題(3)と矛盾する．よって，(3) \Rightarrow (2)がいえる．

λ が A の固有値でないとき， $A - \lambda I$ は常に正則となる．よって，(3) \Leftrightarrow (4)は明らかである．

上述の(3) \Rightarrow (2)の証明に使った行列 T を用いて新たに状態を

$$z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} := T^{-1}x$$

とおくと，新しい状態 z に関する状態方程式は次のようになる．

$$\dot{z}_1 = A_1 z_1 + A_{12} z_2 + B_1 u$$

$$\dot{z}_2 = A_2 z_2$$

状態 z_2 には入力 u が直接的にも間接的にも(すなわち状態 z_1 を経由して)到達できない．つまり，状態 z_2 の振舞いは入力で変えられない．このような状態を不可制御状態と呼ぶ．個々の状態のレベルで考えるとき，システムが不可制御となる本質は不可制御状態をもつことにほかならない．

■ 例 2.1 例 1.7 の 1 自由度振動系について，可制御性を確認しよう．

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{M} & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix}$$

より，簡単な計算で

$$C = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{M} \\ \frac{1}{M} & 0 \end{bmatrix}, \quad [A - \lambda I \quad B] = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -\frac{K}{M} & -\lambda & \frac{1}{M} \end{bmatrix}$$

を得る．前者は明らかに行フルランクである．後者については，後ろの二つの列が線形独立なので，やはり行フルランクとなる．よって，どの条件からも 1 自由度振動系の状態空間表現が可制御であることが分かる．このことは物理的に考えると明らかである． □

【例題 2.2】 図 2.2 に示す二つのシステムについて可制御性を調べよ．

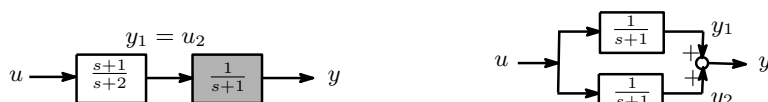


図 2.2 不可制御の例：極零相殺(左)，同一システムの並列(右)

解答 図 2.2 の左は二つのシステム

$$G_1(s) = \frac{s+1}{s+2}, \quad G_2(s) = \frac{1}{s+1}$$

が直列結合したものを表している． G_1 の出力を y_1 ， G_2 の入力を u_2 とすると $u_2 = y_1$ の接続関係が成り立つ．おのおのの状態方程式は以下ようになる．

$$G_1: \dot{x}_1 = -2x_1 + u, \quad y_1 = -x_1 + u$$

$$G_2: \dot{x}_2 = -x_2 + u_2, \quad y = x_2$$

$u_2 = y_1 = -x_1 + u$ の関係式を \dot{x}_2 に代入して整理すると，システム全体の状態方程式は

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = x_2 \quad (2.21)$$

となる．可制御行列

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

のランクが $1 < n = 2$ であるので，このシステムは不可制御である．実際，状態 x_2 と x_1 の差 $z = x_2 - x_1$ は微分方程式

$$\dot{z} = -z \quad (2.22)$$

を満たしている．上式に入力やほかの状態は一切現れていないので， z を入力で制御できない．

また，図 2.2 の右は同じ動特性を有する二つのシステム

$$G_1(s) = G_2(s) = \frac{1}{s+1}$$

が並列結合したものを表している． G_1 の出力を y_1 ， G_2 の出力を y_2 とすると，全体の出力は $y = y_1 + y_2$ で与えられる．おのおのの状態方程式は

$$G_1: \dot{x}_1 = -x_1 + u, \quad y_1 = x_1$$

$$G_2 : \dot{x}_2 = -x_2 + u, \quad y_2 = x_2$$

であるので，システム全体の状態方程式は

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = x_1 + x_2 \quad (2.23)$$

となる．その可制御行列

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

のランクは $1 < n = 2$ であり，よってこのシステムも不可制御である．実際，状態 x_2 と x_1 の差 $z = x_2 - x_1$ は

$$\dot{z} = -z \quad (2.24)$$

を満たし，入力で制御できない． \diamond

この例は二つのシステムが直列に結合する場合，2番目のシステムの極に1番目のシステムの零点と同じものがあると極零相殺 (pole-zero cancellation) という現象が起き，システム全体が不可制御になることを示している．そして，並列結合する二つのシステムに共通の極をもつ場合はやはり全体として不可制御になる．後者については，まったく同一の車2台を同じようなアクセル・ブレーキ操作で操縦するとき，速度の差を変えられない現象と一致する．

2.4 可観測性

さて，状態を自由に制御するにはすべての(初期)状態に関する情報が不可欠である(定理2.1の証明で構成した入力を見よう)．しかし，コストやセンサの制約で実際に計測される信号は状態のすべてではなく，システムの出力だけである．また，ほかの既知情報としてシステムの入力がある．すると，既知の入出力情報から状態を算出する必要が出てくる．これは次に述べる可観測性という概念として定式化される．

定義 2.2 任意の有限な $t_1 > t_0$ に対し，区間 $[t_0, t_1]$ における入力 $u(t)$ と出力 $y(t)$ から初期状態 $x(t_0) = x_0$ を一意に決定できるとき，システム(2.1)，あるいは (C, A) が可観測 (observable) であるという．そうでない場合には，システムあるいは (C, A) が不可観測 (unobservable) であるという．

この定義は本質的には初期状態の可観測性しかいっていない．しかし，状態方程式の解から分かるように初期状態が分かれば任意時刻の状態は計算できるので，初期状態の可観測性を考えれば十分である．

可観測性の判定条件は次の定理で与えられる。

定理 2.2 以下の命題は等価である。

- (1) (C, A) が可観測である。
- (2) 可観測行列

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

が列フルランクをもつ。

- (3) すべての $\lambda \in \mathbb{C}$ に対し, 行列 $\begin{bmatrix} A - \lambda I \\ C \end{bmatrix}$ が列フルランクをもつ。
- (4) すべての $\lambda \in \sigma(A)$ に対し, 行列 $\begin{bmatrix} A - \lambda I \\ C \end{bmatrix}$ が列フルランクをもつ。
- (5) (A^T, C^T) が可制御である。

証明 まず, O が列フルランクであることと

$$G_o(t) := \int_0^t (Ce^{A\tau})^T Ce^{A\tau} d\tau > 0, \quad t > 0 \quad (2.26)$$

が等価である (O の転置をとり, $\bar{A} = A^T, \bar{B} = C^T$ とおけば, 補題 2.1 から分かる)。

(1) \Leftrightarrow (2) : ここで, 信号

$$w(t) := y(t) - Du(t) - C \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau \quad (2.27)$$

をおく。 y と u が既知なので, この信号は既知のものとなる。次に, 出力

$$y(t) = C \left[e^{A(t-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau \right] + Du(t)$$

を上式に代入すれば

$$w(t) = Ce^{A(t-t_0)} x_0$$

を得る。この式の両辺に左から $(Ce^{A(t-t_0)})^T$ をかけて, $t \in [t_0, t_1]$ について積分すると

$$G_o(t_1 - t_0)x_0 = \int_{t_0}^{t_1} (Ce^{A(t-t_0)})^T w(t) dt \quad (2.28)$$

が得られる。命題 (2) が成立するとき, $G_o(t_1 - t_0)$ は正則となる。さらに, 上式の右辺は既知であるから, x_0 が一意に求まる。

逆に, 命題 (2) が成立しないとき,

$$Cv = 0, CAv = 0, \dots, CA^{n-1}v = 0$$

を満たす実非零ベクトル v が存在する。本式と Cayley-Hamilton の定理より

$$Ce^{At}v = C[f_1(t)I + f_2(t)A + \dots + f_n(t)A^{n-1}]v = 0$$

が任意の t に対して成立する ($f_i(t)$ はスカラー関数である). すると, 初期状態 $x(t_0) = v$ に関して出力は

$$\begin{aligned} y(t) &= C \left[e^{A(t-t_0)} v + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau \right] + D u(t) \\ &= C \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau + D u(t), \quad \forall t > t_0 \end{aligned} \quad (2.29)$$

となる. $x(t_0) = v$ が出力 y に現れていないから, y から求めることができない.

(2) と (5) の等価性は定理 2.1(2) より明らかである. 残りの部分は定理 2.1 を適用することで得られる.

この証明から次の二つのことが分かる. まず不可観測状態の本質は, それが出力応答に現れないことにある. そして, 可制御性と可観測性の双対性 (すなわち命題 (1) と命題 (5) の等価性) をうまく利用すれば, unnecessary 証明は省ける.

この定理は, 可観測性が状態方程式の係数行列 (C, A) だけに依存することを示している. 可制御性の場合と同じように, 条件 (2) は次数の低いシステムに対して使いやすく, 条件 (3), (4) は A 行列がブロック対角などの特殊構造をもつシステムや理論展開でよく用いられる.

さらに, 本定理の命題 (3) より (C, A) が不可観測のとき, 必ずある $\lambda \in \mathbb{C}$ と $u \neq 0$ について

$$(A - \lambda I)u = 0, \quad Cu = 0$$

が成り立つ. よって, この λ は A の固有値となる. このような A の固有値を不可観測モード (unobservable mode) という.

■ 例 2.2 例 1.7 の 1 自由度振動系について, 測定出力を変位 y とするときの可観測性を調べよう. このとき,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{M} & 0 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \ 0]$$

であるので,

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} A - \lambda I \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -\frac{K}{M} & -\lambda \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

となる. 前者は明らかに列フルランクである. また, 後者では 1 列目と 2 列目は線形独立なのでやはり列フルランクとなる. よって, いずれの条件からも可観測という結論を得る. \square

次に不可観測の例を挙げよう.

【例題 2.3】 図 2.3 に示す二つのシステムの可観測性について吟味せよ.

解答 図 2.3 の右に示す並列システムの状態方程式はすでに例題 2.2 で

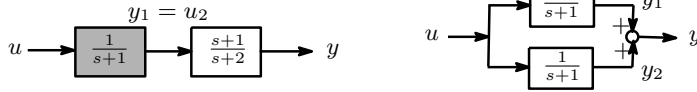


図 2.3 不可観測の例：極零相殺(左)，同一システムの並列(右)

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = [1 \ 1]x \tag{2.30}$$

のように求まっている。ただし、 $x = [x_1 \ x_2]^T$ である。その可観測行列を計算すると

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

であり、ランクは $1 < n = 2$ である。よってこのシステムは不可観測である。実際、状態 x_2 と x_1 の代わりにその和 $z_1 = x_1 + x_2$ と差 $z_2 = x_1 - x_2$ を新しい状態として用いることができる。この場合、新しい状態方程式は

$$\dot{z}_1 = -z_1 + 2u, \quad \dot{z}_2 = -z_2, \quad y = z_1 \tag{2.31}$$

となるが、出力に状態 z_2 が現れず、しかも z_2 が z_1 の動特性にまったく関与しないから、 z_2 に関する情報は直接的にも間接的にも出力に伝わらない。これはシステムの状態が観測できないわけである。

一方、図 2.3 の左は二つのシステム

$$G_1: \dot{x}_1 = -x_1 + u, \quad y_1 = x_1$$

$$G_2: \dot{x}_2 = -2x_2 + u_2, \quad y = -x_2 + u_2$$

が直列結合したものである。 $x = [x_1 \ x_2]^T$ とおき、 $u_2 = y_1 = x_1$ の結合関係を用いると、システム全体の状態方程式

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u, \quad y = [1 \ -1]x \tag{2.32}$$

が得られる。その可観測行列

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

のランクは $1 < n = 2$ であるので、このシステムも不可観測である。実際、新しい状態を $z_1 = x_1$ 、 $z_2 = x_1 - x_2$ とするとき、状態方程式は

$$\dot{z}_1 = -z_1 + u, \quad \dot{z}_2 = -2z_2 + u, \quad y = z_2 \tag{2.33}$$

になる。上の例と同様な理由で $z_1 = x_1$ は出力から観測できない。◇

この例は二つのシステムが直列に結合する場合、1 番目のシステムの極が 2 番目のシステムの零点と極零相殺するとき、システム全体が不可観測になることを示している。そして、並列結合する二つのシステムに共通の極をもつ場合はやはり全体として不可観測になる。

2.5 状態変換と正準形式

定義 2.3 伝達行列 $G(s)$ に対応する状態空間表現 (A, B, C, D) を $G(s)$ の実現 (realization) という。特に, (A, B) が可制御かつ (C, A) が可観測のとき, (A, B, C, D) を $G(s)$ の最小実現 (minimal realization) という。

前述の 1 自由度振動系の例で使った実現は可制御かつ可観測であるので, 最小実現になっている。しかし, 例題 2.2 と例題 2.3 の結合システムの実現は不可制御か不可観測であるため, 最小実現ではない。

2.5.1 状態変換

$G(s)$ の実現は一意ではなく, 無数に存在する。例えば, 式 (2.1) の状態 $x(t)$ を次のように正則行列 T で新しい状態 $z(t)$

$$z(t) = T^{-1}x(t) \quad (2.34)$$

に置き換えると, $z(t)$ に関する状態方程式は

$$\begin{bmatrix} \dot{z} \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T^{-1}AT & T^{-1}B \\ CT & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ u \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \bar{A} & \bar{B} \\ \bar{C} & \bar{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ u \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

となるが, 恒等式 $(XYZ)^{-1} = Z^{-1}Y^{-1}X^{-1}$ より

$$\begin{aligned} \bar{C}(sI - \bar{A})^{-1}\bar{B} + \bar{D} &= CT(sI - T^{-1}AT)^{-1}T^{-1}B + D \\ &= CT(T^{-1}(sI - A)T)^{-1}T^{-1}B + D = C(sI - A)^{-1}B + D \\ &= G(s) \end{aligned} \quad (2.36)$$

が成り立つ。ゆえに, $(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D})$ も $G(s)$ の実現となることが分かる。式 (2.34) の座標変換は状態変換 (state transformation) と呼ばれ, T は変換行列 (transformation matrix) と呼ばれる。

ちなみに, 例題 2.3 における状態の置き換え $z_1 = x_1 + x_2$, $z_2 = x_1 - x_2$ は次の状態変換と対応する。

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = T^{-1}x = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

また, 対応する係数行列の関係

$$\begin{bmatrix} \bar{A} & \bar{B} \\ \bar{C} & \bar{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T^{-1}AT & T^{-1}B \\ CT & D \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

を相似変換 (similar transformation) という。状態変換と係数行列の相似変換は表裏一体なので、これらの表現を通常混同して使う場合が多い。

相似変換で結ばれた二つのシステム

$$\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right] \mapsto \left[\begin{array}{c|c} \bar{A} & \bar{B} \\ \hline \bar{C} & \bar{D} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} T^{-1}AT & T^{-1}B \\ \hline CT & D \end{array} \right] \quad (2.38)$$

について、式 $(T^{-1}AT)^i = T^{-1}AT \cdot T^{-1}AT \cdots T^{-1}AT = T^{-1}A^i T$ から両者の可制御行列と可観測行列は

$$\bar{C} = T^{-1}C, \quad \bar{O} = OT \quad (2.39)$$

の関係を満たすことが容易に分かる。よって、次の定理は上記の関係から直ちに得られる。

定理 2.3 システムの可制御性と可観測性は状態変換に対して不変である。

2.5.2 Kalman の正準形式*

本節ではシステムが完全に可制御でない、もしくは完全に可観測でない場合に対して、状態変換を用いてシステムを構造的に分解し解析する。一般的な線形システムに対して、次の Kalman の正準形式 (Kalman canonical form) と呼ばれる構造が知られている。

定理 2.4 任意の線形時不変システム (A, B, C, D) に対し、ある正則な座標変換 $x = Tz$ によってその実現を

$$\left[\begin{array}{c|c} T^{-1}AT & T^{-1}B \\ \hline CT & D \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cccc|c} \bar{A}_{co} & 0 & \bar{A}_{13} & 0 & \bar{B}_{co} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{c\bar{o}} & \bar{A}_{23} & \bar{A}_{24} & \bar{B}_{c\bar{o}} \\ 0 & 0 & \bar{A}_{\bar{c}o} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{A}_{43} & \bar{A}_{\bar{c}\bar{o}} & 0 \\ \hline \bar{C}_{co} & 0 & \bar{C}_{\bar{c}o} & 0 & D \end{array} \right] \quad (2.40)$$

に相似変換できる。あるいは、等価的に次の状態方程式が成立する。

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_{co} \\ \dot{z}_{c\bar{o}} \\ \dot{z}_{\bar{c}o} \\ \dot{z}_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{co} & 0 & \bar{A}_{13} & 0 \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{c\bar{o}} & \bar{A}_{23} & \bar{A}_{24} \\ 0 & 0 & \bar{A}_{\bar{c}o} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{A}_{43} & \bar{A}_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{co} \\ z_{c\bar{o}} \\ z_{\bar{c}o} \\ z_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{B}_{co} \\ \bar{B}_{c\bar{o}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} \bar{C}_{co} & 0 & \bar{C}_{\bar{c}o} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{co} \\ z_{c\bar{o}} \\ z_{\bar{c}o} \\ z_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix} + Du$$

ここで、状態 z_{co} は可制御かつ可観測、 $z_{c\bar{o}}$ は可制御であるが不可観測、 $z_{\bar{c}o}$ は可観測であるが不可制御、そして $z_{\bar{c}\bar{o}}$ は不可制御かつ不可観測である。さらに、 u から y までの伝達行列は

$$G(s) = \bar{C}_{co}(sI - \bar{A}_{co})^{-1}\bar{B}_{co} + D \quad (2.41)$$

で与えられる。

($z_{\bar{c}o}$, $z_{\bar{c}\bar{o}}$) に関する状態方程式は

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_{\bar{c}o} \\ \dot{z}_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{\bar{c}o} & 0 \\ \bar{A}_{43} & \bar{A}_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{\bar{c}o} \\ z_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

であり、入力 u がこれらに到達できないから、これらの状態は制御できない。そして、出力方程式から状態 ($z_{c\bar{o}}$, $z_{\bar{c}\bar{o}}$) が出力 y に現れないことが確認できる。また、可観測状態 (z_{co} , $z_{\bar{c}o}$) の状態方程式

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_{co} \\ \dot{z}_{\bar{c}o} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{co} & \bar{A}_{13} \\ 0 & \bar{A}_{\bar{c}o} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{co} \\ z_{\bar{c}o} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{B}_{co} \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (2.43)$$

に ($z_{c\bar{o}}$, $z_{\bar{c}\bar{o}}$) が現れていないから、(z_{co} , $z_{\bar{c}o}$) を通して y に ($z_{c\bar{o}}$, $z_{\bar{c}\bar{o}}$) が間接的に現れることもない。よって、 $z_{c\bar{o}}$ と $z_{\bar{c}\bar{o}}$ が観測できないことが分かる。

さらに、零初期状態のもとで $\dot{z}_{\bar{c}\bar{o}} = \bar{A}_{\bar{c}\bar{o}} z_{\bar{c}\bar{o}}$ の解は $z_{\bar{c}\bar{o}}(t) \equiv 0$ となる。このとき、

$$\dot{z}_{co} = \bar{A}_{co} z_{co} + \bar{B}_{co} u \quad (2.44)$$

$$y = \bar{C}_{co} z_{co} + Du \quad (2.45)$$

が成り立つ。よって、伝達行列が零初期状態時の入出力写像を表すことにより伝達行列は定理に示す通りになる。つまり、不可制御の状態や不可観測の状態は伝達行列にまったく現れない。もちろん、直接計算によってもこれを確認できる。

なお、状態 z_{co} , $z_{c\bar{o}}$, $z_{\bar{c}o}$, $z_{\bar{c}\bar{o}}$ (またはその要素) をモード (mode) と呼ぶ場合がある。すなわち、 z_{co} を可制御かつ可観測のモード、($z_{\bar{c}o}$, $z_{\bar{c}\bar{o}}$) を不可制御モード、($z_{c\bar{o}}$, $z_{\bar{c}\bar{o}}$) を不可観測モードのように呼ぶ。さらに、これらの状態に対応する係数行列 \bar{A}_{co} , $\bar{A}_{\bar{c}o}$, $\bar{A}_{c\bar{o}}$, $\bar{A}_{\bar{c}\bar{o}}$ などやその固有値をモードと呼ぶ場合もある。

Kalmanの正準形式を図示すると、図2.4となる。ここで、 CO は状態 z_{co} に関する部分システムを表し、ほかも同様にそれぞれの部分システムを表す。ただし、図を簡単にするために各部分システム間の干渉を省略している。この図からも分かるように、不可制御の状態は入力の影響が及ばないものであり、不可観測の状態は出力に現れないものである。両者ともシステムの入出力関係に寄与しない。すなわち、システム

$$(A, B, C, D) \text{ と } (\bar{A}_{co}, \bar{B}_{co}, \bar{C}_{co}, D)$$

の入力/出力挙動は同じである。しかし、非零初期状態に対してはこの二つのシステムがかなり違う応答を示す。このため、システム解析と設計において不可制御/不可観測状態の影響を無視することができない。

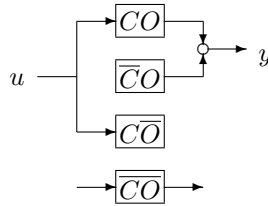


図2.4 Kalmanの正準形式

ここで、Kalmanの正準形式の証明を与えておこう。

証明 補題2.2に基づいて、正則行列 T_1 を用いた相似変換で (A, B) を可制御と不可制御モードに分けると、

$$\begin{bmatrix} T_1^{-1} & \\ & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 & \\ & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_c & A_{12} & B_c \\ 0 & A_{\bar{c}} & 0 \\ C_1 & C_2 & D \end{bmatrix}$$

が成り立つ。ただし、 (A_c, B_c) が可制御である。次に、 (C_1, A_c) に補題2.2の双対結果(つまり (A_c^T, C_1^T) に補題2.2を適用して得られた結果)を用いると、それを相似変換で可観測と不可観測モードに分解できる。すなわち、ある変換行列 T_2 について

$$\begin{bmatrix} T_2^{-1} & \\ & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_c & B_c \\ C_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_2 & \\ & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{co} & 0 & \bar{B}_{co} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{c\bar{o}} & \bar{B}_{c\bar{o}} \\ \bar{C}_{co} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

が成り立つ。ただし、 $(\bar{C}_{co}, \bar{A}_{co})$ が可観測である。最後に、 $(C_2, A_{\bar{c}})$ にも補題2.2の双対結果を適用して可観測と不可観測モードに分解する。

$$\begin{bmatrix} T_3^{-1} & \\ & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{\bar{c}} & 0 \\ C_2 & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_3 & \\ & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{\bar{c}o} & 0 & 0 \\ \bar{A}_{43} & \bar{A}_{\bar{c}\bar{o}} & 0 \\ \bar{C}_{\bar{c}o} & 0 & D \end{bmatrix}$$

その内、 $(\bar{C}_{\bar{c}o}, \bar{A}_{\bar{c}o})$ が可観測である。以上より、変換行列

$$T = T_1 \begin{bmatrix} T_2 & \\ & T_3 \end{bmatrix}$$

による相似変換で

$$\left[\begin{array}{c|c} T^{-1}AT & T^{-1}B \\ \hline CT & D \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cccc|c} \bar{A}_{co} & 0 & \bar{A}_{13} & \bar{A}_{14} & \bar{B}_{co} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{c\bar{o}} & \bar{A}_{23} & \bar{A}_{24} & \bar{B}_{c\bar{o}} \\ 0 & 0 & \bar{A}_{c\bar{o}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{A}_{43} & \bar{A}_{c\bar{o}} & 0 \\ \hline \bar{C}_{co} & 0 & \bar{C}_{c\bar{o}} & 0 & D \end{array} \right]$$

が得られる．最後に， $\bar{A}_{14} = 0$ を示せば証明が終わる．このために，この分解では $\bar{A}_{c\bar{o}}$ に対応する状態 $z_{c\bar{o}}$ がすべて不可観測であることに注目する．式

$$\begin{aligned} \dot{z}_{co} &= \bar{A}_{co}z_{co} + \bar{A}_{13}z_{c\bar{o}} + \bar{A}_{14}z_{c\bar{o}} + \bar{B}_{co}u \\ \Rightarrow \bar{A}_{14}z_{c\bar{o}} &= \dot{z}_{co} - \bar{A}_{co}z_{co} - \bar{A}_{13}z_{c\bar{o}} - \bar{B}_{co}u \end{aligned}$$

を見ると分かるように， \bar{A}_{14} が零でなければ $z_{c\bar{o}}$ の一部は $(z_{co}, z_{c\bar{o}})$ より計算可能である．そして， $(z_{co}, z_{c\bar{o}})$ は可観測状態で， (u, y) から計算できる．これは $z_{c\bar{o}}$ の不可観測性に反する．

2.6 極・零点と応答

第1章では，1入出力系について極と零点の概念を述べたが，本節では多入出力系に対してその極，零点を定義し，過渡応答との関係を解説する．

2.6.1 極

伝達行列 $G(s) = (A, B, C, D)$ の極は以下のように定義される．

定義 2.4 A の固有値を $G(s)$ の実現 (A, B, C, D) の極(pole)という．この実現が最小実現であるとき， A の固有値を伝達行列 $G(s)$ の極という．

ここでは伝達行列の極とその「実現の極」を区別していることに注意されたい． A の固有値を実現の極と呼ぶ理由は，零入力応答が

$$\hat{x}(s) = (sI - A)^{-1}x(0) = \frac{\text{adj}(sI - A)}{\det(sI - A)}x(0) \quad (2.46)$$

となっているからである．一方，伝達行列の実現が最小実現でない場合， A の一部の固有値は制御できない，もしくは観測できないものとなり，伝達行列には現れないから，実現の極と伝達行列の極は必ずしも一致しない．例えば，システム

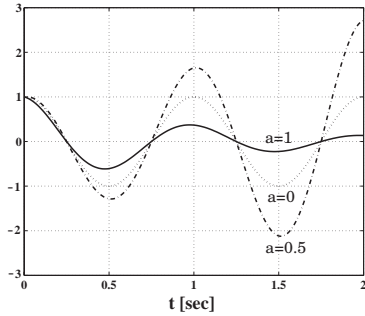
$$G(s) = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 \end{array} \right] = \frac{2}{s-1}$$

では， A 行列の固有値の一つが伝達関数に現れていない．

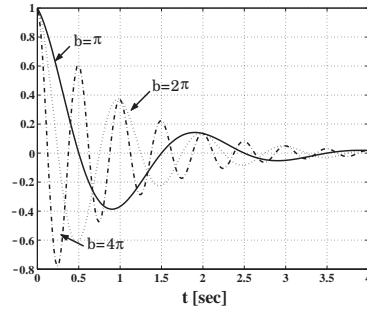
極はシステムの時間応答の収束性を決定づける．例えば，システム

$$G(s) = \left[\begin{array}{cc|c} a & b & 1 \\ -b & a & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \end{array} \right] = \frac{s - a}{(s - a)^2 + b^2} \quad (2.47)$$

の場合，極は $a \pm jb$ であり，そのインパルス応答は $e^{at} \cos bt$ である．極の実部 a が負のとき，インパルス応答は収束するが， a が正になると発散する（図 2.5 左を参照）．また，収束の速さは実部の大きさで決まる．一方，極の虚部は応答の振動周波数であり，虚部が大きくなるにつれ，単位時間における振動の回数が増える（図 2.5 右を参照）．



(a) $b = 2\pi$ の場合



(b) $a = -1$ の場合

図 2.5 極の位置と応答の関係

一般に，システムの極と応答の関係は以下ようになる．ここで，零入力応答

$$x(t) = e^{At}x(0), \quad t \geq 0 \quad (2.48)$$

だけを考えよう．行列指数関数の定義を使えば，

$$\begin{aligned} T^{-1}e^{At}T &= T^{-1} \left(I + At + \frac{1}{2!}(At)^2 + \dots \right) T \\ &= I + T^{-1}ATt + \frac{1}{2!}T^{-1}AT \cdot T^{-1}ATt^2 + \dots \\ &= I + T^{-1}ATt + \frac{1}{2!}(T^{-1}ATt)^2 + \dots \\ &= e^{T^{-1}ATt} \end{aligned} \quad (2.49)$$

がいえる．一方，正方行列は必ず Jordan 標準形に相似変換できる．つまり，

$$T^{-1}AT = J = \text{diag}(J_1 \ \dots \ J_m) \quad (2.50)$$

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{r_i \times r_i}$$

とする変換行列 T が存在する。ただし, λ_i は行列 A の固有値である。したがって, 零入力応答は

$$x(t) = T e^{Jt} T^{-1} x(0) \quad (2.51)$$

となる。ただし,

$$e^{Jt} = \text{diag} (e^{J_1 t} \quad \dots \quad e^{J_m t}) \quad (2.52)$$

である。さらに,

$$(sI - J_i)^{-1} = \begin{bmatrix} (s - \lambda_i)^{-1} & (s - \lambda_i)^{-2} & \dots & (s - \lambda_i)^{-r_i} \\ & (s - \lambda_i)^{-1} & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & (s - \lambda_i)^{-2} \\ & & & (s - \lambda_i)^{-1} \end{bmatrix}$$

より

$$e^{J_i t} = \mathcal{L}^{-1} [(sI - J_i)^{-1}] = e^{\lambda_i t} \begin{bmatrix} 1 & t & \dots & \frac{t^{r_i-1}}{(r_i-1)!} \\ & 1 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & t \\ & & & 1 \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

が求まる。多項式よりも指数関数の方が収束/発散速度がはるかに速いこと, 並びに $|e^{\lambda_i t}| = e^{(\text{Re}\lambda_i)t}$ が成り立つことから, 応答の収束性は極の実部によって決まることがいえる。

2.6.2 1 入出力系の零点

零点は極と対極にある概念である。極の役割が比較的に分かりやすいのに対して, 零点の物理的動きが分かりづらい。しかし, システム工学においては零点が極と同等に重要な概念であり, 応答などにきわめて大きな影響を与えている。特に, 4.3.3 と 4.3.4 項で分かるように, 零点のないシステムに比べ, 零点をもつシステムでは応答が悪化する。以下では, 1 入出力系と多入出力系に分けて零点を説明する。

まず, 1 入出力系の場合伝達関数は有理関数であるから, 分母多項式と分子

多項式をもつ．分子多項式の根は零点 (zero) と呼ばれる．物理的には，零点は信号を遮断する性質をもつ．例えば，

$$G(s) = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} a & b & 1 \\ -b & a & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \end{array} \right] = \frac{s-a}{(s-a)^2 + b^2}$$

において初期状態が $x(0) = [0, -1/b]^T$ であるとき，時刻 $t = 0$ から入力 $u(t) = e^{at} (\hat{u}(s) = 1/(s-a))$ を印加すると，出力は

$$\begin{aligned} \hat{y}(s) &= C(sI - A)^{-1}x(0) + C(sI - A)^{-1}B\hat{u}(s) \\ &= -\frac{1}{(s-a)^2 + b^2} + \frac{1}{(s-a)^2 + b^2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

となり，入力が出力から完全に遮断される．

この例における零点 $z = a$ の働きの原理は次の図から理解できるであろう． $s - a$ は微分器 s とゲイン $-a$ の並列結合であり， e^{at} の入力信号を印加すると，両ブロックの出力の和がちょうど零となる[†]．

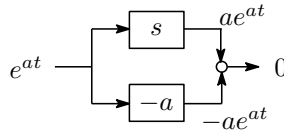


図 2.6 零点の働き

零点の起因 単体の物理要素では，零点はあまり見られないが，結合すると零点が現れる．

(1) 並列結合による零点

零点のないシステムを並列結合すると，零点が現れる．例えば，

$$G_1(s) = \frac{1}{s+a}, G_2(s) = \frac{1}{s+b} \Rightarrow G_1 + G_2 = \frac{2s+a+b}{(s+a)(s+b)}$$

で $G_1 + G_2$ に零点 $z = -(a+b)/2$ が現れる．

(2) フィードバック結合による零点

[†] 時刻 $t = 0$ で入力 $u(t) = e^{at}$ を印加するとき， $u(0_-) = 0$ ， $u(0_+) = 1$ のように不連続点がある．微分すると，インパルスを生ずる．よって，厳密には時刻 $t = 0$ で図 2.6 の出力は零ではなく，単位インパルスである．このインパルスによる，零点を除いたシステム $\frac{1}{(s-a)^2 + b^2}$ の応答が残る．この例で非零の初期状態を考えた理由は，このインパルス応答を打ち消すためである．

この場合，後向きブロックの極が閉ループ系伝達関数の零点となる．例えば，

$$G_1(s) = \frac{1}{s+a}, \quad G_2(s) = \frac{1}{s+b}$$

で， G_1 が前向き， G_2 が後向きにフィードバック結合するとその伝達関数は

$$\frac{G_1}{1+G_1G_2} = \frac{s+b}{1+(s+a)(s+b)}$$

ようになる．後向き伝達関数 G_2 の極 $-b$ が結合後の伝達関数の零点となっている．

2.6.3 多入出力系の零点*

ところで，多入出力系になると，零点は伝達行列の各要素の零点で捉えることができない．零点の概念を多入出力系に拡張するとき，入力を遮断するという物理的性質から着手して考える必要がある．それを定義するのに，次の概念を要する．

定義 2.5 $Q(s)$ を $p \times m$ の有理関数 (多項式) 行列とする． $Q(s)$ の正規ランク (normal rank) とは，すべての $s \in \mathbb{C}$ に対する $Q(s)$ の最大可能なランクであり， $\text{normalrank}(Q(s))$ と書く．

■ 例 2.3 有理行列

$$Q(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+2} \\ \frac{s}{s+1} & \frac{s}{s+2} \end{bmatrix}$$

の場合，2 列目は 1 列目の $\frac{s+1}{s+2}$ 倍であるので，線形従属となる．したがって， $Q(s)$ の正規ランクは 1 である．これに対して，次の有理行列

$$Q(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+2} \\ \frac{s}{s+1} & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix}$$

が正規ランク 2 をもつ． □

以下では，正規ランクの概念を用いて多入出力系の零点を定義する．

〔1〕 伝達零点

定義 2.6 伝達行列 $G(s)$ について，

$$\text{rank}(G(z)) < \text{normalrank}(G(s)) \quad (2.54)$$

を満たす複素数 z を $G(s)$ の伝達零点 (transmission zeros) という．さらに $G(z) = 0$ ならば， $z \in \mathbb{C}$ を $G(s)$ のブロッキング零点 (blocking zeros) と

いう。

明らかに、ブロッキング零点は伝達零点である。1 入出力系の伝達関数では、ブロッキング零点と伝達零点は一致する。伝達零点の定義は正方でない伝達行列に対しても成立することに注意する。なお、正方でその正規ランクが次元に等しい伝達行列の場合、伝達零点は $\det(G(z)) = 0$ を満たすすべての z に一致する。なぜなら、 $G(s)$ の次元を $m \times m$ とすると、

z が伝達零点 $\Leftrightarrow \text{rank}(G(z)) < \text{normalrank}(G(s)) = m \Leftrightarrow \det(G(z)) = 0$ となるからである。

■ 例 2.4 伝達行列

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+2} \\ \frac{s}{s+1} & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix}$$

が正規ランク 2 を有する。その要素 $s/(s+1)$ は零点 0 をもつが、

$$G(0) = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

がランク落ちをしていないから、 $s = 0$ は伝達行列 $G(s)$ の伝達零点でない。

一方、 $s = 1$ において $G(s)$ は

$$G(1) = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 \end{bmatrix}$$

であり、そのランクが 1 に落ちるから $z = 1$ が $G(s)$ の伝達零点である。つまり、要素の零点でない複素数も伝達行列の伝達零点となる可能性がある。□

零点方向 ここで、*a.e.*(almost everywhere) で「ほとんどすべての...に対して」を表すことにする。伝達零点に対応する零点ベクトルは次のように定義されるベクトルである。

定義 2.7 次式を満たす非零ベクトル u を伝達行列 $G(s)$ の z における右零点方向 (right zero direction) という。

$$G(s)u \neq 0, \quad a.e. s \in \mathbf{C} \quad \text{かつ} \quad G(z)u = 0 \quad (2.55)$$

そして、次式を満たす非零ベクトル v を伝達行列 $G(s)$ の z における左零点方向 (left zero direction) という。

$$v^*G(s) \neq 0, \quad a.e. s \in \mathbf{C} \quad \text{かつ} \quad v^*G(z) = 0 \quad (2.56)$$

ちなみに、例 2.4 の零点 $z = 1$ に対応する右零点方向は $[1 \quad -1]^T$ である。

各零点方向の定義において，一番目の条件は零点 z に関係のない， $G(s)$ の零空間に含まれる定数ベクトルを排除するためのものである．例えば，

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+2} \\ \frac{2}{s+1} & \frac{2}{s+2} \end{bmatrix}$$

に左からベクトル $v^T = [2 \quad -1]$ をかけると， $v^T G(s) = 0$ がすべての s について成立するが，このベクトルは零点となんら関係をもたない．実際，いまの伝達行列は伝達零点を有しない．

伝達零点が入力を遮断する特性をもつことを次の補題に示す．

補題 2.3 $G(s)$ を $p \times m$ の伝達行列とし， (A, B, C, D) をその最小実現とする． $z \in \mathbf{C}$ は $G(s)$ の伝達零点で， $G(s)$ の極でないと仮定すると， $G(z)u = 0$ を満たす非零ベクトル $u \in \mathbf{C}^m$ に対し，初期状態 $x(0) = (zI - A)^{-1}Bu$ と入力 $u(t) = ue^{zt}$ に対する $G(s)$ の出力は $y(t) \equiv 0$ である．

証明 まず，次の式変形が成立する．

$$\begin{aligned} G(s) &= C(sI - A)^{-1}B - C(zI - A)^{-1}B + G(z) \\ &= C(sI - A)^{-1}[(zI - A) - (sI - A)](zI - A)^{-1}B + G(z) \\ &= -(s - z)C(sI - A)^{-1}(zI - A)^{-1}B + G(z) \end{aligned}$$

上式に $\hat{u}(s) = u/(s - z)$ をかけ，与えられた条件を使うと

$$\begin{aligned} G(s)\hat{u}(s) &= -C(sI - A)^{-1}(zI - A)^{-1}Bu + G(z)u \frac{1}{s - z} \\ &= -C(sI - A)^{-1}x(0) \end{aligned}$$

を得る．したがって，出力応答の Laplace 変換は

$$\hat{y}(s) = C(sI - A)^{-1}x(0) + G(s)\hat{u}(s) = 0$$

となり，よって $y(t) = 0$ となる．

この補題は，伝達零点が右零点方向におけるある特別な入力信号，すなわち伝達零点 z を指数としてもつ指数信号を遮断できることを示している．

〔2〕 不変零点

伝達行列の状態空間実現から零点を考える場合，不変零点という概念がある．

定義 2.8 行列関数

$$Q(s) = \begin{bmatrix} A - sI & B \\ C & D \end{bmatrix} \quad (2.57)$$

をシステム (A, B, C, D) のシステム行列 (system matrix) と呼ぶ。このとき、複素数 $z \in \mathbf{C}$ が

$$\text{rank}(Q(z)) < \text{normalrank}(Q(s)) \quad (2.58)$$

を満たせば、システム (A, B, C, D) の不変零点 (invariant-zero) という。

このように定義された零点が不変零点と呼ばれる理由は、それが状態フィードバック $u = Fx + v$ に対して不変だからである。すなわち、状態フィードバック後の実現が $(A + BF, B, C + DF, D)$ となるが、これに対して関係式

$$\text{rank} \begin{bmatrix} A + BF - sI & B \\ C + DF & D \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} A - sI & B \\ C & D \end{bmatrix} \quad (2.59)$$

が成立し、両者の不変零点が同じとなる。この式は次のようにして分かる。正則行列 Y について $\text{rank}(XY) = \text{rank}(X)$ が成り立つ (補題 A.2)。よって、恒等式

$$\begin{bmatrix} A + BF - sI & B \\ C + DF & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - sI & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & O \\ F & I \end{bmatrix}$$

より前述のランクに関する等式が成立する。

不変零点の零点方向 不変零点に対応する零点方向は次のように定義されるベクトルである。

定義 2.9 次式を満たす非零ベクトル $[\xi^T \ u^T]^T$ が存在するとき、 ξ をシステム (A, B, C, D) の z における右零点状態方向 (right zero state direction) といい、 u を z における右零点入力方向 (right zero input direction) という。また、 $[\xi^T \ u^T]^T$ 自身も右零点方向と呼ぶ。

$$Q(s) \begin{bmatrix} \xi \\ u \end{bmatrix} \neq 0, \quad a.e. \ s \in \mathbf{C} \quad \text{かつ} \quad Q(z) \begin{bmatrix} \xi \\ u \end{bmatrix} = 0 \quad (2.60)$$

そして、次式を満たす非零ベクトル $[\eta^T \ v^T]^T$ が存在するとき、 η をシステム (A, B, C, D) の z における左零点状態方向 (left zero state direction) といい、 v を z における左零点出力方向 (left zero output direction) という。また、 $[\eta^T \ v^T]^T$ 自身も左零点方向と呼ぶ。

$$[\eta^* \ v^*]Q(s) \neq 0, \quad a.e. \ s \in \mathbf{C} \quad \text{かつ} \quad [\eta^* \ v^*]Q(z) = 0 \quad (2.61)$$

不変零点 z の右零点入力方向が $u = 0$ であるとき、式

$$Q(z) \begin{bmatrix} \xi \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - zI \\ C \end{bmatrix} \xi = 0$$

が成り立つ。このとき、 z が不可観測モードとなる。同様に、左零点出力方向が $v = 0$ であるとき不変零点 z が不可制御モードとなる。

【例題 2.4】 次の伝達行列の不変零点と零点方向ベクトルを求めよ。

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+2} \\ \frac{s}{s+1} & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

解答 rank($Q(0)$) = 4は $Q(0)$ の行列式の計算などで確かめられる。よって、システム行列の正規ランクは4である。しかし、 $z = 1$ において

$$Q(1) = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

であり、その列ベクトルが関係式

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

を満足する。すると、システム行列のランクが $z = 1$ で3に落ちる。よって、 $z = 1$ が不変零点となる。この点が伝達零点でもあることは前の例題ですでに示した。また、2番目の式より $\xi = [1 \ -1]^T$, $u = [2 \ -3]^T$ が $Q(1) \begin{bmatrix} \xi \\ u \end{bmatrix} = 0$ を満たすから、右零点方向である。なお、左零点方向は $\eta = [1 \ 0]^T$, $v = [1 \ -1]^T$ で与えられる。◇

不変零点には、伝達零点のほか、不可制御かつ不可観測モードの全体、並びに不可制御モードと不可観測モードの一部もしくはすべてを含む。伝達行列の実現が最小実現であるとき、伝達零点と不変零点が一致する。この関係はKalmanの正準形式で示することができる⁵⁾。

再びシステム

$$G(s) = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 \end{array} \right] = \frac{2}{s-1}$$

を考えよう。そのシステム行列の正規ランクは3である。 $z = 1$ でランクが2に落ちるので、この点是不変零点となる。しかし、この伝達関数は明らかに伝達零点をもたない。この不変零点は不可制御かつ不可観測モード $\lambda = 1$ に対応し

ている。

2.6.4 次数差と無限零点

1 入出力系の伝達関数

$$G(s) = \frac{b_{m+1}s^m + \cdots + b_2s + b_1}{s^n + a_n s^{n-1} + \cdots + a_2s + a_1}, \quad b_{m+1} \neq 0, \quad n \geq m \quad (2.62)$$

において、分母多項式の次数 n と分子多項式の次数 m の差 $r = n - m \geq 0$ は伝達関数の次数差 (relative degree), もしくは相対次数と呼ばれる。例えば,

$$G(s) = \frac{5s + 2}{s^3 + 2s^2 + 3s + 4}$$

の次数差は $r = 3 - 1 = 2$ となる。この伝達関数に s^2 をかけると伝達関数

$$s^2 G(s) = s^2 \frac{5s + 2}{s^3 + 2s^2 + 3s + 4}$$

が得られるが、この伝達関数は非零の直達項 $\lim_{s \rightarrow \infty} s^2 G(s) = 5$ をもつ。 s が微分器であることを考えると、このことは伝達関数の出力を次数差回微分してはじめて入力 that 直接現れることを意味する。このことは状態空間で見るともっと明確になる。上述の伝達関数 $G(s)$ が次の実現をもつ。

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad y = cx \quad (2.63)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & -3 & -2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c = [2 \ 5 \ 0]$$

出力の 1 階導関数と 2 階導関数はそれぞれ

$$\dot{y} = c\dot{x} = cAx + cbu \quad (2.64)$$

$$\ddot{y} = cA\dot{x} + cb\dot{u} = cA^2x + cAbu + cb\dot{u} \quad (2.65)$$

となるが、 $cb = 0$, $cAb = 5$ より出力 y の 2 階導関数に入力 u がはじめて現れる。

よって、状態空間実現

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad y = cx \quad (2.66)$$

を有する 1 入出力系においては、次数差は次式を満たす正数 r と定義することができる。

$$cb = cAb = \cdots = cA^{r-2}b = 0, \quad cA^{r-1}b \neq 0 \quad (2.67)$$

ところで、次数差 $r > 0$ の伝達関数において $s \rightarrow \infty$ とすると、 $G(s) \rightarrow 0$ となる。この意味で $s = \infty$ を $G(s)$ の無限遠点における零点として理解することができる。そこで、次数差 $r (> 0)$ の伝達関数が r 個の無限零点をもつと定義す

る．有限零点の数は $n - r$ なので，無限零点と有限零点の数の合計は極の数と一致する．前記の例では有限零点が一つ，無限零点が二つである．

多入出力系では，出力ごとに次数差を考えることができる．すなわち， i 番目の出力 y_i を r_i 回微分して初めて入力が見れるとき，この出力に関する次数差を r_i と定義する．ここで，多入出力系の状態方程式を

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx \quad (2.68)$$

とし，出力行列 C を行ベクトルを用いて

$$C = [c_1^T \quad \cdots \quad c_p^T]^T \quad (2.69)$$

と表したとき， i 番目の出力 y_i に関する次数差 r_i は

$$c_i B = c_i A B = \cdots = c_i A^{r_i-2} B = 0, \quad c_i A^{r_i-1} B \neq 0 \quad (2.70)$$

を満たす正数となる．また，このシステム全体は(ベクトル)次数差 (r_1, \dots, r_p) をもつという．

2.7 逆システム

正方システム $G(s)$ に入力 u を印加すると，信号

$$\hat{y}(s) = G(s)\hat{u}(s) \quad (2.71)$$

が出力される．逆に信号 y から u を逆算したいとき，

$$\hat{u}(s) = G^{-1}(s)\hat{y}(s) \quad (2.72)$$

で計算できる． $G^{-1}(s)$ は $G(s)$ の逆システム (inverse system) と呼ばれる．ただし， $G(s)$ がプロパーであっても， $G^{-1}(s)$ は一般にプロパーになるとは限らない．直達項 D が正則のときに限ってプロパーな逆システムをもつ．ここで，この場合について $G^{-1}(s)$ の公式を導いておこう．

$G(s) = (A, B, C, D)$ で， D を正則とする． $y = Cx + Du$ からまず

$$u = -D^{-1}Cx + D^{-1}y \quad (2.73)$$

を得る．次に，この式を状態方程式 $\dot{x} = Ax + Bu$ に代入すると

$$\dot{x} = (A - BD^{-1}C)x + BD^{-1}y \quad (2.74)$$

が成り立つ．これは y を入力， u を出力とする逆システムの状態方程式である．したがって，逆システム $G^{-1}(s)$ は次式のプロパーな実現をもつ．

$$G^{-1}(s) = \left[\begin{array}{c|c} A - BD^{-1}C & BD^{-1} \\ \hline -D^{-1}C & D^{-1} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} A - BD^{-1}C & -BD^{-1} \\ \hline D^{-1}C & D^{-1} \end{array} \right] \quad (2.75)$$

2.8 システムの結合関係

システム間の結合関係には、直列 (cascade connection)、並列 (parallel connection) とフィードバック結合 (feedback connection) がある。さらに、もっとも一般的なシステム結合として、LFT 結合 (線形分数変換) がある。

以下では、二つの線形系

$$G_1(s) = (A_1, B_1, C_1, D_1), \quad G_2(s) = (A_2, B_2, C_2, D_2) \quad (2.76)$$

に関する結合の公式を調べよう。

2.8.1 直列結合

まず、図 2.7 に示されるのは直列結合である。\$\hat{y} = G_1 \hat{y}_2 = G_1 G_2 \hat{u}\$ より、直列結合は伝達行列の乗算と対応する。ここで、\$G_1\$ の状態を \$x_1\$、\$G_2\$ の状態を \$x_2\$ とおく。信号の結合関係より、状態方程式は

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= A_1 x_1 + B_1 y_2, & y &= C_1 x_1 + D_1 y_2 \\ \dot{x}_2 &= A_2 x_2 + B_2 u, & y_2 &= C_2 x_2 + D_2 u \end{aligned}$$

となる。\$y_2 = C_2 x_2 + D_2 u\$ を \$\dot{x}_1\$ と \$y\$ に代入すると

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= A_1 x_1 + B_1 C_2 x_2 + B_1 D_2 u \\ y &= C_1 x_1 + D_1 C_2 x_2 + D_1 D_2 u \end{aligned}$$

を得る。したがって、全体の状態を \$[x_1^T \ x_2^T]^T\$ とするとき

$$\left[\begin{array}{c|c} A_1 & B_1 \\ \hline C_1 & D_1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} A_2 & B_2 \\ \hline C_2 & D_2 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} A_1 & B_1 C_2 & B_1 D_2 \\ 0 & A_2 & B_2 \\ \hline C_1 & D_1 C_2 & D_1 D_2 \end{array} \right] \quad (2.77)$$

が成り立つ。また、全体の状態を \$[x_2^T \ x_1^T]^T\$ としたとき

$$\left[\begin{array}{c|c} A_1 & B_1 \\ \hline C_1 & D_1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} A_2 & B_2 \\ \hline C_2 & D_2 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} A_2 & 0 & B_2 \\ B_1 C_2 & A_1 & B_1 D_2 \\ \hline D_1 C_2 & C_1 & D_1 D_2 \end{array} \right] \quad (2.78)$$

を得る。

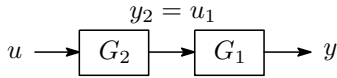


図2.7 直列結合

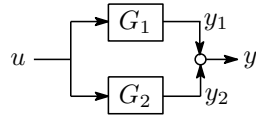


図2.8 並列結合

2.8.2 並列結合

一方，図2.8に示す並列結合は伝達行列の和算 $G_1 + G_2$ に対応する．直列の場合と同様にしてその実現

$$\left[\begin{array}{c|c} A_1 & B_1 \\ \hline C_1 & D_1 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c|c} A_2 & B_2 \\ \hline C_2 & D_2 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} A_1 & 0 & B_1 \\ 0 & A_2 & B_2 \\ \hline C_1 & C_2 & D_1 + D_2 \end{array} \right] \quad (2.79)$$

を導出できる．

2.8.3 フィードバック結合

さらに，図2.9に示されるのはフィードバック結合であり，その伝達行列は

$$H(s) = (I + G_1 G_2)^{-1} G_1 = \left[\begin{array}{cc|c} A_1 - B_1 D_2 R_{12}^{-1} C_1 & -B_1 R_{21}^{-1} C_2 & B_1 R_{21}^{-1} \\ B_2 R_{12}^{-1} C_1 & A_2 - B_2 D_1 R_{21}^{-1} C_2 & B_2 D_1 R_{21}^{-1} \\ \hline R_{12}^{-1} C_1 & -R_{12}^{-1} D_1 C_2 & D_1 R_{21}^{-1} \end{array} \right] \quad (2.80)$$

となる．ただし， $R_{12} = I + D_1 D_2$ ， $R_{21} = I + D_2 D_1$ である．導出は状態方程式を用いた式変形で行えるので，各自で試されたい．

なお，フィードバック結合において $G_2(s) = D_2$ の場合が多い．このとき，上式の2行目と2列目のブロックはなくなり，伝達行列が次式になる．

$$H(s) = (I + G_1 D_2)^{-1} G_1 = \left[\begin{array}{c|c} A_1 - B_1 D_2 R_{12}^{-1} C_1 & B_1 R_{21}^{-1} \\ \hline R_{12}^{-1} C_1 & D_1 R_{21}^{-1} \end{array} \right] \quad (2.81)$$

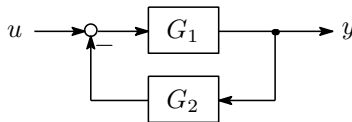


図2.9 フィードバック結合

2.8.4 LFT 結合

ここで伝達行列 $M(s)$ を次のように分割した伝達行列とし，

$$M(s) = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \quad ((p_1 + p_2) \times (q_1 + q_2)) \quad (2.82)$$

$X_\ell(s)$ ($q_2 \times p_2$), $X_u(s)$ ($q_1 \times p_1$) を伝達行列とする. $(I - M_{22}X_\ell)$ が正則のとき, X_ℓ に関する下 LFT を

$$\mathcal{F}_\ell(M, X_\ell) := M_{11} + M_{12}X_\ell(I - M_{22}X_\ell)^{-1}M_{21} \quad (2.83)$$

と定義する. 同様に, $(I - M_{11}X_u)$ が正則のとき, X_u に関する上 LFT を

$$\mathcal{F}_u(M, X_u) = M_{22} + M_{21}X_u(I - M_{11}X_u)^{-1}M_{12} \quad (2.84)$$

のように定義する. これらはすべて線形分数変換 (LFT, linear fractional transformation) と呼ばれる変換である. 上述 LFT 中の行列 $M(s)$ を係数行列 (coefficient matrix) と呼ぶ. 「下 LFT」や「上 LFT」は $\mathcal{F}_\ell(M, X_\ell)$ と $\mathcal{F}_u(M, X_u)$ のブロック線図 (図 2.10) に由来している.

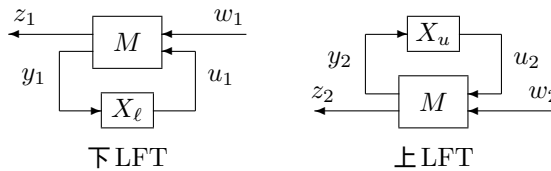


図 2.10 LFT の図表現

図 2.10において, 左の図は入出力関係

$$\begin{bmatrix} \hat{z}_1 \\ \hat{y}_1 \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} \hat{w}_1 \\ \hat{u}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{w}_1 \\ \hat{u}_1 \end{bmatrix} \quad (2.85)$$

$$\hat{u}_1 = X_\ell \hat{y}_1$$

を表しており, 右の図は入出力関係

$$\begin{bmatrix} \hat{y}_2 \\ \hat{z}_2 \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} \hat{u}_2 \\ \hat{w}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}_2 \\ \hat{w}_2 \end{bmatrix} \quad (2.86)$$

$$\hat{u}_2 = X_u \hat{y}_2$$

を表している. 左図の $w_1 \mapsto z_1$ の伝達行列を求めてみよう. $\hat{u}_1 = X_\ell \hat{y}_1$ を \hat{y}_1 に代入すれば

$$\hat{y}_1 = M_{21}\hat{w}_1 + M_{22}X_\ell\hat{y}_1 \Rightarrow \hat{y}_1 = (I - M_{22}X_\ell)^{-1}M_{21}\hat{w}_1$$

が得られる. これをさらに \hat{z}_1 に代入すると

$$\hat{z}_1 = M_{11}\hat{w}_1 + M_{12}X_\ell(I - M_{22}X_\ell)^{-1}M_{21}\hat{w}_1 = \mathcal{F}_\ell(M, X_\ell)\hat{w}_1 \quad (2.87)$$

を得る. すなわち, $w_1 \mapsto z_1$ の伝達行列は $\mathcal{F}_\ell(M, X_\ell)$ である. 同様に, 右図で

$w_2 \mapsto z_2$ の伝達行列は $\mathcal{F}_u(M, X_u)$ である .

前に述べた伝達関数のフィードバック結合や直列, 並列結合は, すべて LFT 結合の特別な場合である . 例えば, $M_{22} = 0$ のとき, $\mathcal{F}_\ell(M, I)$ は M_{11} と $M_{12}M_{21}$ の並列であり, $M_{11} = 0, M_{22} = 0$ のとき, $\mathcal{F}_\ell(M, I)$ は M_{12} と M_{21} の直列である .

以下, 伝達行列

$$P(s) = \left[\begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & 0 \end{array} \right], \quad K(s) = \left[\begin{array}{c|c} A_K & B_K \\ \hline C_K & D_K \end{array} \right] \quad (2.88)$$

の LFT 結合 $\mathcal{F}_\ell(P, K)$ に関する状態空間実現を示しておこう . ここで, $P(s)$ の状態を x , $K(s)$ の状態を x_K とし, 入出力関係を

$$\begin{bmatrix} \hat{z} \\ \hat{y} \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} \hat{w} \\ \hat{u} \end{bmatrix}, \quad \hat{z} = \mathcal{F}_\ell(P, K)\hat{w} \quad (2.89)$$

とする . $\hat{w}(s)$ と $\hat{z}(s)$ の関係を導ければよい . そこで, まず $y = C_2x + D_{21}w$ を u と \dot{x}_K に代入する .

$$\begin{aligned} u &= C_Kx_K + D_K(C_2x + D_{21}w) = D_KC_2x + C_Kx_K + D_KD_{21}w \\ \dot{x}_K &= A_Kx_K + B_K(C_2x + D_{21}w) = B_KC_2x + A_Kx_K + B_KD_{21}w \end{aligned}$$

この u をさらに \dot{x} と z に代入すると,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1w + B_2(D_KC_2x + C_Kx_K + D_KD_{21}w) \\ &= (A + B_2D_KC_2)x + B_2C_Kx_K + (B_1 + B_2D_KD_{21})w \\ z &= C_1x + D_{11}w + D_{12}(D_KC_2x + C_Kx_K + D_KD_{21}w) \\ &= (C_1 + D_{12}D_KC_2)x + D_{12}C_Kx_K + (D_{11} + D_{12}D_KD_{21})w \end{aligned}$$

を得る . これらの式をベクトル形式にまとめると

$$\mathcal{F}_\ell(P, K) = \left[\begin{array}{cc|c} A + B_2D_KC_2 & B_2C_K & B_1 + B_2D_KD_{21} \\ B_KC_2 & A_K & B_KD_{21} \\ \hline C_1 + D_{12}D_KC_2 & D_{12}C_K & D_{11} + D_{12}D_KD_{21} \end{array} \right] \quad (2.90)$$

が得られる .

2.8.5 結合系の可制御性・可観測性

システムを結合したとき, もとのシステムの実現が可制御かつ可観測であっても, 結合後のシステムは可制御, 可観測になるとは限らない . 例えば, 直列

結合の場合には極と零点の相殺が起きるかもしれないし、同じ動的システムを並列結合すると状態は独立に制御/観測できなくなる。

例題2.2では $G_1 = (s+1)/(s+2)$ と $G_2 = 1/(s+1)$ が直列するとき (図2.2), $s = -1$ において極と零点の相殺が起き、システム全体としては不可制御になった。これは、極零相殺により G_2 の極を入力で制御できなくなるためである。また、伝達関数 $(s+1)/(s+2)$ と $1/(s+1)$ の位置を入れ替えた例題2.3(図2.3)では、極零相殺により $1/(s+1)$ の極の応答が出力に伝わらず、出力にこの極に対応する状態の情報を含まないため、システム全体としては不可観測となった。

これらの例題で示したことは一般的にいえる。図2.11の直列システムに対する結論が表2.1にまとめられている。

表2.1 極零相殺と可制御性・可観測性の関係

G_1 の零点と G_2 の極の相殺	不可観測
G_1 の極と G_2 の零点の相殺	不可制御

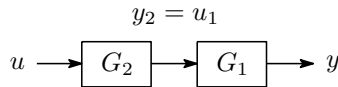


図2.11 極零相殺と可制御性・可観測性

システム応答の有界性の立場から、右半面と虚軸近傍における極零相殺は避けるべきである。具体的な理由については、3.1.4項に譲る。

また、例題2.2と例題2.3では同じ動特性をもつ二つのシステムが並列に結合するとき、その極が不可制御かつ不可観測になることを示した。一般に、共通の極を有する二つのシステムを並列結合するとき、その共通極は不可制御かつ不可観測になる可能性がある。

練習問題

2.1 次の線形システムの解を求めよ。

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x, \quad x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2.2 線形システム

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = [1 \ 2]x$$

の単位ステップ出力応答を求めよ。ただし、 $x(0) = 0$ である。

2.3 次の線形システムに関する設問に答えよ。

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = [0, 1]x$$

- (a) $u \mapsto y$ の伝達関数およびその極を求め、インパルス応答の特徴を述べよ。
 (b) このシステムの可制御性、可観測性を吟味せよ。

2.4 次の線形システムに関する設問に答えよ。

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), \quad y(t) = [1 \ 1]x(t)$$

- (a) $x(0) = 0, u(t) \equiv 1, t \geq 0$ の場合、まず状態 $x(t)$ の応答を Laplace 変換で求め、それから出力 $y(t)$ の応答を求めなさい。また、この二つの応答の特徴を比較せよ。
 (b) 可制御性と可観測性を判定せよ。そして、(a) 項の二つの応答の違いについてその理由を説明せよ。
 (c) 入力 u から出力 y までの伝達関数を求めよ。

2.5 次のシステムが与えられたとする。

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = [1, 0]x$$

- (a) 行列指数関数 e^{At} を計算せよ。
 (b) 初期状態が $x(0) = 0$ で、入力が $u(t) = \sin t (t \geq 0)$ のとき、出力 $y(t)$ の応答を求めよ。
 (c) このシステムの可制御性、可観測性について調べよ。

2.6 次のシステム

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = [1, -1]x$$

に対して対角変換を行い、対角変換したシステムのブロック線図に基づいて可制御性と可観測性を考察せよ。

2.7 以下の二つのシステム

$$G_1 \begin{cases} \dot{x}_1 = ax_1 + u_1 \\ y_1 = x_1 \end{cases}, \quad G_2 \begin{cases} \dot{x}_2 = ax_2 + u_2 \\ y_2 = 2x_2 \end{cases}$$

を $u_1 = u_2 = u, y = y_1 + y_2$ となるように結合させる。

- (a) システムをブロック線図で表し、この結合の名称を述べよ。
 (b) $x = [x_1 \ x_2]^T$ とおき、システム全体の状態方程式と出力方程式を書け。
 (c) その可制御性と可観測性について調べよ。
 (d) (c) で得られた結論に対してその物理的理由を述べよ。

2.8 二つのシステム

$$G_1 \begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + u_1 \\ y_1 = x_1 \end{cases}, \quad G_2 \begin{cases} \dot{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -4 \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_2 \\ y_2 = [1 \ 1]x_2 \end{cases}$$

を直列に結合する．全体システムの入力を u ，出力を y と書く．

- (a) $u_1 = y_2$ のように結合したとき， u ， y がどの信号になるかを答えよ．さらに，全体のシステムが不可制御となることを示せ．
- (b) $u_2 = y_1$ のように結合したとき， u ， y がどの信号になるかを答えよ．さらに，全体のシステムが不可観測となることを示せ．
- (c) G_1 と G_2 の伝達関数を求め，両者が直列したときに不可制御/不可観測となる原因を説明せよ．

2.9 次の係数行列で与えられるシステムについて考える．

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & -4 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c = [1 \ 0 \ 0]$$

- (a) 可制御性と可観測性を調べよ．
- (b) 不変零点と左零点方向を求めよ．左零点出力方向にどのような特徴があり，求まった不変零点にどのような性質があるか．

2.10 次の係数行列で与えられるシステムについて考える．

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & -4 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad c = [0 \ 1 \ 1]$$

- (a) 可制御性と可観測性を調べよ．
- (b) 不変零点と右零点方向を求めよ．右零点入力方向にどのような特徴があり，求まった不変零点にどのような性質があるか．

2.11 行列 $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ の固有値がすべて相異なるとする．このとき，伝達行列 $C(sI - A)^{-1}B$ は A の右固有ベクトル $q_i \in \mathbf{R}^n$ と左固有ベクトル $p_i \in \mathbf{R}^{1 \times n}$ を使って

$$C(sI - A)^{-1}B = \sum_i \frac{Cq_i p_i B}{s - \lambda_i}$$

と書けることを示せ．さらに，モード λ_i が可制御となるための必要十分条件は $p_i B \neq 0$ であり， λ_i が可観測となるための必要十分条件は $Cq_i \neq 0$ であることを示せ．(ヒント：付録A練習問題A.11を参照)

2.12 (A, B) が可制御できるとする．このとき，対

$$\left(\begin{bmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

が可制御となるための必要十分条件は $\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix}$ が行フルランクであることを証明せよ．

3

線形システムの安定性

本章では、線形システムの安定性、すなわちシステム内部の信号の有界性や収束性について議論し、そのためのさまざまな条件を紹介する。

ここでは、状態 $x(t)$ 、入力 $u(t)$ 、出力 $y(t)$ の状態方程式

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (3.1)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (3.2)$$

もしくは等価的に伝達行列 $G(s) = (A, B, C, D)$ で与えられる線形システムについて考える。

3.1 安定性の概念

本節では、入出力安定性の概念、内部安定性の概念および状態の安定性の概念を導入し、それらの関係を明らかにする。

3.1.1 入出力安定性

制御システムに対する基本仕様の一つは、システムに任意の有界入力を印加したとき、出力が発散しないことである。これを入出力安定性 (bounded-input bounded-output stability) という。つまり、零初期状態のもとで図 3.1 のシステムに任意の有界入力 u を加えたとき、出力 y も有界でなければならない。数学的には、これは

$$|u(t)| \leq c < \infty, \forall t \quad \text{ならば} \quad |y(t)| \leq M < \infty, \forall t \quad (3.3)$$

と表現される。また、多入出力系の場合、絶対値の代わりにベクトルノルムを用いて記述される。すなわち

$$\|u(t)\| \leq c < \infty, \forall t \quad \text{ならば} \quad \|y(t)\| \leq M < \infty, \forall t \quad (3.4)$$

が入出力安定条件となる．ここでは，どのベクトルノルムを使ってもよい．

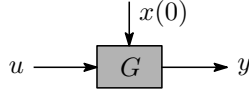


図 3.1 入出力安定性

ここで，入出力安定のための条件を見てみよう．図 3.1 に示される 1 入出力系において，初期状態 $x(0) = 0$ とする．また， $G(s)$ の単位インパルス応答を $g(t)$ で表す．Laplace 変換の性質によると，出力 $y(t)$ は畳み込み積分

$$\hat{y}(s) = G(s)\hat{u}(s) \Rightarrow y(t) = \int_0^t g(\tau)u(t-\tau)d\tau \quad (3.5)$$

で与えられる³⁾．入力がすべての時間に対して $|u(t)| \leq c$ を満たすとき，

$$\begin{aligned} |y(t)| &= \left| \int_0^t g(\tau)u(t-\tau)d\tau \right| \leq \int_0^t |g(\tau)| \cdot |u(t-\tau)|d\tau \\ &\leq c \int_0^t |g(\tau)|d\tau \leq c \int_0^\infty |g(\tau)|d\tau \end{aligned} \quad (3.6)$$

が成り立つ．したがって， $\int_0^\infty |g(t)|dt$ が有界ならば， $y(t)$ も有界となる．逆に，入力を次の特別なもの

$$u(\tau) = \frac{g(t-\tau)}{|g(t-\tau)|} \Rightarrow |u(\tau)| = \frac{|g(t-\tau)|}{|g(t-\tau)|} = 1 \quad (3.7)$$

に選んだとき，その出力応答は

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t g(\tau)u(t-\tau)d\tau = \int_0^t g(\tau)\frac{g(\tau)}{|g(\tau)|}d\tau = \int_0^t |g(\tau)|d\tau \\ &\Rightarrow |y(t)| = \int_0^t |g(\tau)|d\tau \end{aligned} \quad (3.8)$$

となる．システムが安定であるとき， $|y(\infty)| < \infty$ となるから $\int_0^\infty |g(t)|dt < \infty$ でなければならない．以上の結果を次の定理にまとめる．

定理 3.1 1 入出力システム $G(s)$ が入出力安定となるための必要十分条件は

$$\int_0^\infty |g(t)|dt < \infty \quad (3.9)$$

で与えられる．また，多入出力系の場合単位インパルス応答行列を $g(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)]$ とすると，入出力安定条件は

$$\int_0^\infty \|g(t)\|dt < \infty \quad (3.10)$$

となる．ただし， $\|g(t)\|$ は誘導ノルムである[†]．

しかし，この条件ではインパルス応答の絶対積分を計算する必要があるので，使いづらい．そこで，以下ではもっと簡便な条件を導出する．

まず，伝達行列（関数）の安定性を定義しておく．

定義 3.1 伝達行列（関数） $G(s)$ の極がすべて負の実部をもつとき， $G(s)$ が安定 (stable) であるという．逆に， $G(s)$ の極がすべて零以上の実部をもつとき， $G(s)$ が完全不安定 (anti-stable) であるという．また， $G(s)$ に一つでも非負の実部をもつ極があるとき， $G(s)$ が不安定 (unstable) であるという．

完全不安定な伝達関数は不安定であるが，不安定な伝達関数がすべて完全不安定になるわけではない．

■ 例 3.1 伝達関数

$$G_1(s) = \frac{1}{(s+2)(s+5)}$$

の極が $p = -2, -5$ であり，安定である．これに対して，伝達関数

$$G_2(s) = \frac{1}{(s-2)(s-5)}$$

の場合，極が $p = 2, 5$ であるので，完全不安定である．そして，伝達関数

$$G_3(s) = \frac{1}{(s+2)(s-5)}$$

は極が $p = -2, 5$ であり，不安定である．しかし，完全不安定ではない． □

$\int_0^\infty |g(t)| dt$ (多入出力系の場合， $\int_0^\infty \|g(t)\| dt$) の有界性は伝達関数（行列） $G(s)$ の安定性によって保証される．すなわち，

定理 3.2 線形システムの入出力安定性はその伝達行列の安定性と等価である．

証明 1 入出力系について示す．まず， $G(s)$ の極が重複しない場合について考える．部分分数展開によって

$$G(s) = \sum \frac{c_i}{s-p_i} + d \Rightarrow g(t) = \begin{cases} \sum c_i e^{p_i t} + d\delta(t), & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (3.11)$$

が得られる．一般に，極は複素数であるので， $p_i = a_i + jb_i$ とおける．また， $e^{p_i t} = e^{a_i t} e^{jb_i t}$ および $|e^{jb_i t}| \equiv 1$ を使うと

$$\int_0^\infty |g(t)| dt \leq \int_0^\infty \left[\sum |c_i| e^{a_i t} + |d|\delta(t) \right] dt \quad (3.12)$$

となる．ここで，三角不等式 $|a+b| \leq |a| + |b|$ を用いた．すべての a_i が負であるとき，上式の右辺は

[†] 誘導ノルムについては，A.9.1項を参照．

$$|d| + \sum \frac{|c_i|}{-a_i} < \infty$$

となる．逆に，例えば $a_1 \geq 0$ のとき， $e^{a_1 t}$ は発散するか定数になるので，その積分 $\int_0^\infty e^{a_1 t} dt$ が発散してしまう．

また，重複する極がある場合，例えば $p = a + jb$ が2重極であるとき

$$G(s) = \frac{c_1}{(s-p)^2} + \frac{c_2}{s-p} + \text{ほか} \Rightarrow g(t) = c_1 t e^{pt} + c_2 e^{pt} + \text{ほか} \quad (3.13)$$

となる．第1項の積分だけを調べればよい． $a < 0$ とすると，簡単な計算より

$$\int_0^\infty |t e^{at}| dt = \int_0^\infty t e^{at} dt = \frac{1}{a^2} < \infty$$

となるのが分かる．よって，重複する極がある場合でもインパルス応答の絶対積分が有界となり，入出力安定である．

■ 例 3.2 安定システム $G(s) = 1/(s+1)^2$ の単位インパルス応答は

$$g(t) = \begin{cases} t e^{-t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

である．よって，

$$\int_0^\infty |g(t)| dt = \int_0^\infty t e^{-t} dt = 1$$

となり，有界である．これに対して，不安定伝達関数 $G(s) = 2/(s-1)(s+1)$ の単位インパルス応答は

$$g(t) = \begin{cases} e^t - e^{-t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

である．この場合，明らかに積分

$$\int_0^T |g(t)| dt = e^T + e^{-T} - 2$$

が $T \rightarrow \infty$ のときに発散する． □

ここで，伝達関数極の実部が零のときにもシステムが不安定であることに注意する．例えば， $G(s) = 1/s$ の極は $p = 0$ であるが，ステップ入力 $u(t) = 1$ を印加すると，その出力が $y(t) = t$ となり，発散する．したがって，一部の教科書でいわれている「臨界安定性」は無意味である．

3.1.2 状態の安定性

本節では，状態の安定性を導入する．これは初期状態に関する応答の原点への収束性で定義される．外部入力が $u(t) \equiv 0$ のとき，状態方程式 (3.1) は

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad x(0) \neq 0 \quad (3.14)$$

となる．任意の初期状態に関する状態の応答が原点に収束するとき，すなわち

$$x(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0 \quad (3.15)$$

のとき，状態 $x(t)$ が安定であるという．

以下では, その条件を導こう. 2.6.1項によれば, (3.14) の応答は

$$x(t) = Te^{Jt}T^{-1}x(0), \quad t \geq 0 \quad (3.16)$$

$$e^{Jt} = \begin{bmatrix} e^{J_1 t} & & & \\ & \ddots & & \\ & & e^{J_m t} & \\ & & & \ddots \end{bmatrix}, \quad e^{J_i t} = e^{\lambda_i t} \begin{bmatrix} 1 & t & \cdots & \frac{1}{(r_i-1)!} t^{r_i-1} \\ & 1 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & t \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

で与えられる. 一つでも実部が非負の固有値があると, 状態を原点へ収束させないような初期状態が必ず存在するので, 状態は安定でない. そして, $\text{Re}(\lambda_i) < 0$ ならば $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\lambda_i t} = 0$, および

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^j e^{\lambda_i t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^j}{e^{-\lambda_i t}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{j t^{j-1}}{-\lambda_i e^{-\lambda_i t}} = \cdots = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{j!}{(-\lambda_i)^j} e^{\lambda_i t} = 0$$

が成り立つ (ド・ロピタルの定理による). このことより状態の安定条件は以下のようになる.

定理 3.3 システム (3.14) の状態が安定となるための必要十分条件は, 行列 A のすべての固有値が負の実部をもつことである.

便宜上, この定理の条件を満たす行列を安定行列 (stable matrix) と呼ぶ場合がある.

■ 例 3.3 例 1.7 の 1 自由度振動系は, 外力がないとき

$$\dot{x}(t) = Ax(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{M} & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

となる. A 行列の固有値は特性多項式

$$\det(sI - A) = \begin{vmatrix} s & -1 \\ \frac{K}{M} & s \end{vmatrix} = s^2 + \frac{K}{M}$$

の根であり, $\lambda = \pm j\sqrt{\frac{K}{M}}$ である. 固有値の実部が零なので, この系は不安定である. これはダンパ (摩擦) がないと, 振動が止まらないという物理現象と一致する. ちなみに, 減衰係数 $D > 0$ のダンパをつけると, 状態方程式は

$$\dot{x}(t) = Ax(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{M} & -\frac{D}{M} \end{bmatrix} x(t)$$

となり, A 行列の特性多項式が

$$|sI - A| = s^2 + \frac{D}{M}s + \frac{K}{M}$$

に変わる. その根は $-\frac{D}{2M} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\frac{D}{M})^2 - 4\frac{K}{M}}$ である. $(\frac{D}{M})^2 - 4\frac{K}{M} < 0$ のときは複素数になり, そうでないときは実数となる. いずれの場合においても実部がすべて負である. よって, 安定である. \square

なお、さらに利用しやすい方法は3.2節で述べる。

3.1.3 可安定性と可検出性

2.8.5項で述べたように、部分システムの実現が可制御・可観測であっても、結合すると極零点相殺が起き、制御できない状態あるいは観測できない状態が生じることがある。この場合、フィードバック制御によって閉ループ系の状態を任意に制御できないが、少なくとも安定性は確保しておきたい。このことは次の可安定性と可検出性の概念として定式化される。

定義 3.2 $A + BF$ を安定にする行列 F が存在すれば、式 (3.1) のシステム、もしくは (A, B) が可安定 (stabilizable) であるという。

また、 $A + LC$ を安定化する行列 L が存在すれば、 (C, A) が可検出 (detectable) であるという。

定理 2.1 と定理 2.2 の拡張として次の二つの定理が成立する。

定理 3.4 以下の命題は等価である。

- (1) (A, B) が可安定である。
- (2) すべての $\operatorname{Re}(\lambda) \geq 0$ に対して、 $[A - \lambda I \quad B]$ がフルランクをもつ。
- (3) $A + BF$ を安定にする行列 F が存在する。

証明 (1) \Leftrightarrow (3) は定義そのものである。

(3) \Rightarrow (2) : ある $\operatorname{Re}(\lambda) \geq 0$ の複素数 λ について、 $[A - \lambda I \quad B]$ がフルランクでないとする

$$u^* [A - \lambda I \quad B] = 0, \quad u \neq 0$$

を満たすベクトル u が存在する。すると、任意の行列 F に対して

$$u^* (A + BF) = \lambda u^*$$

が成立し、 λ が $A + BF$ の不安定固有値となるから、 $A + BF$ の安定性に反する。

(2) \Rightarrow (3) : 補題 2.2 より、ある変換行列 T により次の相似変換ができる。

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} A_1 & A_{12} \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}, \quad T^{-1}B = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ただし、 (A_1, B_1) は可制御である。すると、 $A_1 + B_1 F_1$ を安定化する行列 F_1 が存在する[†]。式

$$T^{-1} [A - \lambda I \quad B] \begin{bmatrix} T \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 - \lambda I & A_{12} & B_1 \\ 0 & A_2 - \lambda I & 0 \end{bmatrix}$$

[†] このことについては、5.1.3項で説明する。

より, 命題(2)が成立するとき, すべての $\operatorname{Re}(\lambda) \geq 0$ に対して $A_2 - \lambda I$ が正則でなければならない. すなわち, A_2 が安定である. したがって, 行列 $F = [F_1 \ 0]T^{-1}$ によって $A + BF$ は

$$A + BF = T \begin{bmatrix} A_1 + B_1 F_1 & A_{12} \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} T^{-1}$$

のように安定化される.

次の定理は定理3.4の双対定理である.

定理3.5 以下の命題は等価である.

- (1) (C, A) が可検出である.
- (2) すべての $\operatorname{Re}(\lambda) \geq 0$ に対し, $\begin{bmatrix} A - \lambda I \\ C \end{bmatrix}$ が列フルランクをもつ.
- (3) $A + LC$ を安定にする行列 L が存在する.
- (4) (A^T, C^T) が可安定である.

この二つの定理の本質は, 制御/観測できない状態が安定となることを求めているところにある.

■ 例3.4 実現

$$\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

について, その可安定性と可検出性を調べると $s = 1$ で

$$\operatorname{rank}[A - I \ B] = \operatorname{rank} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} = 1 \neq 2$$

となり, 可安定でない. 実は極 $p = 1$ が不可制御となっている. 一方,

$$\operatorname{rank} \begin{bmatrix} A - \lambda I \\ C \end{bmatrix} = \operatorname{rank} \begin{bmatrix} 1 - \lambda & 0 \\ 0 & -1 - \lambda \\ \hline 1 & 0 \end{bmatrix} = 2 \quad \forall \operatorname{Re}(\lambda) \geq 0$$

が成り立ち, よって可検出である. しかし, $\lambda = -1$ のとき上式のランクが1に落ちるので, 観測できない極 $p = -1$ をもつ. ただし, この不可観測極は安定である. 次に, 行列 F と L を

$$F = [f_1 \ f_2], \quad L = [l_1 \ l_2]^T$$

とおく. 簡単な計算で

$$A + BF = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ f_1 & f_2 - 1 \end{bmatrix}, \quad A + LC = \begin{bmatrix} 1 + l_1 & 0 \\ l_2 & -1 \end{bmatrix}$$

を得る. $f_2 < 1$ とすれば固有値 $f_2 - 1$ が安定になるが, もう一つの固有値1が変わらず, $A + BF$ は安定化できない. 一方, $A + LC$ の場合固有値 -1 が安定なので, $l_1 < -1$ とすればもう一つの固有値 $1 + l_1$ も安定となり, $A + LC$ は安定化される. \square

3.1.4 内部安定性

これまでには、与えられたシステムの安定性について説明してきた。本項ではフィードバック系の安定性を考える。フィードバック系では、制御対象と制御器が結合して閉ループを構成している。このような閉ループ系の安定性を考えるには、一つの閉ループ伝達関数の安定性だけでは不十分である。これは次の例に見られるように、極零点相殺の可能性があるのである。

■ 例 3.5 図 3.2 のフィードバック系において、制御対象と制御器はそれぞれ

$$P(s) = \frac{1}{s-1}, \quad K(s) = \frac{s-1}{s}$$

であるとする。\$P(s)\$ と \$K(s)\$ の間に不安定な極 \$p = 1\$ と不安定な零点 \$z = 1\$ の相殺が起きているから \$P(s)K(s) = 1/s\$ となる。このとき、目標値 \$r\$ から出力 \$y\$ までの伝達関数 \$H_{yr}(s)\$ は

$$H_{yr}(s) = \frac{PK}{1+PK} = \frac{1}{s+1} \tag{3.17}$$

となり、安定である。しかし、外乱 \$d\$ から出力 \$y\$ までの伝達関数は

$$H_{yd}(s) = \frac{P}{1+PK} = \frac{\frac{1}{s-1}}{1+\frac{1}{s}} = \frac{s}{(s-1)(s+1)} \tag{3.18}$$

であり、明らかに不安定である。したがって、外乱応答は発散する。 □

実システムは常に外乱と雑音の影響を受けるので、不安定な極零点相殺が起きますと、システムは暴走してしまう。したがって、不安定な極零点相殺は許されない。これを保証できるのが、一つは閉ループ系状態の安定性であり、もう一つは次に述べる内部安定性である。両者が等価であることは後に示す。

定義 3.3 図 3.2 の閉ループ系において、外部信号 \$(r, d)\$ からシステムの内部信号 \$(y, u)\$ までの四つの伝達行列

$$\begin{bmatrix} PK(I+PK)^{-1} & P(I+KP)^{-1} \\ K(I+PK)^{-1} & -KP(I+KP)^{-1} \end{bmatrix} \tag{3.19}$$

がすべて安定のとき、閉ループ系を内部安定 (internal stability) という。

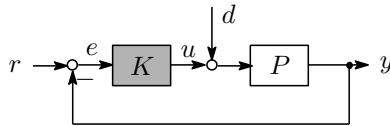


図 3.2 内部安定性

〔1〕 既約分解 以下、内部安定性を調べる方法について考える。ここで有理関数の既約分解をまず説明しておく。一般に、有理関数はその分母多項式と分子多項式の比で表されるが、分母と分子多項式に同じ多項式因子があっ

でもその比は変わらないから，分母分子多項式のとり方は一意ではない．そこで，特に共通多項式因子をもたない分母分子多項式による有理関数の分解を既約分解 (coprime factorization) と呼ぶ．例えば，伝達関数

$$G(s) = \frac{s+2}{s(s+1)(s+5)}$$

を $G(s) = N(s)/M(s)$ に分解したとき， $N(s) = s+2$, $M(s) = s(s+1)(s+5)$ ならば分解は既約である．しかし， $N(s) = (s+2)(s+10)$, $M(s) = s(s+1)(s+5)(s+10)$ の場合は既約でない．

1 入出力系について，次の定理が成り立つ．

定理 3.6 1 入出力系において，制御対象と制御器を

$$P(s) = \frac{N_P(s)}{M_P(s)}, \quad K(s) = \frac{N_K(s)}{M_K(s)} \quad (3.20)$$

のように分母分子多項式の比に既約分解する．そして，特性多項式

$$p(s) = N_P(s)N_K(s) + M_P(s)M_K(s) \quad (3.21)$$

を作る．このとき，内部安定性はこの特性多項式の根がすべて負の実部をもつこと[†]と一致する．

証明 $\frac{PK}{1+PK} + \frac{1}{1+PK} = 1$ が成立するので， $\frac{PK}{1+PK}$ の安定性は $\frac{1}{1+PK}$ の安定性と等価である．ゆえに，内部安定性は伝達行列

$$H(s) = \begin{bmatrix} \frac{PK}{1+PK} & \frac{P}{1+PK} \\ \frac{K}{1+PK} & \frac{1}{1+PK} \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

の安定性と等価となる． $P(s)$ と $K(s)$ の既約分解の式を代入すると

$$H(s) = \frac{1}{p} \begin{bmatrix} N_P N_K & N_P M_K \\ M_P N_K & M_P M_K \end{bmatrix} = \frac{1}{p} \begin{bmatrix} N_P \\ M_P \end{bmatrix} [N_K \ M_K] \quad (3.23)$$

のように書ける．明らかに，特性多項式 $p(s)$ の根がすべて安定であれば，閉ループ系は内部安定である．逆に，閉ループ系が内部安定のとき，特性多項式に不安定な根があるとすると，この根は $H(s)$ の分子行列の零点によって消去されなければならない．ところが，既約性の仮定から $[N_P \ M_P]^T$ も $[N_K \ M_K]$ も零点をもたない．したがって，閉ループ系が内部安定のとき，特性多項式に不安定な根をもってはいけない．

多入出力系に関しては，多項式による既約分解の代わりに安定伝達行列による既約分解を用いれば，この定理を拡張することができる²⁾．

さらに，内部安定性の定義にある四つの伝達行列はこのフィードバック系の閉ループ伝達行列をすべて包含している．よって，プラント $P(s)$ と制御器 $K(s)$

[†] このような $p(s)$ を安定多項式 (stable polynomial) もしくは Hurwitz 多項式 (Hurwitz polynomial) と呼ぶ場合がある．

自身に不安定な隠れモード^{††}がなければ，閉ループ内のあらゆる信号の安定性が内部安定性によって自動的に保証される．厳密には，次の定理のようになる．

定理 3.7 図 3.2 の閉ループ系において，プラント $P(s)$ と制御器 $K(s)$ の実現を

$$P(s) = (A_P, B_P, C_P, 0), \quad K(s) = (A_K, B_K, C_K, D_K)$$

とし，プラントの状態を x_P ，制御器の状態を x_K とする．このとき，以下の命題が等価である．

- (1) 閉ループ系の状態 $[x_P^T \ x_K^T]^T$ が安定である．
- (2) 閉ループ系が内部安定，かつ，上記実現が可安定可検出である．

証明 まず与えられた実現が可安定あるいは可検出でなければ，状態 x_P または x_K に不安定な隠れモードをもつことになる．よって， $[x_P^T \ x_K^T]^T$ が安定である場合，対応する実現は可安定かつ可検出でなければならない．次に，信号関係より状態方程式はそれぞれ

$$\dot{x}_P = A_P x_P + B_P(u + d), \quad y = C_P x_P$$

$$\dot{x}_K = A_K x_K + B_K(r - y), \quad u = C_K x_K + D_K(r - y)$$

となる．これらの式を整理すると，閉ループ系の状態方程式は

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_P \\ \dot{x}_K \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_P \\ x_K \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_P D_K & B_P \\ B_K & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ d \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

$$\begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_P & 0 \\ -D_K C_P & C_K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_P \\ x_K \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ D_K & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ d \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

$$A = \begin{bmatrix} A_P - B_P D_K C_P & B_P C_K \\ -B_K C_P & A_K \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

となる． (r, d) から (y, u) までの伝達行列の分母多項式は $|sI - A|$ であるので， A が安定，すなわち閉ループ系の状態が安定であれば，内部安定となる．

逆に，閉ループ系が内部安定であれば A 行列も安定となることを示そう．もし A が不安定固有値 λ をもつと，閉ループ系の内部安定性より λ は外部入力 (r, d) から不可制御か内部信号 (y, u) から不可観測でなければならない．不可観測の場合，非零のベクトル $[v^T \ w^T]^T$ があり

$$\begin{bmatrix} A_P - B_P D_K C_P & B_P C_K \\ -B_K C_P & A_K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix}$$

^{††} 不可制御あるいは不可観測の状態を隠れモード (hidden mode) という．

$$\begin{bmatrix} C_P & 0 \\ -D_K C_P & C_K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} = 0$$

を満たす．2番目の式から

$$C_P v = 0, \quad C_K w = 0 \quad (3.27)$$

が導かれ，これを1番目の式に代入すると

$$A_P v = \lambda v, \quad A_K w = \lambda w \quad (3.28)$$

を得る．制御対象と制御器の実現が可安定かつ可検出である仮定より， $v = 0$ ， $w = 0$ となるので， λ は不可観測にならない．同様に， λ が不可制御にならないことも証明できる．つまり， A は安定でなければならない．

〔2〕 内部安定性の判定法 以上の二つの定理に基づいて，内部安定性を判定する方法は次の二通りに分かれる．

- 特性多項式を用いる方法 (1入出力系)

この方法では，定理3.6に従い，既約分解のもとで特性多項式を作り，次に特性多項式の根を直接求めるか後述のRouth-Hurwitzの安定判別法を用いて特性多項式の根の安定性を調べる．

- 状態空間法 (多入出力系)

この方法では，各部分システムの状態方程式から閉ループ伝達行列の状態空間表現を求め，その A 行列の固有値を調べることによって内部安定性を判別する．なお，閉ループ系の A 行列は式(3.26)に示されている．

■ 例3.6 例3.5について，上述の方法で内部安定性を再度確認しよう．

まず，特性多項式を使う方法では，制御対象と制御器はそれぞれ

$$P(s) = \frac{N_P}{M_P}, \quad N_P(s) = 1, \quad M_P(s) = s - 1$$

$$K(s) = \frac{N_K}{M_K}, \quad N_K(s) = s - 1, \quad M_K(s) = s$$

のように既約分解できる．すると，特性多項式は

$$p(s) = (s - 1)s + s - 1 = (s - 1)(s + 1)$$

となり，不安定な特性根1をもつから，閉ループ系は内部安定でないことが分かる．

次に，状態方程式による方法では， $P(s)$ と $K(s)$ の実現の一つは

$$P(s) = (1, 1, 1, 0), \quad K(s) = (0, -1, 1, 1)$$

である．すると，式(3.26)から閉ループ系の A 行列およびその固有値

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \sigma(A) = \{1, -1\}$$

を得る．同様に閉ループ系が不安定極1をもつ結論に達する． □

3.2 安定判別法

本節では，さらに簡便に安定性を判別できる方法を紹介する．

3.2.1 Routh-Hurwitzの安定判別法

これまでの安定条件では、安定性を調べるには特性多項式を解いて極を求める必要があった。しかし、システムの次数が高い場合、手計算はできなくなる。また、数値計算に頼って求めることができるものの、特性多項式に未定のパラメータがある場合には対応できない。この問題に対して、RouthとHurwitzが独立に特性多項式の係数だけで根の安定性を判別できる方法を発見した。以下、この方法を述べる。

定理 3.8 多項式

$$p(s) = s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n \tag{3.29}$$

の根がすべて負の実部をもつための条件は以下ようになる。

必要条件 $a_1 > 0, a_2 > 0, \dots, a_n > 0$

必要十分条件 Routh表1列目の要素がすべて正である。

ここで、Routh表は次のように多項式の係数から構成される。

第1行	s^n	1	a_2	a_4	\dots
第2行	s^{n-1}	a_1	a_3	a_5	\dots
第3行	s^{n-2}	b_1	b_2	b_3	\dots
第4行	s^{n-3}	c_1	c_2	c_3	\dots
\vdots	\vdots	\vdots			
第 $n-1$ 行	s^2	p_1	p_2		
第 n 行	s^1	q_1			
第 $n+1$ 行	s^0	r_1			

第1, 2行は $p(s)$ の係数を次数の高い順に一つずつ交互に第1行, 第2行に入れ込むことで作られる。そして、第3行以下の行の要素は次のように計算される。

$$b_1 = -\frac{1}{a_1} \begin{vmatrix} 1 & a_2 \\ a_1 & a_3 \end{vmatrix}, \quad b_2 = -\frac{1}{a_1} \begin{vmatrix} 1 & a_4 \\ a_1 & a_5 \end{vmatrix}, \quad \dots$$

$$c_1 = -\frac{1}{b_1} \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}, \quad c_2 = -\frac{1}{b_1} \begin{vmatrix} a_1 & a_5 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \quad \dots$$

$$\vdots$$

$$r_1 = -\frac{1}{q_1} \begin{vmatrix} p_1 & p_2 \\ q_1 & 0 \end{vmatrix}$$

つまり、 i 行目の j 番目の要素を計算するのに、その直前の二つの行から取り出した1列目と $j+1$ 列目で作った行列式を用いる。第3行以下の行の要素は順次一つずつ減っていく。 $n+1$ 行目まで計算しなければならない。また、計算に際し要素が不足するとき、0で補う。

さらに、次のことも知られている。

Routh 表第1列の要素の符号変化回数 = 開右半面にある根の数

ただし、+, -, + のような符号の変化は2回として数える。つまり、正から負は1回、負から正も1回の符号変化として数える。

Routh-Hurwitz 法による安定性判別の手順は次のようになる。

1. 必要条件をチェックし、満たさなければ止める。
2. Routh 表を作り、必要十分条件をチェックする。

■ **例 3.7** 次の多項式について、その根の安定性を調べよう。

$$p(s) = s^4 + 9s^3 + 28s^2 + 38s + 24 (= (s+3)(s+4)((s+1)^2 + 1))$$

必要条件は明らかに満足されている。Routh 表は次のように求められる。

s^4	1	28	24
s^3	9	38	0
s^2	$b_1 = 23.78$	$b_2 = 24$	
s^1	$c_1 = 28.91$	0	
s^0	$d_1 = 24$		

ただし、各係数は次の計算より得られた。

$$b_1 = -\frac{1}{9} \begin{vmatrix} 1 & 28 \\ 9 & 38 \end{vmatrix} = 23.78, \quad b_2 = -\frac{1}{9} \begin{vmatrix} 1 & 24 \\ 9 & 0 \end{vmatrix} = 24$$

$$c_1 = -\frac{1}{23.78} \begin{vmatrix} 9 & 38 \\ 23.78 & 24 \end{vmatrix} = 28.91$$

$$d_1 = -\frac{1}{28.91} \begin{vmatrix} 23.78 & 24 \\ 28.91 & 0 \end{vmatrix} = 24$$

1列目はすべて正なので、すべての根は複素左半面にあり、安定である。□

Routh-Hurwitz 判別法は、閉ループ系の安定性を補償する制御器パラメータの範囲を調べるにも使える。

■ **例 3.8** PI(比例積分) 制御系を考える。プラント $P(s)$ と補償器 $K(s)$ はそれぞれ

$$P(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}, \quad K(s) = K_P + \frac{K_I}{s} = \frac{K_P s + K_I}{s} \quad (3.30)$$

で与えられる。閉ループ系の特性多項式は

$$\begin{aligned} p(s) &= M_P(s)M_K(s) + N_P(s)N_K(s) = (s+1)(s+2)s + K_P s + K_I \\ &= s^3 + 3s^2 + (K_P + 2)s + K_I \end{aligned} \quad (3.31)$$

である。Routh 表は次のようになる。

s^3	1	$K_P + 2$
s^2	3	K_I
s^1	$K_P + 2 - K_I/3$	0
s^0	K_I	

よって，閉ループ系が安定となるための必要十分条件は

$$K_I > 0, \quad K_P + 2 - \frac{K_I}{3} > 0$$

となる．これを解くと，パラメータの安定範囲は

$$K_I > 0, \quad K_P > \frac{K_I}{3} - 2 \tag{3.32}$$

であることが分かる．それを図示すると，図3.3の影の部分となる． □

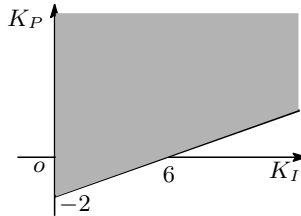


図3.3 パラメータの許容範囲

3.2.2 Nyquist の安定判別法

Nyquist によって発見された安定判別法は，開ループ系の周波数応答を用いて閉ループ系の安定性を判定するものである．これを説明するために，まず周波数応答の概念を復習しておく．

伝達関数 $G(s)$ に変数 $s = j\omega$ を代入して得られる関数 $G(j\omega)$ は周波数 $\omega \in (-\infty, \infty)$ の関数である． $G(j\omega)$ はシステムの周波数応答 (frequency response) と呼ばれる．周波数応答は複素関数であり，極座標上で

$$G(j\omega) = |G(j\omega)|e^{j\angle G(j\omega)} \tag{3.33}$$

と表せる． $|G(j\omega)|$ はゲイン (gain) ， $\angle G(j\omega)$ は位相角 (phase angle) を表す．周波数応答を複素平面上で $-\infty$ から ∞ までの周波数について描いた軌跡は Nyquist 軌跡 (Nyquist plot) という．軌跡の方向は反時計回りが正と定められている．Nyquist 安定判別法はこの Nyquist 軌跡を利用するものである．

定理 3.9 図3.4に示す閉ループ系を考える．開ループ伝達関数 $G(s)$ の Nyquist 軌跡が臨界点 $(-1, j0)$ を正の方向で回る回数を N ，開ループ系の開右半面極の数を P とする．このとき，閉ループ系が安定となるための必要十分条件は

$$N = P \tag{3.34}$$

が成り立つことである．ただし，開ループ伝達関数 $G(s)$ が虚軸上の極をもつとき，図 3.5 のようにその極を右半面上の半径 $\epsilon (\ll 1)$ の小半円で回避した閉曲線に沿った軌跡を使うとする．

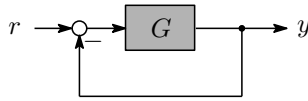


図 3.4 単位フィードバック系

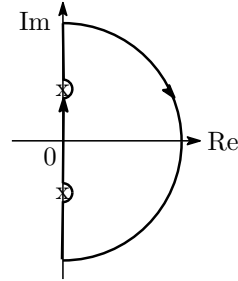


図 3.5 開右半面を囲む閉曲線

臨界点 $(-1, j0)$ を回る回数を数えるとき，正方向の回数は正，負の方向の回数は負として数える．回数を数えるとき，自分が Nyquist 軌跡に沿って歩くことを想像すればよい．

■ 例 3.9 開ループ伝達関数 $G(s)$ を

$$G(s) = \frac{2}{s(s+1)}$$

とする．閉ループ系の安定性を調べよう．図 3.6 は計算機で求めた Nyquist 軌跡を示す．この伝達関数が原点に極を一つもち，この極を回避する小半円 $s = \epsilon e^{j\theta}$ ， $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ に沿った $G(s)$ の軌跡は計算機で描けない．しかし，この部分の軌跡は次のように調べることができる．小半円の円周上で

$$G(s) = \frac{2}{\epsilon e^{j\theta}(\epsilon e^{j\theta} + 1)} \approx \frac{2}{\epsilon e^{j\theta}} = \frac{2}{\epsilon} e^{-j\theta}, \quad \epsilon \ll 1$$

が成り立つから，この部分は半径 $\frac{2}{\epsilon}$ で位相角が $\pi/2$ から $-\pi/2$ に変化する軌跡となる．すなわち，Nyquist 軌跡は複素右半面で閉じる曲線となる．よって，Nyquist 軌跡から $N = 0$ が分かる．一方， $G(s)$ が開右半面極をもたないから $P = 0$ である．したがって，閉ループ系は安定である．

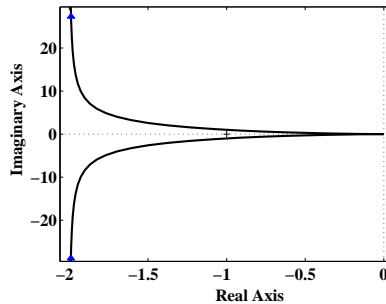


図 3.6 Nyquist 軌跡

□

〔1〕 多入出力系の Nyquist 軌跡 この場合，Nyquist 軌跡は

$$\det(I + G(j\omega)) \quad (3.35)$$

の軌跡にvari, 臨界点も原点に変わるが, 安定条件は定理 3.9 とまったく同様である。また, Nyquist 安定判別法はむだ時間を含むシステムにも適用できる。さらに, 周波数応答は実験的に得ることができるので, 開ループ系の伝達関数が未知であっても比例制御器 (P 制御器) などの安定化パラメータの範囲を図的に求めることが可能である。

3.2.3 Lyapunov の安定理論

状態の安定性を判別するとき, Lyapunov の安定理論が有効である。ここで, 次の形式の方程式を Lyapunov 方程式 (Lyapunov equation) と呼ぶ。

$$A^T X + X A + Q = 0 \quad (3.36)$$

ただし, $A, Q = Q^T$ は与えられた正方の実行列である。この方程式が一意解をもつための必要十分条件は, $\lambda_i(A) + \bar{\lambda}_j(A) \neq 0 (\forall i, j)$ である⁶⁾。よって, A が安定の場合必ず一意解をもつ。

A の安定性と解 X の関係, および対 (Q, A) と X の関係を次の定理に示す。

定理 3.10 X を Lyapunov 方程式 (3.36) の解とする。このとき, 以下の命題が成り立つ。

(1) A が安定であるとき, Lyapunov 方程式の解は次式によって与えられる。

$$X = \int_0^\infty e^{A^T t} Q e^{A t} dt \quad (3.37)$$

(2) $Q \geq 0$ かつ (Q, A) が可観測であるとき, $X > 0$ と A の安定性は等価である。

(3) $Q > 0$ のとき, $X > 0$ と A の安定性は等価である。

(4) A が安定であるとき, $Q \geq 0$ ならば, (Q, A) の可観測性と $X > 0$ は等価である。

証明 (1) 与えられた X を代入し $e^{A\infty} = 0$ を使うと, 次のように Lyapunov 方程式を満たすことが確認できる。

$$A^T X + X A = \int_0^\infty \frac{d e^{A^T t} Q e^{A t}}{dt} dt = e^{A^T t} Q e^{A t} \Big|_0^\infty = -Q$$

(2) λ を A の任意の固有値, $u \neq 0$ を対応する固有ベクトルとする. 式 (3.36) に左から u^* , 右から u をかけると

$$2\operatorname{Re}(\lambda)u^*Xu + u^*Qu = 0 \quad (3.38)$$

が成り立つ. $X > 0$ のとき, $u^*Xu > 0$, $u^*Qu \geq 0$ となるので, $\operatorname{Re}(\lambda) \leq 0$ となる. もし $\operatorname{Re}(\lambda) = 0$ であれば, 上式より $Qu = 0$ を得る. しかしこのとき

$$(A - \lambda I)u = 0, \quad Qu = 0 \quad (3.39)$$

が成立し, (Q, A) の可観測性に矛盾する. よって, A が安定でなければならない.

逆に, A が安定のとき, 式 (3.37) より X が半正定である. $\dot{x} = Ax$ の解が $x(t) = e^{At}x(0)$ であることに注意すれば, 式 (3.37) の両辺に $x(0)$ とその転置をかけると

$$x^T(0)Xx(0) = \int_0^\infty x^T(t)Qx(t)dt$$

が得られる. もし X が正定でなければ, $Xx(0) = 0$ を満たす $x(0) \neq 0$ が存在する. すると, 上式より $x(t)$ が

$$Qx(t) \equiv 0, \quad \forall t \geq 0$$

を満たさなければならない. この式を時間について繰り返し微分すると

$$QA^i x(t) = 0, \quad i = 0, \dots, n-1, \quad \forall t \geq 0 \quad (3.40)$$

を得る. これは (Q, A) の可観測性に矛盾する. よって, $X > 0$.

(3) 命題 (2) の証明よりも簡単なので, 省略する.

(4) (Q, A) が可観測ならば, $X > 0$ となることは上で示した. その逆だけを示す. いま, $X > 0$ であるが, (Q, A) は可観測でないとする. すると, ある $\lambda \in \sigma(A)$ と $u \neq 0$ があり, 式 (3.39) を満たす. 式 (3.38) より $\operatorname{Re}(\lambda) = 0$ という, A の安定性に矛盾した結論を得る.

この補題から分かるように, Lyapunov 方程式は安定性の判別にだけでなく, 可制御性や可観測性の判別にも非常に役立つものである. ただし, 本補題は与えられたシステムの安定性の確認に使うよりも, 制御系設計理論, 特に最適制御設計論など理論的構築の際の安定性の証明に用いられる場合が多い.

■ 例 3.10 2 次系について上記定理の命題 (2) を確かめよう. ここで, システムの係数行列は

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} \Rightarrow |sI - A| = s^2 + a_2s + a_1$$

で与えられるとする. すると $a_1, a_2 > 0$ が安定条件となることは Routh-Hurwitz 判別法で容易に分かる. ここで, 出力行列 c を $c = [1 \ 0]$ とすると, (c, A) が可観測となる. Lyapunov 方程式

$$XA + A^T X + c^T c = 0$$

において変数行列を $X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 \end{bmatrix}$ とおいて代入すると

$$\begin{cases} x_1 - a_2x_2 - a_1x_3 = 0 \\ x_2 - a_2x_3 = 0 \\ 2a_1x_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -a_2 & -a_1 \\ 0 & 1 & -a_2 \\ 0 & 2a_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

を得る．上式が一意解をもつために左辺の係数行列が正則であることは必要十分である．係数行列の三角ブロック構造よりその正則性は右下の 2×2 ブロックの正則性と等価になる．すなわち，

$$\begin{vmatrix} 1 & -a_2 \\ 2a_1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \iff a_1a_2 \neq 0 \iff a_1 \neq 0, a_2 \neq 0 \quad (3.42)$$

が一意解の存在条件となる．

さらに，Lyapunov 方程式の展開式を順次解いていくと，

$$x_2 = \frac{1}{2a_1}, x_3 = \frac{1}{a_2}x_2 = \frac{1}{2a_1a_2}, x_1 = a_2x_2 + a_1x_3 = \frac{a_1 + a_2^2}{2a_1a_2}$$

が得られる．よって，Lyapunov 方程式の解は

$$X = \frac{1}{2a_1a_2} \begin{bmatrix} a_1 + a_2^2 & a_2 \\ a_2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2a_1a_2} \begin{bmatrix} 1 & a_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a_2 & 1 \end{bmatrix}$$

となる．したがって，以下の等価条件が成立する．

$$X > 0 \iff 2a_1a_2 > 0, a_1 > 0 \iff a_1 > 0, a_2 > 0 \quad (3.43)$$

この条件はRouth-Hurwitz 判別法で導いた A の安定条件と同じである． \square

練習問題

3.1 システム $G(s) = s/(s^2 + \omega^2)$ に以下の入力 u を印加したときの出力 y を求めよ．この結果から何がいえるか．

(a) $u(t) = 1(t)$ (b) $u(t) = \sin \omega t$

3.2 図 3.7 においてプラント $P(s) = (s-1)/(s^2-4)$ を 1 次の制御器 $C(s) = (b_1s + b_0)/(s+a)$ で安定化することを考える．

- (a) 閉ループ系の特性多項式を任意に与えられた多項式 $p(s) = s^3 + \lambda_2s^2 + \lambda_1s + \lambda_0$ にするパラメータ (a, b_0, b_1) が一意に存在することを示せ．
- (b) 閉ループ極を $-2, -1 \pm j1$ に設定したとき，パラメータ (a, b_0, b_1) を具体的に求めよ．以下，この条件のもとで設問 (c), (d) を解く．
- (c) $k = 1$ のとき，単位ステップ状の目標値に対する出力の定常値を計算せよ．
- (d) 定数目標値 r に対して出力 y が $y(\infty) = r$ となるように目標値の増幅ゲイン k を決めよ．

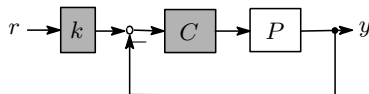


図 3.7 閉ループ系

3.3 制御対象 $P(s) = 1/(s^2 - 4)$ を制御器 $K(s) = (s-2)/s$ で内部安定化できるかについて考察せよ．

3.4 2章練習問題 2.9, 2.10のシステムについて可安定性および可検出性を調べよ.

3.5 Routh-Hurwitzの安定判別法を用いて, 以下の多項式の根がすべて負の実部をもつために許される K の値の範囲を求めよ.

$$(a) p(s) = s^3 + 3s^2 + Ks + 1 \quad (b) p(s) = s^4 + 4s^3 + Ks^2 + 4s + 1$$

3.6 次の自由システムについて係数行列の固有値を求め, その安定性を調べよ.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} x, \quad x(0) \neq 0$$

3.7 極 p が不確かな制御対象

$$P(s) = \frac{1}{s-p}, \quad a \leq p \leq b, \quad b > 0$$

のすべてをPI補償器 $K(s) = K(1 + 1/s)$ で安定化したい. 閉ループ系の特性多項式を調べることによって, 比例ゲイン K ゲインに対する条件を導け.

3.8 マス・バネ系の伝達関数は $P(s) = 1/(Ms^2 + 1)$ で与えられ, その入出力は (u, y) である. 質量が $M = 1 + \Delta$ のように変化すると仮定する. このプラントをPD制御器 $K(s) = 4s + 3$ で制御する. ただし, $K(s)$ の入力は $-y$ とする. 許される質量変化 Δ の範囲を求めよ.

3.9 安定システム $\dot{x} = Ax, y = Cx$ の出力が

$$\int_0^{\infty} y^T(t)y(t)dt = x^T(0)Xx(0)$$

を満たすことを示せ. ただし, X は Lyapunov 方程式

$$A^T X + XA + C^T C = 0$$

の解である.

4

システムの性能

フィードバック制御の究極の目的は、目標値追従や外乱抑制を実現することである。これらは一般に性能 (performance) と呼ばれる。制御性能のよさを客観的に評価するには、評価基準が必要である。制御工学では、主に過渡応答と定常応答の二つの角度から性能を評価している。以下では、これらについて説明する。

制御システムでは、制御対象である物理系の物理量 (出力) を望まれるように振舞わせることが目的である。要求される出力信号の動的な振る舞いを目標値 (reference input) という信号で表現すれば、これは物理系の出力を目標値に一致させることになる。一方、システムを物理世界で作動させるとき、常に回りの環境から何らかの影響を受ける。例えば、飛行機が飛んでいるときには風のおおりを受けるし、船が航行するときには波に揺らされる。飛行機や船をシステムと考えれば、風や波は環境からの影響として捉えられる。このような環境からの影響は、システム工学では外乱 (disturbance)[†] と呼んでいる。当然のことながら、外乱を受けてもシステムの出力を目標値から逸脱しないように制御する必要がある。図 4.1 は典型的な制御システムの動作状況を表している。その中、 r は目標値を表し、 d は外乱と表す。目標値に一致させる制御は目標値追従 (reference tracking) といい、外乱が出力に与える影響を抑える制御は外乱抑制 (disturbance attenuation) という。実システムでは、常に両者を同時に実現しなければならない。

[†] 外乱は一般に力やトルクのような形でシステムに影響を及ぼしている。それがシステムの動特性を通して出力である変位や速度などに望ましくない影響を与える。この意味で外乱はプラント出力に直接影響するわけではない。ゆえに、プラント出力に直接働く出力外乱という概念は物理的には正しくない。

設計したシステムのよさはその時間応答で評価される．時間応答はさらに過渡応答と定常応答に細分化できる．以下の節では，これらの応答の評価方法について述べる．

4.1 テスト信号

4.1.1 目標値信号

図4.1の閉ループ系における目標値 $r(t)$ に追従する問題を考える．実問題においては，追従させるべき目標値はさまざまで，あらゆる目標値を考えて制御系を設計することは非現実である．そこで，制御理論では，テスト信号 (test signal) と呼ばれるいくつかの特殊な信号への追従性能でシステムを評価している．代表的なテスト信号としてはステップ信号 (step signal)，ランプ信号 (ramp signal) と正弦波信号 (sinusoidal signal) が挙げられる．このように追従問題を扱う物理的な背景は，実システムでは多くの場合目標軌道がゆっくり変化する滑らかな信号であることにある．滑らかな関数は時間を区切って考えれば，前述のテスト信号で十分に精度よく近似できる．図4.2はその一例を图示している．テスト信号にすばやく追従できれば，実際の目標軌道にも精度よく追従できるであろう．よって，応答速度が十分に速いという前提条件に立てば，テスト信号への追従問題だけを考えればよい．

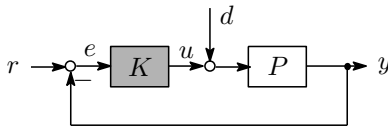


図4.1 目標値追従と外乱制御

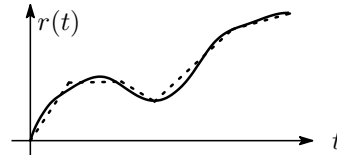


図4.2 目標軌道の近似

代表的なテスト信号を図4.3に示す．

ステップ信号

$$r(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ k, & t \geq 0 \end{cases}$$

ランプ信号

$$r(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ kt, & t \geq 0 \end{cases}$$

正弦波信号

$$r(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ k \sin \omega t, & t \geq 0 \end{cases}$$

特に、ステップ信号において $k = 1$ のとき単位ステップ信号 (unit step signal) といい、 $1(t)$ で表す。すると、ランプ信号は $kt \cdot 1(t)$ 、正弦波信号は $k \sin \omega t \cdot 1(t)$ と書くことができる。

物理的には、ステップ信号はシステムの動作状態の切替えに対応し、ランプ信号は加速や減速に対応する。例えば、電車を非常停止させるとき、目標速度信号はステップ信号となるが、正常に発進あるいは停止する場合には目標速度はランプ信号になる。電車を運行させるときの代表的な目標速度を図 4.4 に示す。これは駅から発進して加速し、予定速度になると一定速度で走行、そして次の駅に近づくと減速して駅に停止するというプロセスを表している。これに対して、正弦波信号は 2 次元位置の円軌道などに現れる。なお、どんなテスト信号へ追従するように制御系を設計すべきかは実問題によって異なる。通常、ステップ信号がよく用いられる。

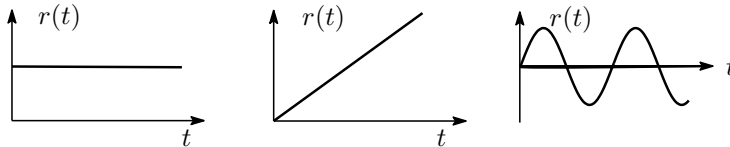


図 4.3 テスト信号の代表例

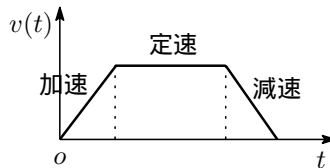


図 4.4 目標速度信号

4.1.2 持続外乱

同様に、外乱抑制問題を扱うとき、勾配が一定である坂を登るときの重力のように値が一定であるものはステップ信号と考えることができるし、一定の加速度で加速するときの摩擦力や空気抵抗はランプ信号と考えることができる。また、波のうねりのように一定振幅と周期で周期的に変化するものは正弦波として捉えることができる。この種の外乱は、持続外乱 (persistent disturbance) と呼ばれる。

4.1.3 テスト信号の性質

上述のテスト信号の特徴は、時間がいくら経っても零へ収束しないことである。このため、持続信号 (persistent signal) ともいわれる。さらに、その Laplace 変換を見ると、

$$\mathcal{L}[1(t)] = \frac{1}{s}, \quad \mathcal{L}[t \cdot 1(t)] = \frac{1}{s^2}, \quad \mathcal{L}[\sin \omega t \cdot 1(t)] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \quad (4.1)$$

のようになっている。任意の信号はその Laplace 変換のインパルス応答であるので、信号の Laplace 変換をそのモデルとして捉えることができる。この意味で、上記テスト信号のモデルは (4.1) の各等式右辺の伝達関数で与えられる。これらがすべて虚軸極を有し、よって不安定である。

4.2 定常応答

時間が十分に経ったときのシステム出力応答 $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$ は定常応答 (steady-state response) と呼ばれる。本節では、よい定常応答とは何か、そしてこれを達成するにはどんな条件が要するかについて解析する。

4.2.1 閉ループ伝達関数に対する解析

本節では、まず与えられた閉ループ伝達行列 $G(s)$ に対して、よい定常応答を達成するためにどんな条件が必要かについて解析する。 $G(s)$ の入力を $u(t)$ 、出力を $y(t)$ とする。閉ループ系は安定でなければならないので、 $G(s)$ を安定と仮定しておく。

〔1〕 定常出力と伝達関数ゲインの関係 次の定理は、入力がステップ信号や正弦波信号であるとき、出力も定常状態において同様な信号になることを示す。

定理 4.1 安定伝達関数 $G(s)$ の入力が $u(t) = \cos(\omega t)1(t)$ であるとき、 $t \rightarrow \infty$ のときの出力 $y(t)$ は次式で与えられる。

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = |G(j\omega)| \cos(\omega t + \angle G(j\omega)) \quad (4.2)$$

証明 $G(s)$ が安定なので、そのインパルス応答 $g(t)$ の Fourier 変換は $\mathcal{F}[g(t)] = \int_0^\infty g(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau = G(j\omega)$ となる。また、 $G(j\omega)$ を極座標で表すと、 $|G(j\omega)|e^{j\angle G(j\omega)}$ と書ける。よって $\cos(\omega t) = \operatorname{Re}(e^{j\omega t})$ および $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{j\omega t} = e^{j\omega t}$ を用いれば

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t g(\tau)u(t-\tau)d\tau = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t g(\tau)\operatorname{Re}(e^{j\omega(t-\tau)})d\tau \\ &= \operatorname{Re} \left(e^{j\omega t} \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t g(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau \right) = \operatorname{Re} (e^{j\omega t}G(j\omega)) \end{aligned}$$

$$= |G(j\omega)| \operatorname{Re} \left(e^{j(\omega t + \angle G(j\omega))} \right) = |G(j\omega)| \cos(\omega t + \angle G(j\omega))$$

が成り立つことが分かる．

また， $1(t) = \cos(0 \cdot t)1(t)$ が成り立つので，単位ステップ信号は $\omega = 0$ のときの余弦波関数とみなせる．よって，その定常ステップ応答は次のようになる．

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = |G(j0)| \cos \angle G(j0)$$

$G(s)$ が実係数の有理関数なので， $G(j0)$ も実数であり $\angle G(j0)$ が 0 か π となる．すると，上式より次の関係が得られる．

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |y(t)| = |G(j0)| \quad (4.3)$$

この定理から，持続外乱 $u(t) = \cos(\omega t)1(t)$ がシステム $G(s)$ の定常出力に与える悪影響を低減するために，同じ周波数におけるゲイン $|G(j\omega)|$ を下げることが必要かつ十分であることが分かる．また，ステップ外乱に対しては，低周波ゲイン $|G(j0)|$ を下げることになる．

〔2〕 出力漸近収束の条件 出力が漸近収束するとは，次の条件が成り立つことである．

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$$

そのための条件を解析するにあたり，次の補題が基礎となる．

補題 4.1 信号 $f(t)$ は $t \geq 0$ で定義されたもので，その Laplace 変換 $\hat{f}(s)$ は有理関数であるとす．このとき， $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0$ のための必要十分条件は $\hat{f}(s)$ が安定になることである．

証明 十分性：最終値の定理からすぐに分かる．

必要性： $\hat{f}(s)$ が有理関数なので，部分分数に展開できる．仮に $\hat{f}(s)$ に虚軸を含む右半面に極をもつと，それに対応する部分分数の逆 Laplace 変換は指数部分の実部が零以上の指数関数や t の多項式，もしくは正弦波を含むので，決して零に収束できない．

したがって，線形システム $G(s)$ においてその出力 $y(t)$ が漸近収束するための必要十分条件は $\hat{y}(s)$ が安定になることである．以下では，伝達関数の立場からどんな条件が必要であるかを調べる．

例として，ステップ入力を考える．このとき，入力 $u(t) = 1(t)$ のモデルは

$$\hat{u}(s) = \frac{1}{s}$$

であり，原点極を一つもつ． $\hat{y}(s) = G(s)\hat{u}(s)$ を安定にするには， $G(s)$ の零点で $\hat{u}(s)$ の不安定極を消去しなければならない．よって， $G(s)$ は

$$G(j0) = 0 \quad (4.4)$$

を満たさなければならない。同様に，正弦波入力 $u(t) = \sin(\omega t)1(t)$ に対する定常出力を零にするために

$$G(j\omega) = 0 \quad (4.5)$$

が成り立たなければならない。すなわち，テスト信号に対する定常出力を零にするためには，伝達関数 $G(s)$ がテスト信号モデルの極と同じ値の零点を持つことが必要である。

以下の項ではフィードバック系に対し，本項の結果に基づいて，目標値追従および持続外乱制御のために開ループシステムが満たすべき条件を導出する。

4.2.2 目標値追従

図4.5の目標値追従問題を考える。目標値は $r(t)$ で，制御の目的はプラントの出力 $y(t)$ を目標値に一致させることである。目標信号追従のよさを評価するには追従誤差

$$e(t) = r(t) - y(t) \quad (4.6)$$

を調べればよい。目標値から追従誤差までの伝達関数を $H_{er}(s)$ とし，目標値のモデルを $R(s)$ とすると，追従誤差は

$$\hat{e}(s) = H_{er}(s)R(s) \quad (4.7)$$

と表される。物理系の信号は慣性をもつために滑らかにしか変化できない。このため，システムの出力は瞬時にテスト信号に追従することができない。過渡状態を経てはじめて追従することができる。しかし，少なくとも時間が十分に経った段階，すなわち定常状態 ($t \rightarrow \infty$) で出力と目標値の差 $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t)$ を低減したい。理想的には，出力を目標値に完全に一致させたい。すなわち， $e(\infty) = 0$ を実現したい。このことは漸近追従 (asymptotic tracking) という。

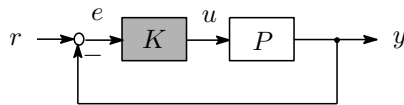


図4.5 目標値追従

〔1〕 追従誤差と開ループゲインの関係 開ループ伝達関数に対する条件を導くために，ループゲイン

$$L(s) = P(s)K(s) \quad (4.8)$$

をおく．目標値から追従誤差までの閉ループ伝達関数は

$$H_{er}(s) = \frac{1}{1 + L(s)} \quad (4.9)$$

で与えられる．ステップ状の目標値に対する追従誤差を低減させるには

$$|H_{er}(j0)| = \left| \frac{1}{1 + L(j0)} \right| \ll 1 \quad (4.10)$$

が必要である．そのためには

$$|L(j0)| \gg 1 \quad (4.11)$$

でなければならない．すなわち，ループゲイン $L(s)$ が十分に高い低周波ゲインをもつ必要がある．同じように，角周波数 ω_0 の正弦波目標値に対する追従誤差を低減させるために，以下の条件が必要となる．

$$|L(j\omega_0)| \gg 1 \quad (4.12)$$

〔2〕 漸近追従の条件

ステップ信号に漸近追従するためには， $H_{er}(j0) = 0$ が必要である．このことより

$H_{er}(j0) = \frac{1}{1 + L(j0)} = 0 \Leftrightarrow |L(j0)| = \infty \Leftrightarrow L(s)$ が $s = 0$ に極をもつすなわち，ループゲイン $L(s)$ に目標値のモデル $R(s) = 1/s$ をもつことが必要である．図 4.5 から分かるように物理的には，プラント $P(s)$ の出力 $y(t)$ はループゲイン $L(s)$ の出力でもある． $L(s)$ は零に収束するべき追従誤差 $e(t)$ で駆動されるので， $y(t)$ を一定値に維持できるためにはループゲイン $L(s)$ に過去のデータを保存できる機構，つまり積分器が必要である．ところが，積分器はステップ信号のモデルである．すなわち，ステップ信号に漸近追従できるためには，ループゲイン $L(s)$ にステップ信号のモデルをもたせなければならない．

さらに，もし制御対象 $P(s)$ に原点零点があると，内部安定性のためにこの不安定零点を制御器 $K(s)$ の極で打ち消すことはできない．すなわち，この場合ループゲイン $L(s) = P(s)K(s)$ に積分器をもたせることができず，出力はステップ信号に追従できなくなる．

同様なことはほかのテスト信号に対してもいえる．このことの一般化は次の内部モデル原理 (internal model principle) となる．

定理 4.2 (内部モデル原理 1) 図 4.5 の 1 入出力フィードバック系を内部安定と仮定する．また，目標値のモデルを $R(s) = N_R(s)/M_R(s)$ とし，完全不安定とする．このとき，以下の命題が成立する．

- (1) 漸近追従が実現できるためには, $R(s)$ の極と同じ位置に制御対象 $P(s)$ が零点をもつてはいけない.
- (2) (1) の条件が成り立つとき, 漸近追従を実現するためには, ループゲイン $L(s)$ が $1/M_R(s)$ をもつことが必要十分である.

証明 (1): プラントと制御器を $P = N_P/M_P$, $K = N_K/M_K$ のように既約分解すると, ループゲイン $L(s) = N(s)/M(s)$ の分子分母多項式はそれぞれ $N = N_P N_K$, $M = M_P M_K$ となる. N_P に M_R と共通の因子 $(s - \lambda)$, $\text{Re}(\lambda) \geq 0$ をもつ場合, 内部安定性のためにこの因子を $M_K(s)$ の因子 (制御器の極と対応する) で相殺できない. ゆえに, $N(s)$ に因子 $(s - \lambda)$ が残り, $L(\lambda) = 0$ となる. すると, 目標値から追従誤差までの伝達関数 $H_{er}(s)$ が $s = \lambda$ において

$$H_{er}(\lambda) = \frac{1}{1 + L(\lambda)} = 1$$

となり, $s = \lambda$ に零点をもたない. よって, $\hat{e}(s) = H_{er}(s)R(s)$ は不安定となって, 追従誤差が零に収束しない.

(2): ループゲイン $L(s)$ を $L(s) = N(s)/M(s)$ のように既約分解すると, 追従誤差の Laplace 変換は

$$\hat{e}(s) = \frac{1}{1 + L(s)} R(s) = \frac{M(s)}{M(s) + N(s)} \frac{N_R(s)}{M_R(s)}$$

と書ける. $M_R(s)$ の根がすべて閉右半面にあるため, $\hat{e}(s)$ を安定化するために, $M(s)$ の因子で $M_R(s)$ を消去しなければならない. したがって, $M(s)$ が $M_R(s)$ をもつことが必要十分である.

ループゲイン $L(s)$ が目標値のモデルをもつという意味で, $L(s)$ の中の $1/M_R(s)$ が内部モデルと呼ばれている. なお, 内部モデル原理は多入出力系に対しても成立する. ただし, この場合内部モデルは単純に目標値のモデルになるのではなく, 入出力間の干渉を反映してさらに複雑になる. その一例を次に示す.

例 4.1 図 4.6 に示すシステムについて考える. 制御目的は出力 $y_1(t)$ を正弦波信号 $r_1(t) = \sin \omega t \cdot 1(t)$ に, $y_2(t)$ をステップ信号 $r_2(t) = 1(t)$ に漸近追従させることである. この 2 入力 2 出力のプラントと制御器の伝達行列は

$$P(s) = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ \epsilon P_1 & P_2 \end{bmatrix}, \quad K(s) = \begin{bmatrix} K_1 & 0 \\ 0 & K_2 \end{bmatrix}$$

で与えられる. ここで, 二つの部分システムのループゲインをそれぞれ $L_1(s) = P_1(s)K_1(s)$, $L_2(s) = P_2(s)K_2(s)$ とおく. ブロック線図より

$$\hat{y}_1(s) = \frac{L_1}{1 + L_1} \hat{r}_1(s), \quad \hat{y}_2(s) = \frac{L_2}{1 + L_2} \hat{r}_2(s) + \frac{\epsilon}{1 + L_2} \hat{y}_1(s)$$

の関係が成り立つ. つまり, y_1 は外乱として y_2 に影響を与える. よって, 追従誤差はそれぞれ

$$\hat{e}_1(s) = \frac{1}{1 + L_1} \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}, \quad \hat{e}_2(s) = \frac{1}{1 + L_2} \frac{1}{s} - \frac{\epsilon}{1 + L_2} \hat{y}_1(s) \quad (4.13)$$

となる. すると, 明らかに $e_1(\infty) = 0$ のために $L_1(s)$ が $1/(s^2 + \omega^2)$ をもつことが必要十分である. 一方, $\hat{y}_1(s)$ が $1/(s^2 + \omega^2)$ をもつので, $e_2(\infty) = 0$ を保証するために

$L_2(s)$ が $1/s$ だけでなく、 $1/(s^2 + \omega^2)$ ももたなければならない。よって、システム全体のループゲイン

$$L(s) = P(s)K(s) = \begin{bmatrix} L_1 & 0 \\ \epsilon L_1 & L_2 \end{bmatrix}$$

が次の内部モデルをもつことになる。

$$\begin{bmatrix} 1/(s^2 + \omega^2) & 0 \\ 0 & 1/s(s^2 + \omega^2) \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

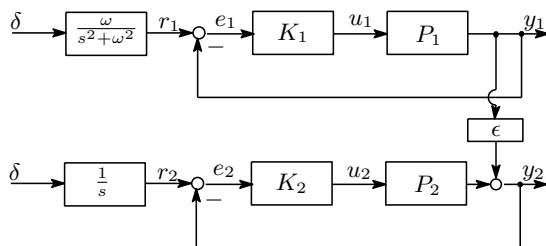


図 4.6 干渉項をもつ多入出力系

□

また、上の説明から分かるように、目標値への漸近追従は内部モデルで目標値と同じ信号を開ループ伝達関数 $L(s)$ の出力に作ることによって実現しているので、システムのパラメータに依存しない。すなわち、システムのパラメータが変化しても、閉ループ系の安定性さえ保たれていれば漸近追従ができる。その意味で、内部モデルはロバスト漸近追従を保証している。

4.2.3 外乱制御

図 4.7 は持続外乱の影響を受けているプラントを示している。実システムでは、考えられる持続外乱として風や波などによる力外乱、摩擦、重力外乱などが挙げられる。制御目標としては、このような持続外乱がプラント出力に与える影響をなるべく抑制したい。

〔1〕 定常外乱応答抑制の条件 外乱 $d(t)$ と出力 $y(t)$ 間の伝達関数は

$$H_{yd}(s) = \frac{P(s)}{1 + P(s)K(s)} \quad (4.15)$$

である。ステップ状の外乱を抑制するには $|H_{yd}(j0)| \ll 1$ が必要となるが、これを実現し得る方法は次の二通りである。

$$(1) |P(j0)| \ll 1 \quad \text{あるいは} \quad (2) |K(j0)| \gg 1$$

(1) を満たす制御対象は現実にはほとんど存在しない。なぜなら、制御系の主たる目的は目標値追従であり、低周波数帯域の正弦波信号に精度よく追従するた

めに同じ帯域でループゲイン $|L| = |PK|$ を十分高くする必要がある．よって，制御対象は一般に低周波数帯域で高いゲインをもつように設計されている．

一方，(2) は制御器に対する要求であり，ループゲインを高くする仕様と矛盾しないから，実現可能である．同様に，角周波数 ω の正弦波外乱を抑圧するには， $|K(j\omega)| \gg 1$ とすればよい．

〔2〕 持続外乱の漸近的除去

理想的には，外乱の特性(モデル)が既知の場合，その影響を出力定常応答から完全に排除したい．この場合，図4.7のシステム構成から想像できるように，制御器 $K(s)$ で外乱と同じ信号作り，外乱と相殺させることによって持続外乱の漸近的除去をしなければならない．したがって，制御器に外乱のモデル $D(s)$ (内部モデル)をもつ必要がある．

例えば，ステップ状の外乱を漸近除去するには制御器 $K(s)$ が外乱のモデル $D(s) = 1/s$ をもたなければならない．これは数学的には次のように示せる．ここで，プラントと制御器を

$$P(s) = \frac{N_P(s)}{M_P(s)}, \quad K(s) = \frac{N_K(s)}{M_K(s)} \quad (4.16)$$

のように分母分子多項式で既約分解しておく．すると，出力応答は

$$\hat{y}(s) = \frac{P(s)}{1 + P(s)K(s)} D(s) = \frac{N_P(s)M_K(s)}{M_P(s)M_K(s) + N_P(s)N_K(s)} \times \frac{1}{s} \quad (4.17)$$

と書ける． $y(t)$ を漸近的に零に収束させることと $\hat{y}(s)$ を安定にすることは等価なので， $N_P(s)M_K(s)$ の零点で不安定極 $p = 0$ を消去しなければならない．よって，

$$N_P(0)M_K(0) = 0 \Leftrightarrow N_P(0) = 0 \text{ もしくは } M_K(0) = 0 \quad (4.18)$$

が必要となる．つまり， $P(s)$ が零点 $z = 0$ をもつか， $K(s)$ が極 $p = 0$ をもたなければならない．しかし原点零点をもつ制御対象は稀なので，制御器に積分器をもたせなければならない．

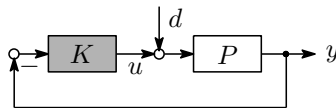


図4.7 持続外乱の漸近除去

以上の考察を一般化すると，次の定理を得る．

定理4.3 (内部モデル原理2) 図4.7の1入出力フィードバック系が内部安定であると仮定する．また，外乱モデルを $D(s) = N_D(s)/M_D(s)$ とし，

完全不安定とする．さらに，制御対象 $P(s)$ の零点と $D(s)$ の極が相異なると仮定する．このとき，漸近的に外乱の影響を除去する，すなわち $y(t) \rightarrow 0$ を実現するために，制御器 $K(s)$ が $1/M_D(s)$ をもつことが必要十分である．

証明 制御対象 $P(s)$ と制御器 $K(s)$ を (4.16) 式のように既約分解すると，出力の Laplace 変換は

$$\hat{y}(s) = \frac{P(s)}{1 + P(s)K(s)} D(s) = \frac{N_P(s)M_K(s)}{M_P(s)M_K(s) + N_P(s)N_K(s)} \frac{N_D(s)}{M_D(s)}$$

と書ける． $M_D(s)$ の根がすべて不安定で N_P と M_D が既約であるため， $\hat{y}(s)$ を安定化するために， $M_K(s)$ の因子で $M_D(s)$ を消去しなければならない．すなわち， $M_K(s)$ が $M_D(s)$ をもつことが必要十分である．

なお，制御対象の零点に外乱モデルの極と同じものがあれば，これらの極を除いた $D(s)$ の極を制御器にもたせればよい．この意味で，制御対象の零点は外乱漸近除去の妨げになっていない．

また，漸近追従の場合制御対象 $P(s)$ に内部モデルがあれば，制御器 $K(s)$ に内部モデルをもたせる必要はないのに対して，外乱除去の場合制御器 $K(s)$ に内部モデルをもたせなければならない．この違いにも注意されたい．

目標値と持続外乱両方が同時に存在する場合，目標値漸近追従のための条件は次の系で与えられる．

系 4.1 目標値と持続外乱両方が同時に存在する図 4.1 の 1 入出力安定システムにおいて，目標値モデルを $R(s) = N_R(s)/M_R(s)$ とし，外乱モデルを $D(s) = N_D(s)/M_D(s)$ とする．両方とも既約な分解であり，かつ完全不安定である．多項式 $\phi(s)$ を多項式 $M_R(s)$ と $M_D(s)$ の最小公倍多項式とする．制御対象の零点と $\phi(s)$ の根が違う場合，制御器に $1/\phi(s)$ があれば出力は漸近的に目標値 $r(t)$ に追従できる．

証明 $M_K(s)$ に $\phi(s)$ があるので， $M_D(s)$ をもつことになる．定理 4.3 によれば，この場合外乱による出力定常値は零となる．また，与えられた条件下でループゲイン $L(s) = P(s)K(s)$ が $1/M_R(s)$ をもつ．よって，定理 4.2 によれば目標値による定常出力は目標値に一致する．重ね合わせの原理によりプラントの出力はこの両者の和となる．したがって，出力は目標値 $r(t)$ に漸近追従できる．

なお，プラント $P(s)$ と目標値モデル $R(s)$ の極が異なり，かつ $P(s)$ の零点と $\phi(s)$ の根も異なる場合，上記条件は必要になる．

4.3 過渡応答

過渡応答とはシステムの出力が定常値に収束するまでの振舞をいう。目標値追従や外乱抑制問題などでは、出力がすばやく定常値へ収束することが要求され、そして定常値へ収束するときの行き過ぎ量が小さいことも求められる。

4.3.1 評価基準

古典的には、ステップ応答で過渡応答を評価している。安定システムの典型的な過渡応答は図4.8に示される。この図は定常値 $y(\infty)$ で正規化された $y(t)$ を表している。応答のよさを示す尺度として、以下の評価量が用いられる。

立ち上がり時間 t_r : 出力 $y(t)$ が定常値の10%から90%に立ち上がるのにかかる時間

安定時間 t_s : 定常値近傍のあらかじめ定められた範囲 ϵ (通常 $\pm 1\%$ や $\pm 5\%$ を用いる) に収束するまでにかかる時間

行き過ぎ量 M_p : 出力の最大値 y_{\max} と定常値の相対差 $(y_{\max} - y(\infty))/y(\infty)$

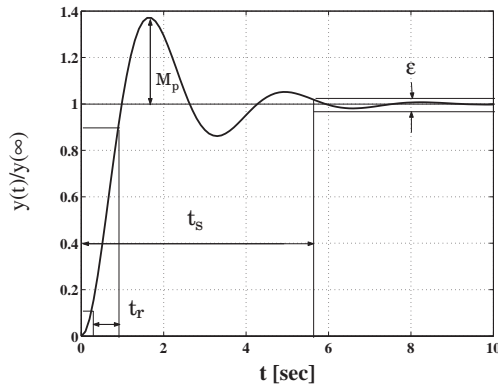


図4.8 過渡応答

これらは仕様 (specification) と呼ばれ、その意味は図4.8に示されている。追従制御の目的は目標値にすばやく追従し、かつ目標値からの行き過ぎ量をできるだけ抑えることである。したがって、これらの評価量が小さければ小さいほど、システムの過渡応答の性能がよい。線形システムの応答は指数関数で与えられるので、理論上出力が定常値に完全に到達するには無限大の時間がかかる。この意味において、あらゆる安定システムの収束時間が同じであるともいえる。しかし、我々の経験ではシステムの収束の速さがそれぞれ異なる。これを指し

示す指針の一つは整定時間である．ゆえに，工学的には整定時間が収束時間として捉えられている．

4.3.2 基準 2 次系

以下では，これらの性能仕様とシステムのパラメータ，特に極の位置との関係について考えよう．一般的なシステムに対しては，性能仕様とパラメータの関係が複雑すぎて，普遍的な指針は得られそうもない．しかし，多くの場合システムの極は虚軸に比較的に近い一対の複素極と虚軸から遠く離れるほかの極からなる．伝達関数の部分分数展開から分かるように，出力応答は各極に関する項(モード(mode)という)の和となっている．虚軸に一番近い極は主要極(dominant pole)と呼ばれる．虚軸から遠く離れた極の応答は主要極の応答よりも零への収束がはるかに速いので，ごく初期の時間帯を除いて出力の応答は主要極の応答で近似できる．したがって，低次のシステムのパラメータと応答の関係が分かれば，この関係は高次のシステムに対しても指針となり得る．

■ 例 4.2 次の二つの伝達関数のステップ応答を比較しよう．図 4.9 の応答から分かるように，両者の時間応答にさほど差は見られない．

$$G_1(s) = \frac{8}{s^2 + 4s + 8}, \quad G_2(s) = \frac{80}{(s^2 + 4s + 8)(s + 10)}$$

実は， G_2 に極 -10 があるが，主要極 $-2 \pm j\sqrt{2}$ (G_1 の極でもある) よりは虚軸から離れている．この極による応答は主要極の応答より 5 倍の速さで零に収束するので，瞬く間に消えてしまう．数式的には， G_2 は次式から分かるように G_1 で近似できる．

$$G_2(s) = \frac{8}{s^2 + 4s + 8} \times \frac{1}{s/10 + 1} \approx \frac{8}{s^2 + 4s + 8} = G_1(s)$$

この近似は低周波数帯域で成り立つものである．ステップ信号には低周波数成分が主要部分を占めるから，その伝達は伝達関数の低周波数特性によって決まる．これは， G_2 と G_1 のステップ応答に大差がない理由である．

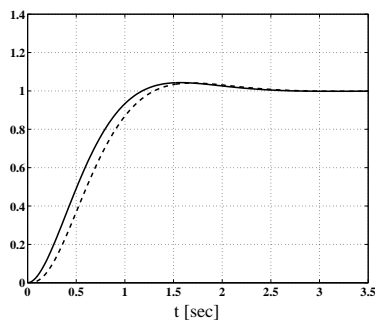


図 4.9 応答の比較(実線： G_1 ，破線： G_2)

ゆえに，一般に次の基準 2 次系 (prototype 2nd order system) について考える．

$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (4.19)$$

ここで， ζ は減衰係数 (damping ratio)， ω_n は固有周波数 (natural frequency) と呼ばれる．その極は

$$p_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \quad (4.20)$$

である．このシステムの特徴として，有限零点をもたず，しかも低周波ゲインは $H(j0) = 1$ となっている．最終値の定理から分かるように， $H(s)$ に単位ステップ入力を印加したとき，その出力は

$$y(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s\hat{y}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \times H(s) \frac{1}{s} = H(0) = 1 \quad (4.21)$$

となり，ステップ入力に漸近追従できる．以下では，ステップ応答と $H(s)$ のパラメータの関係について述べる．

〔1〕 応答仕様とパラメータの関係

減衰係数が $0 < \zeta < 1$ の範囲にあるとき，基準 2 次系のパラメータと応答仕様との関係は次のようになる^{1),4)} (練習問題 4.6)．

$$t_r \approx \frac{1.8}{\omega_n} \quad (4.22)$$

$$M_p = e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \quad (4.23)$$

$$t_s \approx \frac{4.6}{\zeta\omega_n} \quad (\pm 1\% \text{ 仕様}) \quad (4.24)$$

これらの関係式から，次のことがいえる．

- (1) 行き過ぎ量 M_p は減衰係数 ζ だけに依存する． ζ を上げれば， M_p が下がる (図 4.10 参照)．
- (2) ζ と ω_n の積は極の実部の大きさに等しく， $\zeta\omega_n$ を上げれば，整定時間 t_s が短くなる．

したがって，行き過ぎ量 M_p と整定時間 t_s の値が与えられたとき，仕様を満たすパラメータ値の範囲は以下ようになる．

$$\zeta \geq \zeta(M_p) = \frac{|\ln M_p|}{\sqrt{\pi^2 + |\ln M_p|^2}} \quad (4.25)$$

$$\zeta\omega_n \geq \frac{4.6}{t_s} \quad (4.26)$$

〔2〕 応答仕様と極の位置の関係 次に，行き過ぎ量，整定時間の仕様と基準 2 次系極の関係について調べる．まず，式 (4.26) より二つの複素極の実

部は

$$\operatorname{Re}(p_{1,2}) = -\zeta\omega_n \leq -\frac{4.6}{t_s} \quad (4.27)$$

を満たさなければならない．そして，この2次系の極を極座標で表すと

$$p_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = \omega_n e^{j(\pi \pm \theta)}, \quad \theta = \arccos \zeta$$

となる． $\arccos \zeta$ が ζ の減少関数なので，式(4.25)より角度 θ は

$$\theta \leq \theta_p := \arccos \zeta(M_p) \quad (4.28)$$

を満たさなければならない．複素平面上で許容される極の範囲を図示すると，図4.11の影の部分となる．例えば，角度 $\theta_p = 45^\circ$ が減衰係数 $\zeta(M_p) = 0.707$ ，つまり $M_p = 5\%$ と対応する．この関係は，後に極配置による設計法で役立つ．

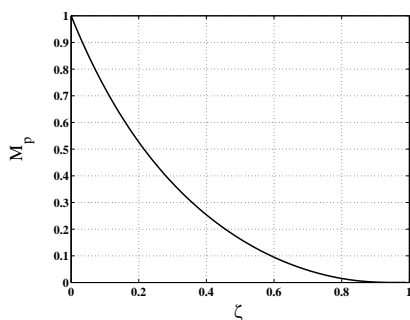


図 4.10 行き過ぎ量 M_p と減衰係数 ζ の関係

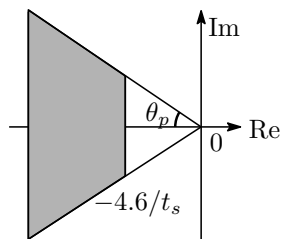


図 4.11 許容極の範囲

■ 例 4.3 $t_r \leq 0.6[\text{sec}]$ ， $M_p \leq 10\%$ ， $t_s \leq 3[\text{sec}]$ となるように ζ と ω_n を決めよう．

まず $M_p = 10\%$ に対応する減衰係数は

$$\zeta(M_p) = \frac{|\ln 0.1|}{\sqrt{\pi^2 + |\ln 0.1|^2}} \approx 0.59$$

である．よって， $\zeta \geq 0.59$ となる．次に，立ち上がり時間と整定時間の仕様から

$$\omega_n \approx \frac{1.8}{t_r} \geq 3, \quad \zeta\omega_n \geq \frac{4.6}{t_s} \geq 1.53$$

を得る． $\zeta \geq 0.59$ ， $\omega_n \geq 3$ であれば， $\zeta\omega_n \geq 1.53$ は自動的に満たされるので，パラメータの範囲は次のようになる．

$$\zeta \geq 0.59, \quad \omega_n \geq 3$$

□

4.3.3 付加した極/零点の影響

〔1〕 零点の影響

式(4.19)の基準2次系に零点を付加したときの応答変化を調べよう．新しい伝達関数を

$$H(s) = \frac{\omega_n^2 \left(1 + \frac{1}{a\zeta\omega_n s}\right)}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}, \quad a \in \mathbf{R} \quad (4.29)$$

とする．その低周波ゲイン $H(j0)$ は基準 2 次系に合わせてある．付加した零点は

$$z = -a\zeta\omega_n \quad (4.30)$$

である．特に， $a \rightarrow 0$ のときこの零点が虚軸に近づく． a が正と負の場合について，それぞれのステップ応答を計算した結果，図 4.12 のようになる．基準 2 次系と比較すると，次の特徴がある．

- 整定時間はほとんど変化しない．
- $a > 0$ の場合， a が小さいほど行き過ぎ量が多い． $a \gg 1$ のとき基準系の応答に近い．
- $a < 0$ の場合，初期段階で逆振れ (undershoot) (目標値とは逆の応答) が生じる． $|a|$ を小さくすればするほど逆振れが大きくなる．

つまり，虚軸に近い零点は出力ステップ応答の行き過ぎ量を増幅させたり，大きな逆振れをもたらしたりする．この現象は以下のように定性的に説明できる．変数 s が微分器を表していることに注目する．伝達関数 (4.29) は

$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} + \frac{1}{a\zeta\omega_n} \times s \times \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (4.31)$$

のように分解できる．基準系のステップ応答を $y_0(t)$ とすると，この伝達関数のステップ応答は

$$y(t) = y_0(t) + \frac{1}{a\zeta\omega_n} \dot{y}_0(t) \quad (4.32)$$

となる． $y_0(t)$ が初期のころ速い速度で立ち上がるので，その変化量 (微分値) は大きい．よって， a の絶対値が十分に小さいとき a が正であれば大きな行き過ぎ量をもたらす，負であれば逆振れをもたらす．そして， a の絶対値が小さければ小さいほど，第 2 項の微分項の影響が大きくなる． $y_0(t)$ が定常値に近づくにつれ，その微分値も零になるので，整定時間にあまり影響を与えない．逆に， a の絶対値が大きい場合，微分による影響は低減され，基準形に近い振る舞いをするようになる．要するに，システムの応答は極だけで決まるものではなく，零点も大きく影響している．

〔2〕 極の影響

式 (4.19) に基準形の極実部より小さい極を一つ付加すると，伝達関数は

$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{\left(1 + \frac{1}{a\zeta\omega_n s}\right) (s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}, \quad a \geq 1 \quad (4.33)$$

となる．ここでも，やはり低周波ゲイン $H(j0)$ が変わらないように付加した 1

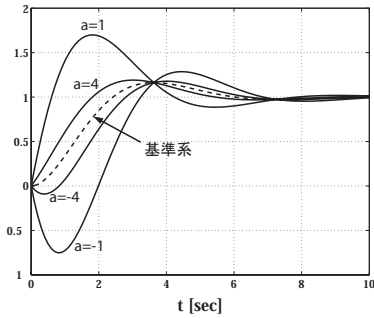


図 4.12 零点を付加した場合のステップ応答

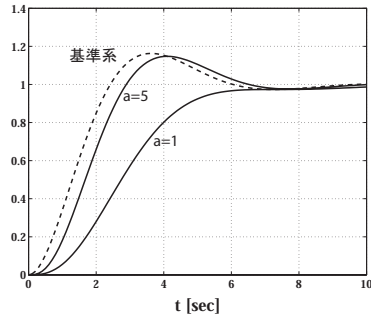


図 4.13 極を付加した場合のステップ応答

次遅れ系 $1/(1 + s/a\zeta\omega_n)$ の低周波数ゲインを 1 に合わせた．付加した極は

$$p = -a\zeta\omega_n < 0 \quad (4.34)$$

であり， $a \rightarrow 1$ のときこの極が基準系極の実部に近づく．さまざまな a についてステップ応答を求めた結果，図 4.13 の応答が得られた．この図から立ち上がり時間が長くなることは読み取れる．特に， $a \rightarrow 1$ のときその影響が顕著である．これは，1 次遅れ系が付加されたことによって，基準系の出力応答がさらにこの 1 次遅れ系を通してはじめて出力端に到達できるからである．

なお，ここでは基準系の極を主要極と考えているので， $a < 1$ の場合を考察していない．

4.3.4 行き過ぎ量と逆振れ

■ 例 4.4 次の二つの伝達関数について，その単位ステップ応答を求めると，図 4.14 のようになる．

$$G_1(s) = \frac{8(1-s)}{s^2 + 4s + 8}, \quad G_2(s) = \frac{8(2-s)(1-s)}{(s+2)(s^2 + 4s + 8)}$$

図から分かるように $G_1(s)$ のステップ応答 $y_1(t)$ が $t = 0$ あたりで最終値と符号が逆である．一方， $G_2(s)$ のステップ応答 $y_2(t)$ が $t = 1$ あたりで最終値と符号が逆である．最終値と逆符号の応答部分は逆振れ (undershoot) と呼ばれる． □

$y_1(t)$ と $y_2(t)$ の逆振れを区別するために， $y_1(t)$ のように $t = 0$ あたりで生じる逆振れを A 型逆振れ (type A undershoot)， $y_2(t)$ のように $t > 0$ で生じる逆振れを B 型逆振れ (type B undershoot) と呼ぶことにする．

多くの場合，行き過ぎ量や逆振れは工学的には許されない．例えば，港湾で荷物の積み下ろしに使われる走行クレーンでは，積荷の位置応答に A 型逆振れがあるとスタート時に積荷がクレーンにぶつかることを意味する．そして，行

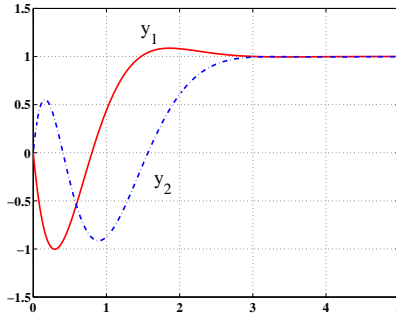


図 4.14 各種の逆振れ

き過ぎ量がある場合は停止時に衝突が起きることを意味する．いれずも許されないことである．そこで，本項ではこれらが生じる条件について紹介する³⁾．

定理 4.4 安定伝達関数 $H(s)$ が $H(0) \neq 0$ を満たすとする．このとき， $H(s)$ が正の実零点をもつとそのステップ応答に逆振れが生じる．

証明 この零点を $z > 0$ とする． z はステップ応答 $y(t)$ の Laplace 変換の収束域にあることに注意すれば，次式の成立が分かる．

$$0 = H(z) \frac{1}{z} = \hat{y}(z) = \int_0^{\infty} y(t) e^{-zt} dt$$

$H(0) > 0$ の場合を考える． $y(\infty) = H(0) > 0$ より十分に大きい t に対して $y(t) > 0 \rightarrow y(t)e^{-zt} > 0$ が成立する．すると，上式が成り立つために $y(t) < 0$ となる時間帯が必ず存在する． $H(0) < 0$ の場合も同様に示せる．

次の定理は A 型逆振れが起きる条件を与える²⁾．

定理 4.5 安定伝達関数

$$H(s) = K \frac{(s - z_1) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1) \cdots (s - p_n)} = \frac{N(s)}{M(s)}, \quad K > 0, n \geq m$$

のステップ応答が A 型逆振れをもつための必要十分条件は，正の実零点が奇数個存在することである．

証明 A 型逆振れが生じる場合，出力の初期応答と最終値は逆の符号をもつ．複素極 p_i の場合，その共役 \bar{p}_i も極であるので， $(-p_i)(-\bar{p}_i) = |p_i|^2 > 0$ が成り立つ．また，実極 p_j の場合安定性より $-p_j > 0$ である．よって， $M(0) = (-p_1) \cdots (-p_n) > 0$ である．一方，正の実零点がある場合，その数が奇数であれば $N(0) = (-z_1) \cdots (-z_m) < 0$ となり，偶数であれば $N(0) > 0$ となる．また，正の実零点がない場合， $N(0) > 0$ である．さらに， $\hat{y}(s) = H(s)/s$ より

$$y(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot H(s) \frac{1}{s} = H(0) = \frac{N(0)}{M(0)} \tag{4.35}$$

が成り立つ．したがって，正の実零点が奇数個存在する場合 $y(\infty) < 0$ であり，それ以外の場合は $y(\infty) > 0$ である．

次に、次数差が $n - m$ であることに注意して、初期応答の符号を調べていく。導関数の Laplace 変換公式、初期値の定理および次数差の関係から

$$\begin{aligned} y(0_+) &= \lim_{s \rightarrow \infty} s \hat{y}(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot H(s) \frac{1}{s} = \lim_{s \rightarrow \infty} H(s) = 0 \\ \dot{y}(0_+) &= \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot (s \hat{y}(s) - y(0)) = \lim_{s \rightarrow \infty} s H(s) = 0 \\ &\dots \\ y^{(n-m-1)}(0_+) &= \lim_{s \rightarrow \infty} s^{n-m-1} H(s) = 0 \\ y^{(n-m)}(0_+) &= \lim_{s \rightarrow \infty} s^{n-m} H(s) = K > 0 \end{aligned}$$

がいえ。すると、応答の滑らかさにより十分に小さい $\epsilon > 0$ について $y^{(n-m)}(t) \approx y^{(n-m)}(0_+) = K$ ($0 < t \leq \epsilon$) であり

$$y(\epsilon) = \int_0^\epsilon \overbrace{\dots \int_0^{t_{n-m+1}}}_{n-m} y^{(n-m)}(t_{n-m}) dt_{n-m} \dots dt_1 \approx \frac{K}{(n-m)!} \epsilon^{n-m} > 0$$

が成り立つ。ゆえに、定理の結論を得る。

また、行き過ぎ量に関しては以下の結果が知られている³⁾。その証明は定理 4.4 のように、 $L(s)$ の正の実極 p における追従誤差 $\hat{e}(s)$ を調べることで行える。

定理 4.6 図 4.5 の単位フィードバック系においてループゲイン $L(s) = P(s)K(s)$ が正の実極を持ち、積分器も一つ以上もつとする。このとき、出力のステップ応答に行き過ぎ量が生じる。

4.3.5 バンド幅と速応性

目標値から出力までの閉ループ伝達関数 $H(s)$ の周波数特性を描くと、一般に図 4.15 のようになる。それは低周波数においてゲインがほぼ 1 で、低域通過の特性をもつ。 $H(s)$ の入出力周波数応答の関係は

$$\hat{y}(j\omega) = H(j\omega) \hat{u}(j\omega) \tag{4.36}$$

で与えられているので、ゲインが 1 の周波数帯域では出力が入力によく一致する。ここで、どの周波数まで出力が入力に一致するかについて考えよう。制御工学では、入力のパワー $|\hat{u}(j\omega)|^2$ が半分以下に低下するまでの周波数帯域を目安にしている[†]。すなわち、

$$|H(j\omega)| \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \tag{4.37}$$

を満たす周波数帯域であれば、出力が入力によく追従できているとみなす。ここで

[†] 実は、これが通信工学から借りた概念である。

$$|H(j\omega_B)| = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx -3[\text{dB}] \quad (4.38)$$

を満たす周波数 ω_B をバンド幅†(bandwidth)と呼ぶ。明らかに、 $\omega \leq \omega_B$ ならば式(4.37)が成り立つ。よって、バンド幅 ω_B は出力が入力に追従できる周波数帯域を示す。

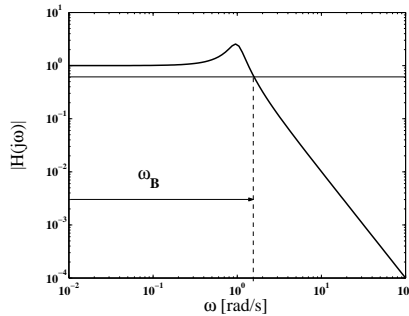


図4.15 基準2次系の周波数応答とバンド幅

基準2次系に関しては、バンド幅は応答の即応性、すなわち立ち上がり時間と反比例の関係をもつ。すなわち

$$t_r \sim \frac{1}{\omega_B} \quad (4.39)$$

これを示すには、バンド幅 ω_B と固有周波数 ω_n の関係を調べればよい。基準2次系について式(4.38)を解くと、解

$$\omega_B = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2 + \sqrt{1 + (1 - 2\zeta^2)^2}} \quad (4.40)$$

を得る。明らかに、 ω_B は ω_n に比例する。さらに、立ち上がり時間は $t_r \approx 1.8/\omega_n$ であるので、 t_r が ω_B に反比例することになる。基準2次系以外のシステムでは、その周波数応答が低周波数域で基準2次系に近い形状をもち、かつそれ以外の周波数域でゲインが減衰していれば、この関係も近似的に成り立つ。したがって、このようなシステムに対して、バンド幅が即応性の一つの目安となる。ただし、この関係は基準2次系あるいはそれに近い周波数特性を有するシステムに対して成立するものであって、任意のシステムに対して拡大解釈して使うには慎重でなければならない。

† 低域通過伝達関数の場合、バンド幅は $|H(j\omega_B)| = |H(j0)|/\sqrt{2}$ で定義されるが、高域通過伝達関数の場合、バンド幅が $|H(j\omega_B)| = |H(j\infty)|/\sqrt{2}$ で定義される。

4.4 開ループ制御と閉ループ制御の性能比較

本節では、図 4.16 の開ループ制御と図 4.17 の閉ループ制御について、目標値追従および外乱抑制性能を比較しその優劣を論じる。

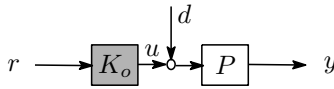


図 4.16 開ループ制御系

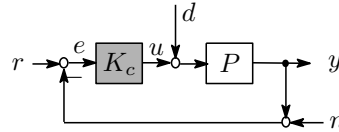


図 4.17 閉ループ制御系

4.4.1 目標値追従

どんな目標値に対しても完璧にかつ瞬時に追従できるために、目標値 $r(t)$ から出力 $y(t)$ までの伝達関数は 1 でなければならない。これは究極的なシステム設計の目標といってよい。

開ループ制御の場合をまず考える。このときの制御器を $K_o(s)$ で表す。制御対象 $P(s)$ が安定で、かつその零点もすべて安定であるとする。このような伝達関数を最小位相 (minimum phase) 伝達関数という。このときもし $P(s)$ の次数差が零であれば、その逆システム $P^{-1}(s)$ も安定プロパーになる。よって、

$$K_o(s) = P^{-1}(s) \Rightarrow L(s) = P(s)K_o(s) = 1 \quad (4.41)$$

より開ループ伝達関数が 1 になることが分かる。しかし、物理系は必ず慣性をもち、伝達関数の次数差が 1 以上となっている (力学系の力から速度 / 変位までの伝達関係を考えれば分かる)。ゆえに、上のように決めた制御器はプロパーでなくなり、実現不可能となる。

最小位相のプラントでその次数差が $\gamma (> 0)$ の場合、制御器を

$$K_o(s) = P^{-1}(s) \frac{1}{(\epsilon s + 1)^\gamma}, \quad \epsilon > 0 \quad (4.42)$$

とするとプロパーとなり、実現可能となる。このとき、開ループ系伝達関数は

$$L(s) = P(s)K_o(s) = \frac{1}{(\epsilon s + 1)^\gamma} \quad (4.43)$$

となる。パラメータ ϵ を十分小さくすれば、広い周波数帯域にわたって目標値に追従できる (図 4.18)。しかし、プラントが最小位相でないときいまのような開ループ制御はできなくなる。

一方、フィードバック制御したときの閉ループ伝達関数は

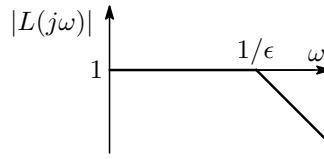


図 4.18 開ループ伝達関数 $L(s)$ のゲイン線図

$$H(s) = \frac{P(s)K_c(s)}{1 + P(s)K_c(s)} \quad (4.44)$$

となる。ただし、 $K_c(s)$ は閉ループ系の制御器を表す。同じ最小位相と次数差の仮定のもとで開ループ系と同じ伝達関数を実現するために、 $H(s) = 1/(\epsilon s + 1)^\gamma$ から逆算すると制御器はプロパーな伝達関数

$$K_c(s) = P^{-1}(s) \frac{1}{(\epsilon s + 1)^\gamma - 1}, \quad 0 < \epsilon \ll 1 \quad (4.45)$$

でなければならない。このとき、プラントを $P = N_P/M_P$ のように分母分子多項式の既約分解にしておけば、閉ループ系の特性多項式は

$$p(s) = M(s)N(s)(\epsilon s + 1)^\gamma \quad (4.46)$$

となる。制御対象が最小位相である仮定より、 $M(s)$ と $N(s)$ の根はすべて安定である。よって、上式の特性根はすべて安定である。ただし、この制御器 $K_c(s)$ はセンサ雑音 $n(t)$ の影響を受けやすい。つまり、開ループ系制御入力 $u_o(t)$ と閉ループ系制御入力 $u_c(t)$ を比較すると、式

$$\hat{u}_o(s) = K_o(s)\hat{r}(s) = P^{-1}(s) \frac{1}{(\epsilon s + 1)^\gamma} \hat{r}(s) \quad (4.47)$$

$$\begin{aligned} \hat{u}_c(s) &= \frac{K_c(s)}{1 + P(s)K_c(s)} [\hat{r}(s) - \hat{n}(s)] \\ &= P^{-1}(s) \frac{1}{(\epsilon s + 1)^\gamma} [\hat{r}(s) - \hat{n}(s)] \end{aligned} \quad (4.48)$$

より閉ループ系の方が雑音に影響されることが分かる。また、閉ループ系出力 $y_c(t)$ の式

$$\hat{y}_c(s) = H(s)[\hat{r}(s) - \hat{n}(s)] \quad (4.49)$$

より雑音 $\hat{n}(s)$ が大きい周波数帯域ではよい追従性能を期待できないことが見て取れる。したがって、最小位相系についてそのモデルが正確に分かっている場合、開ループ制御が優れているといえる。

4.4.2 モデル不確かさが存在する場合

前項では、制御対象のモデル $P(s)$ が正確に分かっている仮定のもとで開ループ

ブ制御と閉ループ制御を比較した。しかし、現実にはモデルが正確に分かることはほとんどない。制御対象モデルに正確に分からないパラメータや動特性があるとき、モデルが不確かさをもつという。以下では、パラメータ不確かさを有する演算増幅器を例に両制御方式の比較を行う。

図4.19の演算増幅器を考える。演算増幅器は非線形特性をもつので、入力振幅が異なるとそのゲインが変化する。ここで、この演算増幅器のゲイン A が $10^3 \sim 10^4$ の間で値を取るとする。すると、相対誤差は

$$\frac{|y_{\max}| - |y_{\min}|}{|y_{\min}|} = \frac{10^4 u - 10^3 u}{10^3 u} = 900\% \quad (4.50)$$

となる。つまり、開ループの場合出力の誤差が9倍にも及ぶ。

一方、図4.20のように抵抗 R と r を接続する場合、演算増幅器の入力インピーダンスが極めて大きいので、演算増幅器に流れる電流はほぼ零となる。すると、抵抗 R と r を流れる電流は等しく、式

$$\frac{u - e}{r} = \frac{e - y}{R}$$

が成り立つ。本式から演算増幅器の入力電圧 e を求めると

$$e = \frac{rR}{r + R} \left(\frac{u}{r} + \frac{y}{R} \right) \quad (4.51)$$

が得られる。さらに、演算増幅器入出力電圧の関係は

$$y = -Ae \quad (4.52)$$

で与えられている。これらの式をブロック線図で表すと、図4.21のフィードバック系になる。さらに、入出力間のゲインを計算すると

$$\frac{y}{u} = -\frac{R}{r + \frac{r+R}{A}} \quad (4.53)$$

となる。ここで、 $R = 10r$ とすればゲインは

$$\frac{y}{u} = -\frac{10}{1 + \frac{11}{A}} = -9.881 \sim -9.989$$

となる。その相対誤差は

$$\frac{9.989 - 9.881}{9.881} \approx 1.09\%$$

であり、大幅に低減された。 10^3 の増幅ゲインを実現したいならば、図4.20の演算増幅器を3段直列にすればよい。この場合、相対誤差は

$$\frac{9.989^3 - 9.881^3}{9.881^3} \approx 2.9\% \quad (4.54)$$

であり、やはり十分に低い。したがって、フィードバック制御を行うことにより、安定した増幅ゲインを得ることができるようになる。つまり、フィードバッ

ク制御はモデル不確かさに強い(ロバストという)。ただし、その代償として一つの演算増幅器と同等の増幅ゲインを実現するのに三つの演算増幅器を使う必要がある。また、一般にフィードバック制御系ではセンサを用いるので、これもシステムのコストを押し上げる要因となる。したがって、制御精度よりも製品の低コストを重要視する場合は開ループ制御方式を取るべきであろう。

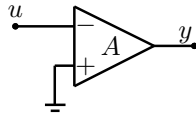


図 4.19 演算増幅器

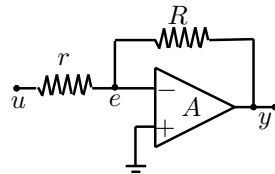


図 4.20 フィードバック型演算増幅器

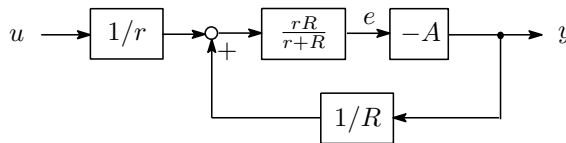


図 4.21 フィードバック型演算増幅器の等価ブロック線図

4.4.3 外乱抑制

プラント入力端に外乱 $d(t)$ が入ったとき、出力に対する影響を考える。以下の二つの場合について考察を加える。ただし、図 4.22 と図 4.23 において破線を除いた部分は開ループ系を示す。

〔1〕 外乱が測定できない場合 開ループ系の場合、図 4.22 より出力は

$$\hat{y}_o(s) = P(s)K(s)\hat{r}(s) + P(s)\hat{d}(s) \quad (4.55)$$

となる。外乱によって出力偏差 $\hat{y}_{od}(s) = P(s)\hat{d}(s)$ が生じる。これに対して、閉ループ系では出力が

$$\hat{y}_c(s) = \frac{P(s)K(s)}{1 + P(s)K(s)}\hat{r}(s) + \frac{P(s)}{1 + P(s)K(s)}\hat{d}(s) \quad (4.56)$$

であり、外乱による出力偏差は $\hat{y}_{cd}(s) = P\hat{d}/(1 + PK)$ である。よって、

$$\hat{y}_{cd}(s) = \frac{1}{1 + P(s)K(s)}\hat{y}_{od}(s) \quad (4.57)$$

が成り立つ。制御器 $K(s)$ のゲインを上げていくと、 $1/(1 + PK)$ のゲインは低減されるので、 $|\hat{y}_{cd}(j\omega)| \ll |\hat{y}_{od}(j\omega)|$ とすることができる。したがって、閉ループ系の方が外乱の影響を受けにくい。

〔2〕 外乱が測定できる場合 この場合、図 4.23 のように外乱を相殺を

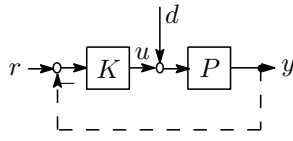


図4.22 外乱が測定できない場合

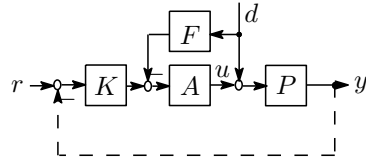


図4.23 外乱が測定できる場合

することができる．ただし， $A(s)$ はアクチュエータの伝達関数を表す．開ループ系では，外乱による出力偏差が

$$\hat{y}_{od}(s) = P(s)[1 - A(s)F(s)]\hat{d}(s) \tag{4.58}$$

である． $A(s)$ は最小位相で，次数差が γ であるとき，前置補償器 (pre-filter) を $F(s) = A^{-1}(s)/(\epsilon s + 1)^\gamma$ とすれば

$$\hat{y}_{od}(s) = P(s) \left[1 - \frac{1}{(\epsilon s + 1)^\gamma} \right] \hat{d}(s) \tag{4.59}$$

となる． $\epsilon \rightarrow 0$ とすると，広い周波数帯域にわたって外乱を除去できる．

一方，閉ループ系の場合，同じ外乱相殺を施すと外乱による出力偏差は

$$\begin{aligned} \hat{y}_{cd}(s) &= \frac{P(s)}{1 + P(s)A(s)K(s)} [1 - A(s)F(s)]\hat{d}(s) \\ &= \frac{1}{1 + P(s)A(s)K(s)} \hat{y}_{od}(s) \end{aligned} \tag{4.60}$$

となる．ここでも，閉ループ制御が優れている．しかし，外乱の相殺を行わず，フィードバックだけで外乱の影響を抑える場合，出力偏差は

$$\hat{y}_{cd}(s) = \frac{P(s)}{1 + P(s)A(s)K(s)} \hat{d}(s) \tag{4.61}$$

となる．広帯域にわたってこの閉ループ伝達関数のゲインを低く抑えることはできないので，外乱抑制性能が劣る．

以上の議論をまとめると，フィードバック制御の利点は以下の三点に集約できる．

1. プラント不確かさの影響を抑えられる
2. 外乱抑制に優れる
3. 不安定/非最小位相系を精度よく制御できる

4.5 応答の定量評価：ノルムの導入*

R.E. Kalman: "Get the physics right. After that it is all mathematics." (IFAC'2005 特別講演)

いままでの節では，設計されたシステムに対していかにその応答を評価する

かについて述べた。しかし、制御系を設計する段階では制御器が未定なので、未定の閉ループ系を直接評価できない。そこで、本節では要求される制御仕様を制御系設計に反映させる方法について考える。具体的には、まず制御仕様を信号に対する条件に帰着させ、さらにこの条件を設計される閉ループ伝達関数に対する条件に帰着させる。こうすることによって、制御系設計は評価される伝達関数が満たすべき条件を満足するように制御器を求めるといふ、純粋な数学問題を解くことに集約され、体系化できる。

以下、過渡応答と定常応答の仕様を制御系設計に反映させる方法を考える。制御性能の善し悪しはすべて応答で判断すべきものであり、応答の面積は適切な指標の一つであろう。例えば、目標値追従の場合、追従誤差の面積で、また外乱制御の場合は外乱の出力応答の面積でそれぞれの性能を測れる。さらに、定常特性は適切な評価出力の応答の面積を有界にすることで自動的に保証される。例えば、目標値漸近追従の場合は追従誤差で、持続外乱の漸近除去の場合は外乱出力応答を用いればよい。応答の面積のような信号の大きさを測る尺度は、数学的には信号のノルムとして表現される。さらに、システム設計は伝達関数を通して行われるから、信号に関する仕様を伝達関数に関する仕様で反映させなければならない。そのために、システムのノルムというものも必要になる。以下では、これらについて説明する。

4.5.1 信号のノルム

よく用いられる信号のノルムは以下のようなものである。ここで、 $t < 0$ のとき信号 $u(t)$ が $u(t) = 0$ を満たすと仮定する。

〔1〕 スカラ信号の場合

1. 1 ノルム (絶対値面積)

$$\|u\|_1 = \int_0^{\infty} |u(t)| dt \quad (4.62)$$

2. 2 ノルム (2乗面積の平方根)

$$\|u\|_2 = \sqrt{\int_0^{\infty} u(t)^2 dt} \quad (4.63)$$

3. ∞ ノルム (最大振幅)

$$\|u\|_{\infty} = \sup_t |u(t)| \quad (4.64)$$

■ 例 4.5 次の信号

$$u(t) = \begin{cases} e^{-t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

について、上で定義されたノルムはそれぞれ次のようになる。

$$\|u\|_1 = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = 1, \quad \|u\|_2 = \sqrt{\int_0^{\infty} e^{-2t} dt} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\|u\|_{\infty} = \sup_t |e^{-t}| = |e^{-0}| = 1$$

□

〔2〕 ベクトル信号の場合 ベクトル信号 $u(t)$ を

$$u(t) = [u_1(t) \cdots u_n(t)]^T$$

とおく。そのノルムは以下のようになる。

$$\|u\|_1 = \int_0^{\infty} \sum_{i=1}^n |u_i(t)| dt \quad (4.65)$$

$$\|u\|_2 = \sqrt{\int_0^{\infty} \sum_{i=1}^n u_i(t)^2 dt} \quad (4.66)$$

$$\|u\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} \sup_t |u_i(t)| \quad (4.67)$$

4.5.2 システムのノルム

以下では、 $g(t)$ でシステム $G(s)$ の単位インパルス応答を表すことにする。また、安定なシステムだけを考える。次のノルムがよく使われる。

〔1〕 伝達関数の場合

\mathcal{H}_2 ノルム：

$$\|G\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |G(j\omega)|^2 d\omega} = \sqrt{\int_0^{\infty} |g(t)|^2 dt} = \|g\|_2 \quad (4.68)$$

\mathcal{H}_2 ノルムは周波数応答のゲインの2乗面積の平方根を表しており、かつインパルス応答の2乗面積の平方根に等しい。上式の2番目の等号はParsevalの定理によるものである。

\mathcal{H}_{∞} ノルム：

$$\|G\|_{\infty} = \sup_{\omega \in (-\infty, \infty)} |G(j\omega)| \quad (4.69)$$

\mathcal{H}_{∞} ノルムは図4.24に示されるように、伝達関数の周波数応答の最大振幅となっている。

\mathcal{L}_1 ノルム (ピーク値ゲイン)：

$$\|G\|_1 = \|g\|_1 \quad (4.70)$$

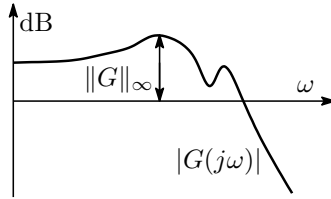


図4.24 \mathcal{H}_∞ ノルム

■ 例 4.6 安定伝達関数

$$G(s) = \frac{1}{s+1}$$

について、その \mathcal{H}_2 ノルム、 \mathcal{H}_∞ ノルムと \mathcal{L}_1 ノルムを計算しよう。

まず、インパルス応答は

$$g(t) = \begin{cases} e^{-t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

である。すると、

$$\|G\|_2 = \sqrt{\int_0^\infty |g(t)|^2 dt} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

一方、

$$|G(j\omega)|^2 = \frac{1}{\omega^2 + 1}$$

は連続関数であり、極大値をとる周波数では傾きが零である。 $\frac{d|G(j\omega)|^2}{d\omega} = 0$ を満たすのは $\omega = 0$ である。よって

$$\|G\|_\infty = |G(j0)| = 1$$

となる。これは $G(s)$ の Bode 線図からも確認できる。さらに、

$$\|G\|_1 = \|g\|_1 = \int_0^\infty |e^{-t}| dt = 1$$

である。 □

〔2〕 伝達行列の場合

\mathcal{H}_2 ノルム：

$$\begin{aligned} \|G\|_2 &= \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \text{Trace}(G(j\omega)^* G(j\omega)) d\omega} \\ &= \sqrt{\int_0^\infty \text{Trace}(g(t)^T g(t)) dt} \end{aligned} \tag{4.71}$$

\mathcal{H}_∞ ノルム：

$$\|G\|_\infty = \sup_{\omega \in (-\infty, \infty)} \sigma_{\max}(G(j\omega)) \tag{4.72}$$

\mathcal{L}_1 ノルム (ピーク値ゲイン)

$$\|G\|_1 = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^n \|g_{ij}\|_1 \tag{4.73}$$

ただし，インパルス応答を $g(t) = (g_{ij}(t)) \in \mathbf{R}^{m \times n}$ とおいた．

4.5.3 システムノルムと入出力ノルムの関係

本節では，伝達関数のノルムと入出力のノルムの間の関係について調べる．前述したように制御仕様は信号に対して与えられるが，制御系の設計は伝達関数を通して行われる．ゆえに，信号に関する仕様を伝達関数に対する仕様に変換しなければならない．このために，伝達関数ノルムと入出力信号の関係を明らかにする必要がある．

〔1〕 \mathcal{H}_2 ノルムの場合

まず，スカラ伝達関数 $G(s)$ の場合を考える．このとき，単位インパルス入力に対する出力応答は $y(t) = g(t)$ であり，式(4.68)より伝達関数の \mathcal{H}_2 ノルムはそのインパルス応答の \mathcal{H}_2 ノルムに等しいことが分かる．

多入出力系の場合を調べるため， m 入力の伝達行列を考える．また， $\{u_i\}$ ($i = 1, \dots, m$) を \mathbf{R}^m 上の正規直交ベクトルの組とする．すなわち，

$$U = [u_1, \dots, u_m], \quad U^T U = U U^T = I \quad (4.74)$$

とする．インパルス入力 $w_i(t) = u_i \delta(t)$ に対する応答が $y_i(t) = g(t)u_i$ であるから，次の関係が成り立つ．

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \|y_i\|_2^2 &= \sum_{i=1}^m \int_0^\infty y_i^T(t) y_i(t) dt = \sum_{i=1}^m \int_0^\infty u_i^T g^T(t) g(t) u_i dt \\ &= \int_0^\infty \sum_{i=1}^m \text{Trace}(g^T(t) g(t) u_i u_i^T) dt = \int_0^\infty \text{Trace}(g^T(t) g(t) U U^T) dt \\ &= \int_0^\infty \text{Trace}(g^T(t) g(t)) dt = \|G\|_2^2 \end{aligned} \quad (4.75)$$

ただし，式の変形にトレースの性質 $\text{Trace}(AB) = \text{Trace}(BA)$ と $\sum \text{Trace}(A_i) = \text{Trace}(\sum A_i)$ を使った．これは，伝達行列の \mathcal{H}_2 ノルムの2乗がその正規直交のインパルス入力組に対する応答の2乗面積の総和となることを示している．

別の解釈として，伝達行列の \mathcal{H}_2 ノルムはその単位ベクトル白色雑音入力に対する定常応答の平均2乗に等しいこともいえる．つまり，

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E(y(t)^T y(t)) = \|G\|_2^2 \quad (4.76)$$

が成り立つ⁵⁾．ここで， $E(\cdot)$ は期待値を表す．

〔2〕 \mathcal{H}_∞ ノルムの場合

安定システム $G(s)$ の入力を $u(t)$ ，出力を $y(t)$ とする．このとき，

$$\|G\|_{\infty} = \sup_{\|u\|_2 \neq 0} \frac{\|y\|_2}{\|u\|_2} \quad (4.77)$$

の関係が成立する． $\|y\|_2/\|u\|_2$ は入出力エネルギーの平方根の比であるので，上式はすべてのエネルギー有界入力 u についてこの比を計算したときの上限値は $\|G\|_{\infty}$ となることを表している．ゆえに， $u(t)$ がエネルギー有界 ($\|u\|_2 < \infty$) の外乱であるとき，その応答 $y(t)$ を小さくするには， $\|G\|_{\infty} \rightarrow 0$ とすればよいことが分かる．また，外乱応答の減衰率を与えられた値 $\gamma (> 0)$ 未満にしたいとき， $\|G\|_{\infty} < \gamma$ が成り立てばよい．

〔3〕 \mathcal{L}_1 ノルムの場合

安定システム $G(s)$ の入力を $u(t)$ ，出力を $y(t)$ とする．このとき，

$$\|G\|_1 = \sup_{\|u\|_{\infty} \neq 0} \frac{\|y\|_{\infty}}{\|u\|_{\infty}} \quad (4.78)$$

の関係が成立する． $\|y\|_{\infty}/\|u\|_{\infty}$ は入出力最大振幅の比であり，上式はすべての有界入力 u についてこの比を計算したときの上限値は $\|G\|_1$ となることを表している．ゆえに， $u(t)$ が有界 ($\|u\|_{\infty} < \infty$) の外乱であるとき，その応答 $y(t)$ のピーク値を小さくするには， $\|G\|_1 \rightarrow 0$ とすればよいことが分かる．また，外乱応答の減衰率を与えられた値 $\gamma (> 0)$ 未満にしたいとき， $\|G\|_1 < \gamma$ が成り立てばよい．

ただし〔1〕と〔2〕の関係はあくまで数学的なもので，システムの性能にはそれほど役立つものでない．なぜなら，現実を考えるべき外乱はインパルスやエネルギー有界なものではなく，むしろステップ信号のような，エネルギー有界でない持続外乱である．また，外乱の周波数特性などの性質も考慮されていない．

4.5.4 外乱制御と重み関数

以下では，別の立場から伝達行列の \mathcal{H}_2 ノルム， \mathcal{H}_{∞} ノルムの入出力関係を考察する．通常，外乱はインパルス信号ではなく，また雑音も白色ではない．これらは一定の動特性，すなわち，周波数特性をもつ．いま，外乱 d の周波数特性を $W(s)$ とする．図4.25から分かるように， $y(t)$ は重みつき伝達関数 GW のインパルス応答となる．この外乱に対する出力応答を抑えるには，

$$\|y\|_2 = \|GW\|_2 \quad (4.79)$$

を最小にすればよい．上述の問題は重み付き \mathcal{H}_2 制御問題といい， $W(s)$ は重み関数と呼ばれる．また，外乱の周波数応答の上界だけが分かる場合，すなわち

$$|\hat{d}(j\omega)| \leq |W(j\omega)|, \quad \forall \omega \quad (4.80)$$

のとき，

$$\|G\hat{d}\|_2 \leq \|GW\|_2 \quad (4.81)$$

が成り立つので， $\|GW\|_2$ を最小にすれば，外乱応答も抑えられることになる．

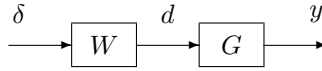


図 4.25 周波数特性 $W(s)$ をもつ外乱の応答

一方， \mathcal{H}_∞ ノルムの場合，1 入出力系において，

$$\|G\|_\infty = \sup_{\omega} |G(j\omega)| \quad (4.82)$$

が単位インパルス応答の周波数特性の最大振幅である．また，多入出力系の場合，

$$\|G\|_\infty = \sup_{\substack{u \in \mathbf{C}^m \\ \|u\|=1}} \|Gu\|_\infty, \quad \|Gu\|_\infty = \sup_{\omega} \|G(j\omega)u\|_2 \quad (4.83)$$

が成り立つ． \mathbf{C}^m は遅れ要素を含むベクトルインパルス信号の空間として解釈できるので， $\|G\|_\infty$ は各チャンネルへのインパルス入力 of 印加時刻が任意であるようなあらゆる単位ベクトルインパルス応答の周波数特性の最大振幅である．

すると，外乱 $d(t)$ の周波数特性を $W(s)$ とすれば， $\hat{y}(s) = G(s)W(s)$ となる．この外乱出力応答を抑えるには，指定値 $\gamma (> 0)$ について

$$\|GW\|_\infty < \gamma \quad (4.84)$$

が成立すればよい．同じように，外乱の周波数特性の上界 $|W(j\omega)|$ だけが見積もれるとき，式 (4.84) が成り立てば，それに対する出力応答の周波数特性 $\hat{y}(j\omega)$ の最大振幅も γ 未満に抑えられる．このような制御問題は \mathcal{H}_∞ 制御問題という．

\mathcal{H}_2 ， \mathcal{H}_∞ 制御問題に対する解法について，文献^{5),6)}で詳しく解説されている．実制御問題を取り扱うとき，システムの外乱は必ず何らかの動特性(周波数特性)をもっている．この外乱特性を考えてフィードバック制御系を設計すると，外乱の特徴を考えない場合よりもよい制御性能が得られる．したがって，重みつき問題は実問題によく対応しており，現実的な設計では必ず外乱モデルを重み関数として用いるべきである．

練習問題

4.1 図 4.1 の閉ループ系において，各伝達関数を以下のものとする．

$$P(s) = \frac{1}{s+1}, \quad K(s) = \frac{k}{s^2+4}$$

- (a) 閉ループ系を安定化できる k が存在することを示し, その範囲を求めよ .
 (b) $r(t) = 0, d(t) = \sin 2t (t \geq 0)$ のとき, $y(\infty) = 0$ となることを示せ .
 (c) $r(t) = \sin 2t, d(t) = 0 (t \geq 0)$ の場合, $\lim_{t \rightarrow \infty} (r(t) - y(t))$ を計算することによって定常出力 $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$ を求めよ .

4.2 図4.1の閉ループ系の各伝達関数は次式で与えられる .

$$P(s) = \frac{1}{s(s+1)}, \quad K(s) = k$$

- (a) 閉ループ系の安定性を保証するゲイン k の範囲
 (b) $d(t) = 0, r(t) = 1(t)$ のときの定常追従誤差 $e(\infty)$
 (c) $r(t) = 0, d(t) = 1(t)$ のときの定常出力 $y(\infty)$
 を求めよ . さらに, (b), (c) の結果について考察せよ .

4.3 問4.2のプラントと制御器を

$$P(s) = \frac{1}{s+1}, \quad K(s) = \frac{k}{s}$$

に替え, 同じ問題を解け . また, 前問との違いを論じよ .

4.4 図4.1において, 制御対象と制御器は次式で与えられる .

$$P(s) = \frac{1}{s-1}, \quad K(s) = 3 + \frac{k}{s}$$

- (a) 閉ループ系が内部安定となるために許される k の値の範囲を求めよ .
 (b) ランプ状の目標値 $r(t) = t, t \geq 0$ への追従誤差 $e(t) = r(t) - y(t)$ が $|e(\infty)| < 0.05$ を満足するための k の値の範囲を求めよ .

4.5 安定伝達関数 $G(s)$ について, 定理4.1の結果に基づいて, 正弦波信号発生器とオシロスコープを用いて $G(j\omega)$ を実験的に求める方法を考案せよ .

4.6 基準2次系(4.19)について, 以下の問題を解け .

- (a) 単位ステップ応答を求めよ .
 (b) 行き過ぎ量と整定時間の公式を導出せよ .

4.7 定理4.6を示せ . (ヒント: 行き過ぎが起きる時間帯では追従誤差 $e(t)$ が負になる)

4.8 伝達関数 $H(s)$ が偶数個の正の実零点を有する場合, どんなタイプの逆振れが生じるか .

4.9 問4.2の閉ループ系について応答速度とバンド幅の関係を調べたい .

- (a) $d(t) = 0, r(t) = 1(t)$ のときの出力 $y(t)$ を計算し, $k = 0.25, 1, 5$ についてプロットせよ .
 (b) r から y までの閉ループ伝達関数 $H_{yr}(s)$ の Bode 線図を $k = 0.25, 1, 5$ についてプロットし, バンド幅 ω_B を求めよ .
 (c) 以上に基づいて出力応答速度とバンド幅の関係を調べよ .

4.10 伝達関数 $G(s) = 4/(s+1)(s+5)$ の単位インパルス応答を $g(t)$ で表す.

- (a) 単位インパルス応答 $g(t)$ の $1, 2, \infty$ ノルムを計算せよ.
- (b) システム $G(s)$ の $\mathcal{H}_\infty, \mathcal{H}_2, \mathcal{L}_1$ ノルムを求めよ.

5

線形システムの安定化

制御系設計の際、閉ループ系の内部安定性をまず保証しなければならない。本章では、状態空間における安定化の基本的な方法を説明する。具体的には、状態を使った状態フィードバックの方法と状態フィードバックとオブザーバを用いた動的出力フィードバックの方法を述べる。

以下では、次の状態方程式で与えられる制御対象の安定化を考える。

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (5.1)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (5.2)$$

ただし、 $x \in \mathbf{R}^n$, $u \in \mathbf{R}^m$, $y \in \mathbf{R}^p$ である。

5.1 状態フィードバック

ここでは、まず状態がすべて測定される場合について考える。システムに関する情報はすべて状態に集約されているので、これを適当に係数倍してから入力として使えば、閉ループ系を安定化できると考えられる。すなわち、制御入力を

$$u = Fx, \quad F = \begin{bmatrix} f_{11} & \cdots & f_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{m1} & \cdots & f_{mn} \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

のように構成できる。この安定化方法は状態フィードバック (state feedback) と呼ばれ、係数行列 F は状態フィードバックゲイン (state feedback gain) と呼ばれる。この場合、(5.3) 式を (5.1) 式に代入して得られた閉ループ系は状態フィードバック系 (state feedback system) と呼ばれ、その状態方程式が

$$\dot{x} = (A + BF)x \quad (5.4)$$

となる．明らかに，状態フィードバック系の安定性は $A + BF$ の安定性によって決まる．本節では，これが可能となるための条件および F の設計方法について考察を加える．

状態フィードバックの設計とは状態フィードバックゲイン F をいかに決定するかであり，さまざまな方法が提案されている．その中で，もっとも分かりやすい方法は極配置法 (pole placement) である．その考え方は次のように説明できる．つまり，希望する閉ループ系の極をあらかじめ選択し，実際の閉ループ極がそうなるように状態フィードバックゲインを決める．

極はシステムの A 行列の特性多項式の根であるので，閉ループ極が指定されると，特性多項式も決まる．例えば， n 次元のシステムでその極が $\{p_1, \dots, p_n\}$ に指定されると，対応する特性多項式は $(s - p_1) \cdots (s - p_n)$ となる．一方，閉ループ系の係数行列が $A + BF$ であるからその特性多項式は $\det(sI - (A + BF))$ で与えられる．この両者は等しくなければならない．よって，変数 s に関する恒等式

$$\det(sI - (A + BF)) \equiv (s - p_1) \cdots (s - p_n) \quad (5.5)$$

を得る．この式の両辺は多項式であり，等式が恒等的に成立するために，次数が同じの項は等しい係数をもたなければならない．したがって，上式両辺の係数を比較することにより F の要素に関する n 個の連立方程式を得る．1 入力系の場合， F は $1 \times n$ の行ベクトルでその要素数が n なので，解が存在するとき一意解をもつ．他方， m 入力系の場合 F は $m \times n$ の行列であり，要素数が $m \times n$ 個あるため，解が存在してもその解は一意ではない．

さらに， $A + BF$ が実行列であるので，上記特性多項式は実係数のものとなり，複素根 λ をもつときその共役 $\bar{\lambda}$ も根としてもつ．しかも，重根の場合重複度まで含める．つまり， λ が r 重根であるとき， $\bar{\lambda}$ も r 重根となる．よって，指定できる固有値集合は実軸に対して対称でなければならない．以降，指定する固有値をこのようなものに限定するとする．

ここで，極配置のためにどんな条件が要るかをまず例で見よう．

■ 例 5.1 次の係数行列で与えられるシステムの極配置について考える．

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

フィードバックゲインを $f = [f_1 \ f_2]$ とおく．すると， $A + bf$ の特性多項式は

$$\det \begin{bmatrix} s - (1 + f_1) & -(1 + f_2) \\ 0 & s + 2 \end{bmatrix} = (s - 1 - f_1)(s + 2)$$

となり、固有値は $(1 + f_1, -2)$ となる。開ループ極 -2 がそのまま閉ループ極となり、状態フィードバックで変えられない。よって、このシステムに対しては状態フィードバックで閉ループ極を任意に設定できない。実際、開ループ系は不可制御になっている。□

この例から推察されるように、閉ループ極を任意に設定するには開ループ系の可制御性が必要である。この推測が正しいであることを次の定理で示す。

定理 5.1 $A + BF$ の固有値を任意に設定できるために、 (A, B) が可制御でなければならない。

証明 補題 2.2 によると、 (A, B) が不可制御であるとき、必ず相似変換によって

$$A = T \begin{bmatrix} A_1 & A_{12} \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} T^{-1}, \quad B = T \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

に変換できる。すると、任意の F について $\bar{F} = FT = [\bar{F}_1 \ \bar{F}_2]$ とおけば

$$A + BF = T \begin{bmatrix} A_1 + B_1 \bar{F}_1 & A_{12} + B_1 \bar{F}_2 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} T^{-1}$$

と書ける。 $\det(sI - A - BF) = \det(sI - A_1 - B_1 \bar{F}_1) \det(sI - A_2)$ より、ブロック A_2 の固有値は明らかに移動できない。すなわち、どんな状態フィードバックゲイン F を使っても $A + BF$ の固有値を任意に指定することはできない。

5.1.1 可制御正準形と可観測正準形

極配置の十分条件を見出すには、正準形 (canonical form) と呼ばれる特別な実現を用いると都合がよい。以下では、二種類の正準形を紹介する。

準備として、次の補題を先に示す。

補題 5.1 n 次元の正方行列

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_n \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

について、以下が成立する。

- (1) 行列 A の特性多項式は $p(s) := \det(sI - A) = s^n + a_n s^{n-1} + \cdots + a_2 s + a_1$ である。

(2) e_i を i 番目の要素だけが1で、ほかはすべて0の n 次元ベクトルとする。ベクトル $z(s)$ を $z(s) = (sI - A)^{-1}e_i$ とおくと、次のようになる。ただし、 z_j は $z(s)$ の j 番目の要素を表す。

(a) $i = 1$ のとき

$$z_1 = (s^{n-1} + a_n s^{n-2} + \dots + a_2)/p(s)$$

$$z_2 = -a_1/p(s), z_3 = -a_1 s/p(s), \dots, z_n = -a_1 s^{n-2}/p(s)$$

(b) $2 \leq i \leq n - 1$ のとき

$$z_1 = (s^{n-i} + a_n s^{n-(i+1)} + \dots + a_{i+1})/p(s)$$

$$z_2 = s z_1, \dots, z_i = s^{i-1} z_1$$

$$z_{i+1} = -(a_i s^{i-1} + \dots + a_2 s + a_1)/p(s)$$

$$z_{i+2} = s z_{i+1}, \dots, z_n = s^{n-(i+1)} z_{i+1}$$

(c) $i = n$ のとき

$$z = [1 \ s \ \dots \ s^{n-1}]^T / p(s)$$

証明 (1) は行列式に関する基本操作を用いて行列式を下三角行列の行列式に変形するか、Laplace 展開⁵⁾を用いて証明できる。

(2) に関しては、 $2 \leq i \leq n - 1$ の場合についてだけ証明を与える。ほかの場合は同様な手法で示せる。 $z(s) = (sI - A)^{-1}e_i$ は次の線形代数方程式

$$\begin{bmatrix} s & -1 & & & & \\ & s & -1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & s & -1 & \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & s + a_n & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_i \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

と等価である。この方程式を展開すると、連立線形方程式

$$s z_1 - z_2 = 0, s z_2 - z_3 = 0, \dots, s z_{i-1} - z_i = 0$$

$$s z_i - z_{i+1} = 1$$

$$s z_{i+1} - z_{i+2} = 0, \dots, s z_{n-1} - z_n = 0$$

$$a_1 z_1 + a_2 z_2 + \dots + a_{n-1} z_{n-1} + (s + a_n) z_n = 0$$

が得られる。これを先頭の式から順次解いていくと、

$$z_2 = s z_1, \dots, z_i = s z_{i-1} = s^{i-1} z_1$$

$$z_{i+1} = s z_i - 1 = s^i z_1 - 1, z_{i+2} = s z_{i+1} = s^{i+1} z_1 - s, \dots$$

$$z_n = s z_{n-1} = s^{n-1} z_1 - s^{n-(i+1)}$$

を得る．これらすべてを上記連立方程式の最後の式に代入することによって

$$z_1 = \frac{s^{n-i} + a_n s^{n-i-1} + \cdots + a_{i+2}s + a_{i+1}}{p(s)}$$

が導かれる．したがって，

$$z_{i+1} = s^i z_1 - 1 = -\frac{a_i s^{i-1} + \cdots + a_2 s + a_1}{p(s)}$$

となる．

システム (5.1) が可制御であるとき，相似変換によって可制御正準形 (controllable canonical form) と呼ばれる特別な実現に変換できることを示す．ここで，1 入出力系を考える．

補題 5.2 実現 $(A, b, c, 0)$ が与えられたとし，行列 A の特性多項式を

$$\det(sI - A) = s^n + a_n s^{n-1} + \cdots + a_2 s + a_1 \quad (5.7)$$

とする．また， $(A, b, c, 0)$ に対応する伝達関数を

$$c(sI - A)^{-1}b = \frac{\beta_n s^{n-1} + \beta_{n-1} s^{n-2} + \cdots + \beta_2 s + \beta_1}{s^n + a_n s^{n-1} + \cdots + a_2 s + a_1} \quad (5.8)$$

とおく． (A, b) が可制御であるとき，次の条件を満たす相似変換行列 T が存在する．

$$\bar{A} := T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & \cdots & -a_n \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

$$\bar{b} := T^{-1}b = [0 \ 0 \ 0 \ \cdots \ 1]^T \quad (5.10)$$

$$\bar{c} := cT = [\beta_1 \ \beta_2 \ \cdots \ \beta_{n-1} \ \beta_n] \quad (5.11)$$

この新しい実現 $(\bar{A}, \bar{b}, \bar{c}, 0)$ を可制御正準形と呼ぶ．

証明 可制御性の仮定より可制御行列 $C = [b \ Ab \ \cdots \ A^{n-2}b \ A^{n-1}b]$ が正則である．また，行列

$$U = \begin{bmatrix} a_2 & a_3 & \cdots & a_n & 1 \\ a_3 & a_4 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

も明らかに正則である．よって，行列

$$T := CU = [t_1 \ t_2 \ \cdots \ t_{n-1} \ t_n] \quad (5.13)$$

が正則となる． T を展開すると，各列は

$$\begin{aligned} t_1 &= (A^{n-1} + a_n A^{n-2} + \cdots + a_3 A + a_2 I)b \\ t_2 &= (A^{n-2} + a_n A^{n-3} + \cdots + a_3 I)b \\ &\vdots \\ t_{n-1} &= (A + a_n I)b \\ t_n &= b \end{aligned}$$

となる．すると， $b = t_n$ より

$$At_2 = t_1 - a_2 t_n, \dots, At_{n-1} = t_{n-2} - a_{n-1} t_n, At_n = t_{n-1} - a_n t_n \quad (5.14)$$

の関係が成り立つ．また，Cayley-Hamiltonの定理より $A^n + a_n A^{n-1} + \cdots + a_2 A + a_1 I = 0$ であるので，本式に右から b をかけると

$$At_1 = -a_1 t_n \quad (5.15)$$

も成り立つ．これらの式をまとめると，

$$AT = T\bar{A} \Rightarrow \bar{A} = T^{-1}AT \quad (5.16)$$

を得る．また， $T\bar{b} = b$ は容易に分かり，よって $T^{-1}b = \bar{b}$ が成立する．さらに，相似変換は伝達関数を変えないので， $c(sI - A)^{-1}b = \bar{c}(sI - \bar{A})^{-1}\bar{b}$ と補題 5.1(2c) を用いれば \bar{c} の式も簡単に確認できる．

この補題の双対の結果として，次の補題がある．

補題 5.3 実現 $(A, b, c, 0)$ が与えられたとし，行列 A の特性多項式を

$$\det(sI - A) = s^n + a_n s^{n-1} + \cdots + a_2 s + a_1 \quad (5.17)$$

とする．また，実現 $(A, b, c, 0)$ に対応する伝達関数を

$$c(sI - A)^{-1}b = \frac{\beta_n s^{n-1} + \beta_{n-1} s^{n-2} + \cdots + \beta_2 s + \beta_1}{s^n + a_n s^{n-1} + \cdots + a_2 s + a_1} \quad (5.18)$$

とおく． (c, A) が可観測であるとき，次の条件を満たす相似変換行列 S が存在する．

$$SAS^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_2 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & -a_{n-1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_n \end{bmatrix}, Sb = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \\ \beta_n \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

$$cS^{-1} = [0 \ 0 \ \cdots \ 0 \ 1] \quad (5.20)$$

この新しい実現を可観測正準形 (observable canonical form) と呼ぶ．

証明 双対システム $(A^T, c^T, b^T, 0)$ を可制御正準形に変換してから、再び双対システムを計算すれば結論が得られる。なお、この場合の変換行列は $S = U\mathcal{O}$ で与えられる。ただし、 U は式 (5.12) で置いた行列で、 \mathcal{O} は可観測行列である。

ここで述べた正準形は多入力多出力系にも拡張できるが、記述が煩雑になるので省略する。興味のある読者は文献^{2),6)}を参照されたい。

5.1.2 1入力系の極配置

1入力の動的システム

$$\dot{x} = Ax + bu \quad (5.21)$$

に対して、状態フィードバックで閉ループ極を任意に指定できる条件を次の定理に示す。

定理 5.2 1入力系に対して、状態フィードバック $u = fx$ ($f^T \in \mathbf{R}^n$) で $A + bf$ の固有値を任意に指定できるための必要十分条件は、 (A, b) が可制御であることである。

証明 必要性は定理 5.1 で示した。ここで、十分性を示す。

まず、 (A, b) を変換行列 T で可制御正準形 (\bar{A}, \bar{b}) に変換する。 $f^T = \bar{f}^T = [\bar{f}_1 \ \cdots \ \bar{f}_n]$ とおくと、

$$\begin{aligned} T^{-1}(A + bf)T &= \bar{A} + \bar{b}\bar{f} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -(a_1 - \bar{f}_1) & -(a_2 - \bar{f}_2) & -(a_3 - \bar{f}_3) & \cdots & -(a_n - \bar{f}_n) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

となる。そして、等式 $\det(sI - T^{-1}XT) = \det(T^{-1}(sI - X)T) = \det(T^{-1})\det(sI - X)\det(T) = \det(sI - X)$ および補題 5.1(1) を使えば、次式

$$\begin{aligned} \det(sI - (A + bf)) &= \det(sI - (\bar{A} + \bar{b}\bar{f})) \\ &= s^n + (a_n - \bar{f}_n)s^{n-1} + \cdots + (a_1 - \bar{f}_1) \end{aligned} \quad (5.22)$$

が得られる。 \bar{f} によってこの多項式の係数を任意に設定できるので、任意に与えられた固有値を特性多項式にもたせることができる。例えば、指定する閉ループ系特性多項式を $s^n + \gamma_n s^{n-1} + \cdots + \gamma_2 s + \gamma_1$ とすると、係数を比較することにより $\bar{f} = [a_1 - \gamma_1 \ \cdots \ a_n - \gamma_n]$ が得られる。よって、状態フィードバックゲインは

$$f = \bar{f}T^{-1} = [a_1 - \gamma_1 \ \cdots \ a_n - \gamma_n]T^{-1} \quad (5.23)$$

となる。

フィードバックゲイン f の計算方法もこの証明で与えられていることに注意されたい。

■ 例 5.2 例 1.7 の 1 自由度振動系が可制御であることは例 2.1 で確認した。ただし

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{M} & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix}$$

である。ここでは、この 1 自由度振動系に対して $A + bf$ の固有値を (p_1, p_2) に設定する行列 $f = [f_1 \ f_2]$ が存在するかについて調べる。固有値の定義から恒等式

$$\begin{aligned} \det(sI - (A + bf)) &= (s - p_1)(s - p_2) \\ \Rightarrow s^2 - \frac{f_2}{M}s + \left(\frac{K}{M} - \frac{f_1}{M}\right) &= s^2 - (p_1 + p_2)s + p_1p_2 \end{aligned}$$

が成り立つことが分かる。両辺各項の係数を比較すると、連立方程式

$$\frac{f_2}{M} = p_1 + p_2, \quad \frac{K}{M} - \frac{f_1}{M} = p_1p_2$$

を得る。これらの連立方程式を解くと一意解

$$f = [K - Mp_1p_2, \ M(p_1 + p_2)]$$

が得られる。 □

3 次以下のシステムに対して、本例のように特性方程式から導かれる連立方程式を直接解いても比較的簡単に解が得られるが、高次系に関しては公式 (5.23) を使った方がよからう。

【例題 5.1】 3 次元のシステム

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

に対して、閉ループ極が $-2, -1 \pm j1$ となるように状態フィードバックゲインを設計せよ。

解答 可制御行列を計算すると

$$C = [b \ Ab \ A^2b] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

となり、ランク 3 をもつ。よって、開ループ系が可制御であり、状態フィードバックによる極配置は可能である。また、開ループ系特性多項式が

$$\det(sI - A) = s^3 - 3s^2 + 3s - 1$$

であることより $a_1 = -1, a_2 = 3, a_3 = -3$ である。すると、実現を可制御正準形に変換する変換行列は

$$T = C \begin{bmatrix} a_2 & a_3 & 1 \\ a_3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

となる。そして、指定された閉ループ系の特性多項式は

$$(s + 2)(s + 1 - j)(s + 1 + j) = s^3 + 4s^2 + 6s + 4$$

であり, $\gamma_1 = 4, \gamma_2 = 6, \gamma_3 = 4$ となる. よって, 状態フィードバックゲインは

$$f = [a_1 - \gamma_1 \ a_2 - \gamma_2 \ a_3 - \gamma_3]T^{-1} = [-15 \ -47 \ 8]$$

となる. ◇

5.1.3 多入力系の極配置

ここでは, 多入力系の場合 $A + BF$ の固有値を任意に設定できる条件がどのようなかについて考える. 結論からいうと, (A, B) が可制御であることは $A + BF$ の固有値を任意に指定できるための必要十分条件となる. このことは多入力系の極配置問題を 1 入力系の問題に変換することによって示される.

補題 5.4 m 入力系 (A, B) が可制御であるとき, 任意の非零ベクトル $b \in \text{Im}B$ に対して, 必ず $(A + BK, b)$ を可制御にする行列 $K \in \mathbf{R}^{m \times n}$ が存在する.

証明 $b_1 = b$ とおき, 部分空間 $U_1 = \text{span}\{b_1, Ab_1, \dots, A^{n-1}b_1\}$ を定義しておく. もし $\dim(U_1) = n$ ならば, $K = 0$ が条件を満たす. $\dim(U_1) = n_1 < n$ の場合, $\{b_1, Ab_1, \dots, A^{n_1-1}b_1\}$ は U_1 の基底となる[†]. ここで, 以下のように n 次元のベクトル列を作る.

$$x_1 = b_1, \quad x_j = Ax_{j-1} + b_1, \quad j = 2, \dots, n_1 \tag{5.24}$$

この漸化式で与えられたベクトル列が $x_j - x_{j-1} = A(x_{j-1} - x_{j-2})$ を満たす ($j \geq 3$). これを $x_2 - x_1 = Ab_1$ のもとで順次使えば, 次の関係式が成立することは確認できる.

$$b_1 = x_1, \quad Ab_1 = x_2 - x_1, \quad \dots, \quad A^{n_1-1}b_1 = x_{n_1} - x_{n_1-1}$$

ベクトル列 $\{x_i\}$ と $\{A^{i-1}b_1\}$ は一対一の関係にあるので, $\{x_1, \dots, x_{n_1}\}$ も部分空間 U_1 の基底となる.

可制御条件から必ず $b_2 \notin U_1$ のベクトル $b_2 \in \text{Im}B$ が存在する^{††}. さらに, n_2 を

$$x_1, \dots, x_{n_1}, b_2, Ab_2, \dots, A^{n_2-1}b_2$$

が線形独立となる最大整数とし, 新たなベクトル列を

$$x_{n_1+i} = Ax_{n_1+i-1} + b_2, \quad i = 1, \dots, n_2 \tag{5.25}$$

のように構成する. このとき, $x_{n_1+1} - x_{n_1} = (A - I)x_{n_1} + b_2$ より

[†] ベクトル集合 $\{b_1, Ab_1, \dots, A^{k-1}b_1\}$ が線形独立で $A^k b_1$ がその線形結合で表せるとすると, $A^{k+i}b_1 (i \geq 1)$ もまた $\{b_1, Ab_1, \dots, A^{k-1}b_1\}$ の線形結合で表せることが逐次示せる. 条件 $\dim(U_1) = n_1$ より $k = n_1$ でなければならない.

^{††} $AU_1 \subset U_1$ に着目する. 条件を満たす b_2 が存在しないとすると, 任意の $b' \in \text{Im}B$ が U_1 に含まれることになる. すると, $A^i b' \in U_1 (\forall i \geq 0)$ も成り立つ. つまり, 可制御行列 C の列はすべて U_1 に含まれることになり, よって可制御行列 C のランクは $n_1 (< n)$ となる. これは (A, B) の可制御性に反する.

$$\begin{aligned} x_{n_1+i} - x_{n_1+i-1} &= A(x_{n_1+i-1} - x_{n_1+i-2}) = \cdots \\ &= A^{i-1}(x_{n_1+1} - x_{n_1}) = A^{i-1}b_2 + A^{i-1}(A - I)x_{n_1} \end{aligned}$$

が成り立つ。つまり、新しいベクトルを作る度に新たな線形独立な列を加えている。さらに、 U_1 が A 不変であることから $A^{i-1}(A - I)x_{n_1} \in U_1$ となる。よって、 $x_1, \dots, x_{n_1}, \dots, x_{n_1+n_2}$ が線形独立となる。

C のランクは n であるので、このプロセスを続けていくと、必ず有限回で線形独立なベクトル列 x_1, \dots, x_n が作れる。しかも

$$x_{i+1} = Ax_i + \bar{b}_i, \quad i = 1, \dots, n - 1 \tag{5.26}$$

を満たす。ただし、ここで記述の便宜上 b_1, b_2 などを x_i の添え字に合わせて添え字をつけて、 \bar{b}_i とおいた。当然 $\bar{b}_i \in \text{Im}B$ であり、 $\bar{b}_i = Bg_i, g_i \in \mathbf{R}^m$ と表せる。そこで、 $X = [x_1 \ \dots \ x_n]$ とおくと、 X が正則となる。さらに、

$$K = [g_1 \ \dots \ g_n]X^{-1}, \quad g_n \in \mathbf{R}^m \text{ は任意} \tag{5.27}$$

とすれば、式

$$BKx_i = \bar{b}_i, \quad i = 1, \dots, n - 1$$

が成り立つ。これを x_i の漸化式 (5.26) に代入することによって

$$x_{i+1} = (A + BK)x_i \Rightarrow x_i = (A + BK)^{i-1}x_1 = (A + BK)^{i-1}b \tag{5.28}$$

が得られる。ゆえに、 $[b \ (A + BK)b \ \dots \ (A + BK)^{n-1}b]$ のランクが n となり、 $(A + BK, b)$ は可制御となる。

フィードバックゲイン K は上記補題のように構成しなくても、ランダムに与えることでほとんどすべての場合 $(A + BK, Bg)$ を可制御にすることができる¹⁾。ただし、 g は任意の非零ベクトルである。

この補題と定理 5.2 によれば、多入力系極配置に関する次の定理は明らかである。

定理 5.3 m 入力系

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

に対して、 $A + BF$ の固有値を任意に設定できる状態フィードバックゲイン $F \in \mathbf{R}^{m \times n}$ が存在するための必要十分条件は、 (A, B) が可制御であることである。

証明 前記補題における b は $Bg, g \in \mathbf{R}^m$ と書けることに注意する。入力変換 $u = Kx + gv$ を行うと、システムは可制御な 1 入力系 $\dot{x} = (A + BK)x + bv$ に変わる。定理 5.2 によれば、この 1 入力系の極配置を状態フィードバック $v = fx$ ができる。よって、

$$F = K + gf \tag{5.29}$$

が所望のフィードバックゲインを与える。

■ **例 5.3** 2 入力システム

$$\dot{x} = Ax + Bu = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u$$

の極を $\{-1, -1, -1+j, -1-j\}$ に配置できる状態フィードバックゲイン F を設計しよう。

まず, $b = b_1 = [0 \ 0 \ 0 \ 1]^T$, $b_2 = [1 \ 1 \ 0 \ 0]^T$ (ベクトルの添え字は B 行列の列の番号と異なるので, 要注意) とすると, $n_1 = 1$, $n_2 = 3$ となることが確認できる. また, 補題5.4のアルゴリズムに従って計算すると

$$X = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

を得る. x_2, x_3, x_4 は $x_2 = Ax_1 + b_2 = Ax_1 + \bar{b}_1, \dots, x_4 = Ax_3 + b_2 = Ax_3 + \bar{b}_3$ に従って計算されたので, $\bar{b}_1 = \bar{b}_2 = \bar{b}_3 = b_2 = B[1 \ 0]^T$ となる. よって

$$g_1 = g_2 = g_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

である. そこで, $g_4 = [0 \ 0]^T$ とすると

$$K = [g_1 \ g_2 \ g_3 \ g_4]X^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

となる. $A+BK$ の特性多項式を計算すると, $\det(sI - (A+BK)) = s^4 - 2s^3 + s^2 + s$ となるので, $a_1 = 0$, $a_2 = a_3 = 1$, $a_4 = -2$ である. また, 指定された閉ループ系特性多項式は

$$(s+1)(s+1)(s+1-j)(s+1+j) = s^4 + 4s^3 + 7s^2 + 6s + 2$$

であり, よって $\gamma_1 = 2$, $\gamma_2 = 6$, $\gamma_3 = 7$, $\gamma_4 = 4$ である. 次に, 式(5.13)にしたがって $(A+BK, b)$ を可制御正準形に変換する変換行列を計算すると,

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

を得る. すると, $A+BK+bf$ の固有値を指定された値に配置する状態フィードバックゲイン f は式(5.23)に従って計算すれば,

$$f = [a_1 - \gamma_1 \ a_2 - \gamma_2 \ a_3 - \gamma_3 \ a_4 - \gamma_4]T^{-1} = [-22 \ 4 \ 5 \ -6]$$

のように求まる. 一方, $b = B[0 \ 1]^T$ より $g = [0 \ 1]^T$ である. よって, 最終的に次の状態フィードバックゲインを得る.

$$F = K + gf = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 & 1 \\ -22 & 4 & 5 & -6 \end{bmatrix}$$

□

5.1.4 極選択の指針

極配置法で状態フィードバックゲインを設計したいとき、極をいかに決めるかは設計の中心課題となる。極を決めるとき、安定性だけではなく、性能（つまり過渡応答）も考えなければならない。また、実装上の制約、主に制御入力の大きさも考慮する必要がある。特に、制御入力の大きさと極の位置の間に定性的な関係しかない。よって、基本的には極の選択は試行錯誤を要する。その指針を以下にまとめる。

1. 必要な収束速度を保証するために、極は虚軸から一定の距離を離れなければならない。すなわち、

$$\operatorname{Re}(p_i) \leq -\sigma, \quad \forall i$$

を満たさなければならない。ここで、 $\sigma > 0$ は応答の収束速度を決定するパラメータである。このとき、過渡応答の振幅はおよそ $e^{-\sigma t}$ によって決定づけられる。そして、 $e^{-4.6} \approx 1\%$ であるので、整定時間 t_s は $\sigma t_s \approx 4.6$ を満たすものとすることができる。これにより整定時間 t_s が与えられれば、パラメータ σ を $\sigma \approx 4.6/t_s$ と決めることができる。

2. 極の虚部は応答の振動周波数になるため、振動の具合を抑える（単位時間における振動の回数を少なくする）ために、虚部を小さくしなければならない。通常、実部よりも虚部を小さくする。これは、振動周波数は $\operatorname{Im}(p)$ で周期が $2\pi/\operatorname{Im}(p)$ となるから、 $\operatorname{Re}(p) \geq \operatorname{Im}(p)$ のとき一周期で振幅が $e^{-\operatorname{Re}(p) \cdot 2\pi/\operatorname{Im}(p)} \leq e^{-2\pi} = 0.19\%$ に減少するからである。また、2次系において実部と虚部が等しいとき、特性多項式は

$$\left(s + \frac{\omega_n}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{\omega_n}{\sqrt{2}}\right)^2 = s^2 + 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \omega_n s + \omega_n^2$$

で、減衰係数が $1/\sqrt{2}$ となり、それが減衰の許容限界と考えられるからである（図4.10によれば $\zeta = 1/\sqrt{2}$ のとき行き過ぎ量は約5%となる）。

3. 制御入力の大きさは基本的に極の大きさの増加と共に増加するので、それを制限するために、極を原点から離しすぎてはいけない。さらに、応答に対する悪影響として、極を負の無限大へ近づけると応答の最大振幅が発散するような現象が生じる³⁾。

以上を総合すると、指定できる極の存在域は図5.1の影の部分となる。

ただし、虚部と実部の比 $\operatorname{Im}(p)/\operatorname{Re}(p)$ を小さくしすぎると、減衰係数が大きすぎて、バンド幅が下がり、立上り時間は長くなってしまう。したがって、立上り時間 t_r も短くしたい場合、この比を1近くにすることがある。

以下では、設計例について説明する。

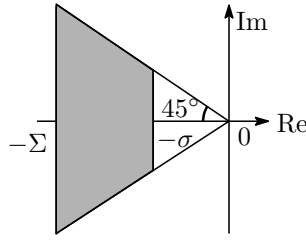


図 5.1 配置できる極の範囲

■ 例 5.4 図 5.2 に示す 2 慣性系 (モータ駆動系) のモデルを考える。このモデルは本質的には二つの慣性モーメント (慣性) が回転軸 (バネ) を通して結ばれ、駆動部の慣性モーメントを制御することによって負荷を制御する仕組みになっている。このようなシステムは世の中にたくさん存在する。例えば、鉄鋼所の圧延プラントはそうである。

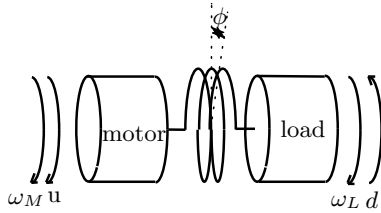


図 5.2 2 慣性系

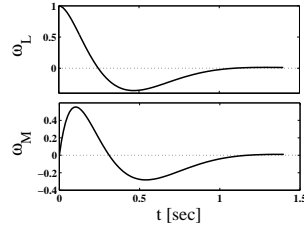


図 5.3 状態フィードバック系の応答

ここで、モータの慣性モーメントを J_M 、回転軸のバネ定数を k 、負荷の慣性モーメントを J_L 、モータ側の粘性摩擦係数を D_M 、負荷側の粘性摩擦係数を D_L とする。また、モータ回転速度を ω_M 、負荷回転速度を ω_L とし、回転軸のねじれ角を ϕ 、モータトルクを u とする。測定出力はモータ回転速度 ω_M である。各部分のトルクのつり合い式は

$$J_L \dot{\omega}_L + D_L \omega_L = k\phi + d$$

$$\dot{\phi} = \omega_M - \omega_L$$

$$J_M \dot{\omega}_M + D_M \omega_M + k\phi = u$$

で与えられる。ただし、 d は負荷にかかるトルク外乱である。

ここで、状態ベクトルを $x = [\omega_L \ \phi \ \omega_M]^T$ とすると、状態方程式

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -\frac{D_L}{J_L} & \frac{k}{J_L} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{k}{J_M} & -\frac{D_M}{J_M} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \frac{1}{J_L} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} d + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{J_M} \end{bmatrix} u \quad (5.30)$$

$$y = [0 \ 0 \ 1]x \quad (5.31)$$

が容易に得られる。

一定速度で回転している負荷にトルク外乱 d が印加されたとき、負荷の回転速度 ω_L があまり変化しないように制御したい。ここで例として、 $J_M = J_L = 1$ 、 $D_M = D_L = 0$

とおき, $k = 100$ と仮定する. 状態フィードバックで閉ループ極を $-4 \pm j4$, -8 に配置すると, フィードバックゲインは次のように求まる.

$$F = [13.4 \quad 104 \quad -16]$$

単位インパルストルク外乱に関する ω_M, ω_L の応答は図 5.3 に示されている. \square

5.2 オブザーバ

状態フィードバックを使うには, すべての状態をセンサ (通常は高価なハードウェアである) で測定しなければならないから, 贅沢な制御法といえるであろう. さらに, 無数の状態を有する柔軟構造物のようにすべての状態をセンサで測れない場合もある. したがって, 通常測定出力と制御入力を用いて何らかのソフトウェアで状態の推定値を算出する方法がとられる. 状態を推定するアルゴリズムはオブザーバ (observer) と呼ばれる.

5.2.1 同次元オブザーバ

典型的なオブザーバは次のオブザーバである. このオブザーバの次数は制御対象と同じなので, 同次元オブザーバ (full order observer) と呼ばれる.

$$\dot{\bar{x}} = A\bar{x} + Bu + L(C\bar{x} - y) \quad (5.32)$$

同次元オブザーバの基本原理は, 制御対象の動特性を利用してソフトウェアで状態推定値 \bar{x} を作りだし (右辺最初の二つの項), オブザーバの出力 $C\bar{x}$ と既知の制御対象の出力 y の誤差で状態推定値を修正する (右辺第 3 項) ことである. 行列 L はオブザーバゲイン (observer gain) と呼ばれる. 一般に, オブザーバ状態の初期値を $\bar{x}(0) = 0$ と選ぶ.

状態推定ができるための条件を調べよう. ここで, 推定誤差を

$$e = \bar{x} - x \quad (5.33)$$

とおく. $\bar{x} \rightarrow x \Leftrightarrow e \rightarrow 0$ なので, 推定誤差の収束だけを考えればよいことが分かる. このために, $e(t)$ の動特性を調べる. 式 (5.32) から式 (5.1) を引くと, 推定誤差に関する微分方程式

$$\begin{aligned} \dot{e} &= A\bar{x} + Bu + L(C\bar{x} - Cx) - (Ax + Bu) \\ &= (A + LC)e \end{aligned} \quad (5.34)$$

を得る. 任意の初期誤差 $e(0)$ に対して $e(t) \rightarrow 0$ となるために, $(A + LC)$ の安定性が必要かつ十分である. 以下, $(A + LC)$ の固有値をオブザーバ極と呼ぶ.

$(A + LC)$ と $(A + LC)^T = A^T + C^T L^T$ が同じ固有値をもつこと、および (C, A) の可観測性と (A^T, C^T) の可制御性が等価であることから、次の定理は明らかである。

定理 5.4 式 (5.32) の同一次元オブザーバにおいて、 $A + LC$ の固有値を任意に指定できるオブザーバゲイン $L \in \mathbb{R}^{n \times p}$ が存在するための必要十分条件は、 (C, A) が可観測であることである。

状態フィードバックと同じように、オブザーバの設計においても極配置法が一番分かりやすいので、この方法について説明する。オブザーバ極が $\{r_1, \dots, r_n\}$ に指定されるとする。このとき、オブザーバの特性多項式は

$$\det(sI - (A + LC)) \equiv (s - r_1) \cdots (s - r_n) \quad (5.35)$$

となる。両辺の係数を比較することにより L の要素に関する n 個の連立方程式を得る。1 出力系の場合、連立方程式を解くことで解を計算できる。多出力系の場合、

$$\det(sI - (A + LC)) = \det(sI - (A^T + C^T L^T)) \quad (5.36)$$

に基づいて、 $\bar{A} = A^T$ 、 $\bar{B} = C^T$ 、 $\bar{F} = L^T$ とおいて状態フィードバックゲイン設計のアルゴリズムで \bar{F} を計算してから、 $L = \bar{F}^T$ とおけばオブザーバゲインになる。

オブザーバ極の選定 オブザーバの目的は状態を推定して状態フィードバックを実現させることにある。このためには、状態推定値の真値への収束は十分に速くしなければならない。つまり、オブザーバの極は状態フィードバック系の極よりも十分に虚軸から離れなければならない。通常オブザーバ極の大きさは状態フィードバック系の極の 2 ~ 5 倍にする。これはオブザーバ設計の指針である。

2 慣性系の例を次に示す。

■ 例 5.5 例 5.4 の 2 慣性系では、負荷にセンサをつけることは困難なので、通常モータ軸の角速度 ω_M だけを測定する。ここで、この測定出力を用いてすべての状態を推定するオブザーバを設計しよう。オブザーバ極を $-12 \pm j19$ 、 -24 に指定する。求めたオブザーバゲインは

$$L = [-73.2 \quad 8.8 \quad -48]$$

である。初期状態が $x(0) = [1 \ 0 \ 0]^T$ である場合の推定誤差の応答は図 5.4 に示される。上から順番に ω_L 、 ϕ 、 ω_M の推定誤差を表示している。□

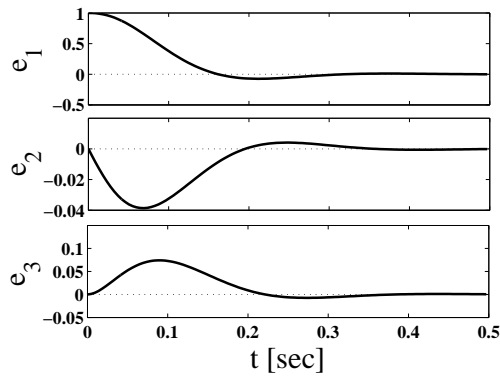


図5.4 オブザーバの推定誤差の応答

5.2.2 最小次元オブザーバ

通常，出力 $y = Cx$ において行列 C は行フルランクである．そうでないとき，冗長なセンサがあることになるので，むだになる．測定される出力 $y = Cx$ に状態の一部が含まれているから，全状態をオブザーバで推定する必要はなく，その一部だけを推定すればよいと考えられる．そこで，信号

$$z = Vx \quad (5.37)$$

の推定を考える．このとき，

$$\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ V \end{bmatrix} x \quad (5.38)$$

が成り立つので， $[C^T \ V^T]^T$ が正則であれば (y, z) から状態 x を一意に算出できる．このとき， $z \in \mathbf{R}^{(n-p)}$ となる．逆に， $[C^T \ V^T]^T$ が横長のとき， x は一意に算出できない．また， $[C^T \ V^T]^T$ が縦長のとき， z に冗長な要素をもってしまふ．よって，状態 x を一意に算出できるために z の最小可能な次元は $n-p$ である．この意味で，最小次元の信号 z を推定するオブザーバは最小次元オブザーバ (minimal order observer) と呼ばれ，その次元は $n-p$ である．

以下， z の推定を考える．ここで， z の推定値を \bar{z} とし，推定誤差を

$$e := \bar{z} - z \quad (5.39)$$

とおく．まず，初期推定誤差 $e(0) = 0$ のとき $e(t) \equiv 0$ となるべきである．よって，推定誤差の動特性は次のような自由システムになる必要がある．

$$\dot{e} = Te \quad (5.40)$$

ここで， $T \in \mathbf{R}^{(n-p) \times (n-p)}$ が安定行列となることは $e(\infty) = 0$ のための必要

十分条件である．この場合に限り，信号 z が推定できる．そこで，この条件式から最小次元オブザーバがどんな構造をもつ必要があるかについて考察する． $\dot{z} = V\dot{x} = VAx + VBu$ を用いれば，上式より

$$\dot{\bar{z}} = \dot{z} + \dot{z} = T\bar{z} - Tz + \dot{z} = T\bar{z} + VAx + VBu - Tz$$

が成り立つ．

$$A \begin{bmatrix} C \\ V \end{bmatrix}^{-1} = [K \ M] \Rightarrow A = KC + MV \quad (5.41)$$

とにおいて x を (y, z) で表すと， $\dot{\bar{z}}$ は

$$\dot{\bar{z}} = T\bar{z} + VKy + VBu + (VM - T)z$$

となる．推定は既知の信号 (y, u) で行わなければならないことから，

$$VM - T = 0 \quad (5.42)$$

となる必要がある．この条件はさらに

$$V(A - KC) = TV \quad (5.43)$$

と等価である．なぜなら， $A - KC = MV$ より， $VM = T$ が成立するとき $V(A - KC) = VMV = TV$ となる．逆に， $V(A - KC) = TV$ のとき $VMV = TV$ ，すなわち $(VM - T)V = 0$ が成り立つ． V が行フルランクであるため $VM - T = 0$ とならなければならない．

なお，状態推定値 \bar{x} は式 (5.38) に z の代わりに \bar{z} を代入することで計算される．以上をまとめると，次の定理を得る．

定理 5.5 $T \in \mathbf{R}^{(n-p) \times (n-p)}$ を任意に与えられた安定行列とする．

$$\text{rank} \begin{bmatrix} C \\ V \end{bmatrix} = n, \quad V(A - KC) = TV$$

を満たす行列 $V \in \mathbf{R}^{(n-p) \times n}$ ， $K \in \mathbf{R}^{n \times p}$ が存在するとき，オブザーバ

$$\dot{\bar{z}} = T\bar{z} + VKy + VBu \quad (5.44)$$

を用いて状態 x を漸近推定でき，その推定値 \bar{x} は

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} C \\ V \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} y \\ \bar{z} \end{bmatrix} \quad (5.45)$$

で与えられる．

この定理の条件を満たす行列の存在は (C, A) の可観測性によって保証される．

定理 5.6 任意に与えられた固有値集合 $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_{n-p}\}$ について,

$$\text{rank} \begin{bmatrix} C \\ V \end{bmatrix} = n, V(A - KC) = TV, \sigma(T) = \Lambda$$

を満たす行列 $V \in \mathbf{R}^{(n-p) \times n}$, $K \in \mathbf{R}^{n \times p}$ と $T \in \mathbf{R}^{(n-p) \times (n-p)}$ が存在するための必要十分条件は, (C, A) が可観測であることである.

証明 十分性は次の Gopinath のアルゴリズムを用いて実際にこれらの行列を構築することで示されるので, ここでまず必要性を示す.

(C, A) が可観測でないとき, 最初の二つの条件が成り立っても, 3 番目の条件は成立しないことを示す. このため, λ を (C, A) の不可観測固有値とし, $u \neq 0$ をその対応する固有ベクトルとする. このとき,

$$Au = \lambda u, Cu = 0 \tag{5.46}$$

が成り立つ. また, $[C^T \ V^T]^T$ の正則性より $Vu \neq 0$ である. すると,

$$V(A - KC)u = TVu \Rightarrow \lambda \cdot Vu = T \cdot Vu \tag{5.47}$$

が成り立ち, $\lambda \in \sigma(T)$ となる. つまり, 行列 T の固有値は任意に選べない.

〔1〕 Gopinath のアルゴリズム

1. 次の行列が正則となるように行列 $D \in \mathbf{R}^{(n-p) \times n}$ を適当に決める.

$$S := \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix}$$

2. 以下の相似変換を施す.

$$SAS^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

3. $T = A_{22} + LA_{12}$ とおき, $\sigma(T) = \Lambda$ となるように $L \in \mathbf{R}^{(n-p) \times p}$ を決める.
4. $V = D + LC$, $K = -AS^{-1} \begin{bmatrix} -I_p \\ L \end{bmatrix}$ とおく.

行列 K はオブザーバに VK の形でしか現れないから, 実際の設計ではそれを計算する必要はなく, $VK = -[L \ I_{n-p}]SAS^{-1}[-I_p \ L^T]^T$ だけを計算すればよい.

このアルゴリズムで決めた行列が定理 5.6 の条件を満たすことを示そう. まず, C は行フルランクだから, S を正則にする行列 D が存在する. $SS^{-1} = I$ から $CS^{-1} = [I_p \ 0]$ が容易に分かる. すると, (C, A) の可観測性および相似変換に対して可観測性が変わらないことから (A_{12}, A_{22}) は可観測でなければならない(練習問題 5.9). よって, $\sigma(A_{22} + LA_{12}) = \Lambda$ を満たす $L \in \mathbf{R}^{(n-p) \times p}$ は極配置法

で計算できる．さらに， $V = [L \ I_{n-p}]S$ と $T = [L \ I_{n-p}]SAS^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ I_{n-p} \end{bmatrix}$ に注意すれば，

$$\begin{aligned} V(A - KC) &= [L \ I_{n-p}]SA + [L \ I_{n-p}]SAS^{-1} \begin{bmatrix} -I_p \\ L \end{bmatrix} C \\ &= [L \ I_{n-p}]SAS^{-1} \left(S + \begin{bmatrix} -I_p \\ L \end{bmatrix} C \right) \\ &= [L \ I_{n-p}]SAS^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ I_{n-p} \end{bmatrix} (D + LC) \\ &= TV \end{aligned}$$

が成り立つことが分かる．さらに，

$$\begin{bmatrix} C \\ V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ L & I_{n-p} \end{bmatrix} S \Rightarrow \text{rank} \begin{bmatrix} C \\ V \end{bmatrix} = n$$

も成立する．以上で，定理 5.6 の十分性を示した．

【例題 5.2】 状態方程式

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = [1 \ 0 \ 0]x$$

で与えられたシステムについて，最小次元のオブザーバを設計せよ．

解答 まず，可観測行列を計算すると

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

となり，ランク 3 をもつ．よって，このシステムは可観測である．最小次元オブザーバの次元は $n - p = 3 - 1 = 2$ である．そこで， $\sigma(T) = \{-4, -4\}$ となるように最小次元オブザーバを設計しよう．

ここで，行列 D を次のようにとる．

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow S = \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} = I_3 \tag{5.48}$$

すると， SAS^{-1} は

$$SAS^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

のように分割される． $L = [l_1 \ l_2]^T$ とおくと

$$\det(sI - (A_{22} + LA_{12})) = s^2 + (2l_2 - l_1 - 2)s - (3l_2 - l_1 - 1) \tag{5.49}$$

となる．一方， T の特性多項式は $s^2 + 8s + 16$ である．係数を比較すると，

$$2l_2 - l_1 - 2 = 8, 3l_2 - l_1 - 1 = -16 \Rightarrow l_1 = -60, l_2 = -25 \quad (5.50)$$

を得る．さらに，Gopinathのアルゴリズムに従って計算すると

$$V = D + LC = \begin{bmatrix} -60 & 1 & 0 \\ -25 & 0 & 1 \end{bmatrix}, T = A_{22} + LA_{12} = \begin{bmatrix} -59 & 121 \\ -25 & 51 \end{bmatrix}$$

$$VB = - \begin{bmatrix} 60 \\ 24 \end{bmatrix}, VK = - \begin{bmatrix} 575 \\ 250 \end{bmatrix}$$

が得られる．したがって，最小次元オブザーバは

$$\dot{\bar{z}} = \begin{bmatrix} -59 & 121 \\ -25 & 51 \end{bmatrix} \bar{z} - \begin{bmatrix} 575 \\ 250 \end{bmatrix} y - \begin{bmatrix} 60 \\ 24 \end{bmatrix} u \quad (5.51)$$

となり，状態 x の推定値は

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} C \\ V \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} y \\ \bar{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 60 \\ 25 \end{bmatrix} y \quad (5.52)$$

となる．

◇

5.3 併合系と分離原理

さて，出力 y だけが計測される時，オブザーバで推定した状態を用いて状態フィードバック

$$u = F\bar{x} + v \quad (5.53)$$

を施すことを考えよう．ただし，信号 v は外部からの入力(例えば目標値追従用の信号など)を表す．状態フィードバックとオブザーバを使った制御構成は併合系という．以下，同一次元オブザーバを使う場合と最小次元オブザーバを使う場合に分けて，それぞれの閉ループ系の特性を調べる．

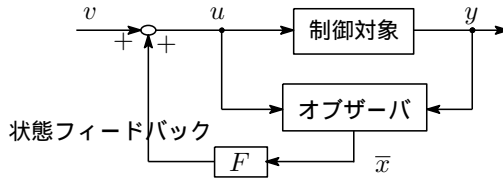


図 5.5 併合系の構造

5.3.1 同一次元オブザーバを用いる場合

このとき，推定誤差は $e = \bar{x} - x$ である．そこで，閉ループ系の状態を (x, e) と選ぶことにする．このとき，式(5.53)で与えられた u と式(5.1)より \dot{x} は

$$\dot{x} = Ax + BF\bar{x} + Bv = (A + BF)x + BF e + Bv$$

となる．これを式(5.34)とまとめると，閉ループ系の状態方程式

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + BF & BF \\ 0 & A + LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} v \quad (5.54)$$

を得る．本式より閉ループ系の極は特性多項式

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} sI - (A + BF) & -BF \\ 0 & sI - (A + LC) \end{bmatrix} \\ = \det(sI - (A + BF)) \det(sI - (A + LC)) \end{aligned}$$

の特性根であり，状態フィードバック系とオブザーバの極の和集合になることが明らかである．したがって，状態フィードバックとオブザーバがそれぞれ安定となるように設計されていれば，全システムも安定になることが分かる．つまり，状態フィードバックの設計とオブザーバの設計は独立しており，別々に行える．システム論では，この性質を分離原理 (separation principle) という．

ただし，分離原理が成り立つとはいえ，状態フィードバックとオブザーバの過渡応答を速くするだけで目標値や外乱に対する応答もよくなる保証はない．なぜなら，過渡応答は零点にも依存するからである．例えば，目標値応答の場合，プラントと制御器の伝達零点は閉ループ伝達関数の伝達零点になる．したがって，プラントに虚軸に近い安定/不安定零点をもつと，閉ループ極を大きくしすぎると出力応答の立上りが急激になるから，かえって大きな行き過ぎ量/逆振れをもたらしてしまう．制御器の極でプラントの零点を相殺させればよいと思われるかもしれないが，外乱応答などの観点から虚軸に近い極零点相殺は許されない．

■ 例 5.6 2 慣性系に対し，前の例で設計した状態フィードバックとオブザーバを併合した閉ループ系において，単位インパルスのトルク外乱を加えたときのモータ角速度 ω_M と負荷角速度 ω_L の応答は図 5.6 のようになる． □

また， $u = F\bar{x}$ を式(5.32)代入すると

$$\dot{\bar{x}} = (A + BF + LC)\bar{x} - Ly$$

となるから， $y \mapsto u$ の動的出力フィードバック制御器は

$$K(s) = \left[\begin{array}{c|c} A + BF + LC & -L \\ \hline F & 0 \end{array} \right] \quad (5.55)$$

となる．これは状態フィードバックとオブザーバをまとめた動的出力フィードバック制御器である．

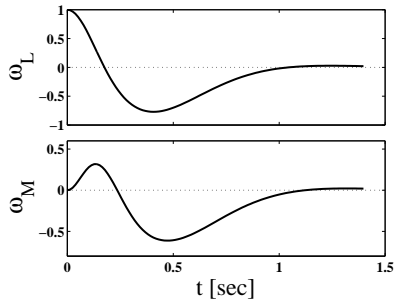


図5.6 併合系のインパルス応答

5.3.2 最小次元オブザーバを用いる場合

この場合、推定誤差 $e = \bar{z} - z$ より \bar{z} は $\bar{z} = z + e$ と書ける．簡単のために、

$$\begin{bmatrix} C \\ V \end{bmatrix}^{-1} = [G \ H] \tag{5.56}$$

とおく．すると、式(5.45)、(5.38)より状態推定値 \bar{x} は

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} C \\ V \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} y \\ \bar{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ V \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} y \\ z + e \end{bmatrix} = x + He \tag{5.57}$$

のように書き直せる．したがって、入力 $u = F\bar{x} + v$ を代入することによって x の状態方程式を

$$\dot{x} = Ax + BF\bar{x} + Bv = (A + BF)x + BFHe + Bv$$

に変形できる．これを推定誤差の状態方程式 $\dot{e} = Te$ と合わせると、閉ループ系の状態方程式

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + BF & BFH \\ 0 & T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} v \tag{5.58}$$

が得られる．故に、この場合においても閉ループ系の極は状態フィードバック系とオブザーバの極の和集合である．すなわち、ここでも分離原理が成り立つ．

さらに、 $\bar{x} = Gy + H\bar{z}$ より入力 u は

$$u = F\bar{x} = FH\bar{z} + FGy \tag{5.59}$$

と書ける．本式を最小次元オブザーバ(5.44)に代入すると、その状態方程式は

$$\dot{\bar{z}} = T\bar{z} + VKy + VBu = (T + VBFH)\bar{z} + V(K + BFG)y$$

に変形される．よって、状態フィードバックと最小次元オブザーバで構成した動的出力制御器は

$$K(s) = \left[\begin{array}{c|c} T + VBFH & V(K + BFG) \\ \hline FH & FG \end{array} \right] \quad (5.60)$$

となり, $(n-p)$ 次のものである.

練習問題

5.1 制御対象

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = [1, 0]x$$

に対して, 状態フィードバック $u = fx$ で閉ループの極を $-2, -3$ に設定したい. 状態フィードバックゲイン $f = [f_1 \ f_2]$ を求めよ.

5.2 次の線形システムに関する設問に答えよ.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = [0 \ 1]x$$

- 閉ループ極が $-1, -2$ となるように状態フィードバック $u(t) = fx(t)$ を設計せよ.
- 設問(a)の極配置問題を出力フィードバック $u(t) = ky(t)$ で実現できるかを吟味せよ.

5.3 次の線形システムについて考える.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

- 状態フィードバック $u = fx$ で閉ループ極を $-2, -1 \pm j1$ に設定できるか? その理由を述べよ.
- 状態フィードバック $u = fx$ で閉ループ極を $-1, -1 \pm j1$ に設定できるかを答えよ. 設定できる場合, 一つの状態フィードバックゲイン f を与えよ.
- 入力ベクトルが $b = [0 \ 1 \ 1]^T$ に変わったとき, 閉ループ極を $-2, -1 \pm j1$ に配置できる状態フィードバックゲイン f を求めよ.

5.4 次の線形システムが与えられたとする.

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), \quad y(t) = [1 \ 0]x(t)$$

- システムの極を求め, 安定性を判定せよ.
- 可制御性と可観測性を調べよ.
- 閉ループ極が $-1, -2$ となるように状態フィードバック $u(t) = fx(t)$ を求めよ.
- オブザーバの極が $-3, -4$ となるように同一次元オブザーバを設計せよ.

5.5 システム

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = [1 \ 1]x$$

が出力フィードバック制御 $u = ky$ によって安定化できるかを吟味せよ。

5.6 次の線形システムが与えられたとする。

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = [1 \ 0]x$$

- (a) すべての状態が測定できるとき、状態フィードバック $u = fx$ によって、閉ループ系の極を $-1, -2$ に設定したい。フィードバックゲイン f を求めよ。
- (b) 出力だけが測定されるとき、同一次元オブザーバを使って状態 $x(t)$ を推定したい。オブザーバ極が $-4, -5$ となるようにオブザーバを設計せよ。

5.7 問5.3項目(c)の状態フィードバック制御を実現するため、オブザーバを設計することを考える。

- (a) 出力が $y = [0 \ 0 \ 1]x$ である場合、同一次元オブザーバを設計できるかについて、ブロック線図を用いて説明せよ。
- (b) 出力が $y = [1 \ 0 \ 1]x$ に変わったとき、極 $-4, -2 \pm j1$ をもつ同一次元オブザーバを設計せよ。

5.8 多入出力システム $\dot{x} = Ax + Bu + Dw, y = Cx$ に状態フィードバック $u = Fx$ を施した閉ループ系は

$$\dot{x}(t) = (A + BF)x(t) + Dw(t), \quad y(t) = Cx(t)$$

となる。この閉ループ系において、任意の外乱 $w(t)$ に対する出力応答が 0 となるための必要十分条件は

$$C(sI - A - BF)^{-1}D \equiv 0$$

であることを示した上、この条件は

$$CD = C(A + BF)D = \dots = C(A + BF)^{n-1}D = 0$$

と等価であることを示せ。さらに、 $u \mapsto y$ の伝達関数の次数差が r である 1 入出力系においてこの条件を満たす状態フィードバックゲイン f の存在条件が

$$cd = cAd = cA^2d = \dots = cA^{r-1}d = 0$$

となることを示せ。(この条件は $d \mapsto y$ の伝達関数の次数差が $u \mapsto y$ の伝達関数の次数差より 1 つ以上高いことを意味する)

5.9 Gopinath のアルゴリズムにおいて、 (C, A) が可観測のとき、対 (A_{12}, A_{22}) も可観測となることを示せ。

6

安定化制御器のパラメータ化

いままでの制御理論は、古典制御・現代制御問わず、プラントを制御する一つの制御器をいかに設計するかに力点を置いてきた。システム設計に際し、何らかの意味で制御性能を最適化することが望まれる。この最適化は基本的に閉ループ伝達行列の整形問題に帰着されるが、同時に閉ループ系の内部安定性も保証しなければならない。しかし、この安定性保証は最適化の足枷になっている。そこで、次の問題が浮上してくる。つまり、プラントを安定化できる制御器のすべてを自由なパラメータをも一つの公式で表せるかである。もしこれが可能ならば、性能の最適化問題はこの自由パラメータを最適化することに集約され、大幅に簡単化されることが期待できる。

本章では、これが可能であることを示す。この安定化制御器のパラメータ化は現代制御理論の重要な成果の一つである。さらに、閉ループ系の伝達行列構造や状態空間構造、ならびに2自由度制御系の構造と特徴についても調べる。

6.1 一般化フィードバック構成の導入

例5.4の2慣性系問題を振り返ってみよう。制御仕様は負荷トルク外乱 d が負荷の回転速度 ω_L に与える影響を抑えながら、 ω_L を目標値 r に追従させることとする。この問題では、制御したい出力は負荷の回転速度誤差 $r - \omega_L$ であり、測定信号 ω_M とは異なる。また、トルク外乱 d もプラントへの制御入力 u とは違った入力である。このような制御問題に対して、直接外乱（もしくは目標値）応答を評価できる設計を行うために、新しい入出力表現法が必要となる。図6.1はそのために導入されたものである。この図において、 G はプラントと評価仕様（評価量、重み）をすべて含めた一般化プラント (generalized plant) と呼ばれるもので、 K は制御器である。また、以下の用語を使う。

- 評価出力 (controlled output) z : 制御性能などを評価するための出力ベクトル
- 測定出力 (measured output) y : 制御器の入力 (例えば, センサで測定する出力や追従誤差) ベクトル
- 外乱 (disturbance) w : 制御性能を評価するための外部入力ベクトル
- 制御入力 (control input) u : アクチュエータに加える指令ベクトル

$G(s)$ の入出力関係は

$$\begin{bmatrix} \hat{z}(s) \\ \hat{y}(s) \end{bmatrix} = G(s) \begin{bmatrix} \hat{w}(s) \\ \hat{u}(s) \end{bmatrix} \quad (6.1)$$

$$\hat{u}(s) = K(s)\hat{y}(s) \quad (6.2)$$

で与えられる。ただし, 一般化フィードバック構造における測定出力とは, 制御器 K の入力であり, 必ずしもプラントの出力そのものとは限らない。例えば, 1 自由度系の目標値追従制御の場合, 制御器への入力は追従誤差 $r - y_P$ (y_P はプラントの出力) であり, ここでいう測定出力 y となる。また, 2 自由度系の場合測定出力は信号ベクトル $[r^T \ y_P^T]^T$ となる[†]。

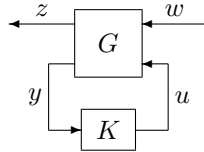


図 6.1 一般化フィードバック系

■ 例 6.1 例 5.4 の 2 慣性系負荷トルク外乱制御問題では, モデルは

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} -\frac{D_L}{J_L} & \frac{k}{J_L} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{k}{J_M} & -\frac{D_M}{J_M} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \frac{1}{J_L} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} d + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{J_M} \end{bmatrix} u \\ &= Ax + b_1 d + b_2 u \end{aligned} \quad (6.3)$$

$$y_P = [0 \ 0 \ 1]x = c_2 x$$

で与えられる。ここで, 評価出力を負荷の速度追従誤差

$$z = r - x_1 = [-1 \ 0 \ 0]x + r = c_1 x + r$$

とし, 測定出力を

$$y = [r \ y_P]^T$$

[†] 2 自由度制御については後述の例 6.3 を参照。

とする (2 自由度制御) . 本制御問題では, 外乱^{††}が $\bar{w} = [r \ d]^T$ である . ここで, $[\bar{w}^T \ u]^T$ から $[z \ y]^T$ までの一般化プラントを $P(s)$ で記述する . $P(s)$ の状態方程式は, 上記の式を $P(s)$ の入出力関係に合わせて整理すると次のように計算できる .

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ z \\ r \\ y_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 & b_1 & b_2 \\ c_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ c_2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ r \\ d \\ u \end{bmatrix} \quad (6.4)$$

さらに, 目標値の動特性を考えるために, 目標値のモデルを $W_R(s)$, トルク外乱のモデルを $W_D(s)$ とおき, これらの入出力関係

$$\hat{r}(s) = W_R(s)\hat{w}_1(s), \quad \hat{d}(s) = W_D(s)\hat{w}_2(s) \quad (6.5)$$

を代入すると, 最終的に $[w_1 \ w_2 \ u]^T \mapsto [z \ y]^T$ の一般化プラント

$$G(s) = P(s)\text{diag}(W_R(s) \ W_D(s) \ 1) \quad (6.6)$$

が得られる . \square

この例から分かるように, 一般化プラントはもとの制御対象のみならず, 信号間の結合関係や信号のモデル (重み) も含んだ拡大されたプラントとなっている .

実は, フィードバック制御系の設計問題だけでなく, フィルター (フィードフォワード系) の設計問題や 2 自由度系の設計問題など, すべての制御問題は必ずこの一般化フィードバック構造に帰着できる . その例を以下に示す .

■ 例 6.2 フィルターの設計

プラントの入出力より状態の一部からなる信号 q を推定することを考える . ただし, プラントには雑音 n が混入しており, 状態方程式は

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1n + B_2u \\ y &= Cx + D_1n + D_2u \\ q &= Hx \end{aligned} \quad (6.7)$$

で与えられるとする . そこで, 既知の入出力信号 (u, y) をフィルター $F(s)$ で処理して信号 q の推定値 \hat{q} を算出したい . フィルターを設計する基準として, 推定誤差 $z = q - \hat{q}$ をなるべく小さくしたい . すなわち, 雑音は外乱で, 推定誤差は評価出力である . この問題を一般化フィードバック系に当てはめると, 入出力関係は

$$\begin{bmatrix} -\hat{z} \\ \hat{y} \\ \hat{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 & 0 \\ H & 0 & 0 & -I \\ -C & D_1 & D_2 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{n} \\ \hat{u} \\ -\hat{q} \end{bmatrix} = P(s) \begin{bmatrix} \hat{n} \\ \hat{u} \\ -\hat{q} \end{bmatrix} \quad (6.8)$$

$$\hat{q} = F(s) \begin{bmatrix} \hat{y} \\ \hat{u} \end{bmatrix} \quad (6.9)$$

^{††} 追従誤差 z から見ると, 目標値 r が外乱の働きをする .

となる．さらに，雑音 n は有色雑音で，伝達関数 $W_n(s)$ に白色雑音 w を印加したときの出力であるとき， $\hat{n} = W_n(s)\hat{w}$ を代入すれば，重みつき推定問題の一般化プラント

$$\begin{bmatrix} \hat{z} \\ \hat{y} \\ \hat{u} \end{bmatrix} = G \begin{bmatrix} \hat{w} \\ \hat{u} \\ \hat{q} \end{bmatrix}, \quad G = P \begin{bmatrix} W_n & & \\ & I & \\ & & I \end{bmatrix} \quad (6.10)$$

を得る (図 6.2) . □

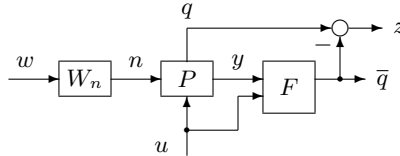


図 6.2 フィルタリング問題

■ 例 6.3 2 自由度制御系

目標値追従問題において，制御に使える信号は制御対象の出力 y_P と目標値 r である．しかし，いままでに考えた図 4.1 のような制御構造では既知信号の差 $r - y_P$ だけをフィードバックしている．このような制御構成は 1 自由度制御系 (one-degree-of-freedom control system) という．既知の情報を完全に生かされていないため，よい追従性能を上げるのは困難である．これに対して， y_P のフィードバックだけでなく， r のフィードフォワードも行う制御構成は 2 自由度制御系 (two-degree-of-freedom control system) と呼ばれる．その一般的な構造は図 6.3 に示されている．

ここで，目標値のモデルを $W_R(s)$ とする．制御目的は追従誤差をなるべく小さくすることであるから，評価出力を追従誤差 $z = r - y_P$ とする．また，外乱が目標値モデルのインパルス入力 w であり，測定出力が (r, y_P) であることに注意すれば，入出力関係

$$\begin{bmatrix} -\hat{z} \\ \hat{r} \\ \hat{y}_P \end{bmatrix} = G(s) \begin{bmatrix} \hat{w} \\ \hat{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -W_R & -P \\ -W_R & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{w} \\ \hat{u} \end{bmatrix} \quad (6.11)$$

$$\hat{u} = K(s) \begin{bmatrix} \hat{r} \\ \hat{y}_P \end{bmatrix} \quad (6.12)$$

を得る (図 6.3) .

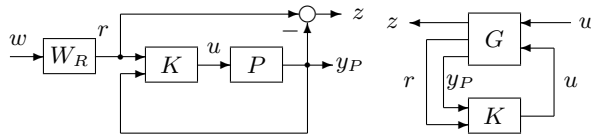


図 6.3 2 自由度系による目標値追従

□

以下では，一般化プラント $G(s)$ の状態方程式を

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ z \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \\ u \end{bmatrix} \quad (6.13)$$

とする．また，一般化プラントの伝達行列を入力 $\begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix}$ と出力 $\begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix}$ の次元に応じて次のように分割しておく．

$$G(s) = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & 0 \end{array} \right] \quad (6.14)$$

まず，次のことがいえる．

補題 6.1 $K(s)$ が $G(s)$ を安定化することと $K(s)$ が $G_{22}(s) = (A, B_2, C_2, 0)$ を安定化することは等価である．

証明 二つの閉ループ系が同じ A 行列をもつことを示せばよい．まず閉ループ系 (G_{22}, K) について考える．そこで， G_{22} の状態を x とするとその状態方程式は

$$\dot{x} = Ax + B_2u, \quad y = C_2x \quad (6.15)$$

で与えられる．ただし，外乱 w を省略した．また，制御器 $K(s)$ の状態方程式を

$$\dot{x}_K = A_Kx_K + B_Ky, \quad u = C_Kx_K + D_Ky \quad (6.16)$$

とおく． $y = C_2x$ を上式に代入すると

$$\dot{x}_K = B_KC_2x + A_Kx_K, \quad u = D_KC_2x + C_Kx_K$$

が得られる．次に，この u を \dot{x} の式に代入すると

$$\dot{x} = (A + B_2D_KC_2)x + B_2C_Kx_K$$

となる．したがって，閉ループ系 (G_{22}, K) の状態方程式は

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + B_2D_KC_2 & B_2C_K \\ B_KC_2 & A_K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_K \end{bmatrix} \quad (6.17)$$

で与えられる．一方，閉ループ系 (G, K) の状態方程式は 2.8.4 節の式 (2.90) で求まっており，上式と同じ A 行列をもつ．

6.2 安定化制御器のパラメータ化

状態フィードバックとオブザーバによって構成された式 (5.55) は制御対象 (5.1) を内部安定にする一つの出力フィードバック制御器を与えている．また， $B = B_2$ ， $C = C_2$ とおけば，補題 6.1 より制御器 (5.55) がシステム (6.13) も内部安定化できる．しかし，そのほかにも安定化制御器が多く存在する．本節ではすべての

安定化制御器を陽に公式化できることを示す．この公式はある自由パラメータを含む形式となっていることから，制御器のパラメータ化 (parameterization) と呼ばれている．

定理 6.1 (A, B_2) が可安定， (C_2, A) が可検出であると仮定する． F, L はそれぞれ $A + B_2F, A + LC_2$ を安定にする行列とする．このとき，式 (6.13) の一般化プラント $G(s)$ を内部安定化できるすべての制御器は，図 6.4 の y から u までの伝達行列で与えられる．ただし， $Q(s)$ は適切な次元をもつ任意の安定伝達行列であり，係数行列 $M(s)$ は式 (6.18) で与えられる．

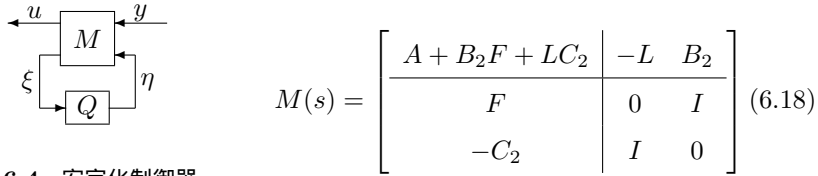


図 6.4 安定化制御器

証明 十分性は安定伝達行列 $Q(s) = (A_Q, B_Q, C_Q, D_Q)$ の実現を用いて閉ループ系の A 行列を計算することによって示される．まず 2.8.4 項の LFT 結合の公式 (2.90) を用いると， $K(s) = \mathcal{F}_\ell(M, Q)$ の実現は次のように計算される．

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\ell(M, Q) &= (A_K, B_K, C_K, D_K) \\ &= \left[\begin{array}{cc|cc} A + B_2F + LC_2 - B_2D_QC_2 & B_2C_Q & B_2D_QC_Q - L & \\ -B_QC_2 & A_Q & B_Q & \\ \hline F - D_QC_2 & C_Q & D_Q & \end{array} \right] \end{aligned} \quad (6.19)$$

これを閉ループ伝達行列 $H_{zw} = \mathcal{F}_\ell(G, K)$ に代入し，LFT 結合の公式を再び用いれば，閉ループ系の A 行列

$$A_c = \left[\begin{array}{ccc} A + B_2D_QC_2 & B_2F - B_2D_QC_2 & B_2C_Q \\ B_2D_QC_2 - LC_2 & A + B_2F + LC_2 - B_2D_QC_2 & B_2C_Q \\ B_QC_2 & -B_QC_2 & A_Q \end{array} \right] \quad (6.20)$$

が導出される．その安定性を調べるために，相似変換で A_c をブロック三角行列に変換することを考える．そこで，この行列に対して第 2 列ブロックを第 1 列ブロックに加え，第 2 行ブロックから第 1 行ブロックを引くという相似変換を行ってから，さらに第 2 列ブロックと第 3 列ブロックおよび第 2 行ブロックと第 3 行ブロックを入れ替える相似変換[†]を施すと， A_c はブロック三角行列

[†] $T_1 = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ I & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}$ ， $T_2 = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \\ 0 & I & 0 \end{bmatrix}$ がこの二つの相似変換に対応する変換行列である

$$\begin{bmatrix} A + B_2F & B_2C_Q & B_2F - B_2D_QC_2 \\ 0 & A_Q & -B_QC_2 \\ 0 & 0 & A + LC_2 \end{bmatrix} \quad (6.21)$$

に相似することが確認できる．この行列は明らかに安定である．

必要性を示すには，任意の安定化制御器 $K(s)$ が必ずある安定な $Q_0(s)$ を用いて $K(s) = \mathcal{F}_\ell(M, Q_0)$ と書けることを示せばよい．そこで，この式から $Q_0(s)$ を逆算して，その安定性を確かめることにする．図 6.5 の入出力関係より

$$\begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{\xi} \end{bmatrix} = M(s) \begin{bmatrix} \hat{y} \\ \hat{\eta} \end{bmatrix}, \quad \hat{u} = K(s)\hat{y} \quad (6.22)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\eta} \\ \hat{y} \end{bmatrix} = \hat{M}(s) \begin{bmatrix} \hat{\xi} \\ \hat{u} \end{bmatrix}, \quad \hat{\eta} = Q_0(s)\hat{\xi} \quad (6.23)$$

を得る．これらの式から $\hat{M}(s)$ は

$$\hat{M}(s) = \begin{bmatrix} & I \\ I & \end{bmatrix} M^{-1}(s) \begin{bmatrix} & I \\ I & \end{bmatrix} \quad (6.24)$$

となることが分かる．2.7 節の逆システムの公式を用いて $M^{-1}(s)$ を計算すると， $\hat{M}(s)$ の実現

$$\hat{M}(s) = \left[\begin{array}{c|cc} A & -L & B_2 \\ \hline -F & 0 & I \\ C_2 & I & 0 \end{array} \right] \quad (6.25)$$

を得る． $\hat{M}(s)$ が $G(s)$ と同じ (2, 2) ブロックをもつから， $K(s)$ によって安定化される (補題 6.1 より)．よって， $Q_0(s) := \mathcal{F}_\ell(\hat{M}, K)$ は安定となる．

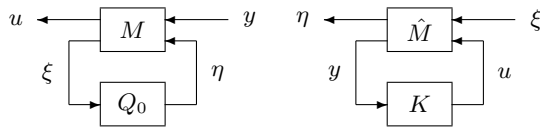


図 6.5 $K(s) = \mathcal{F}_\ell(M, Q_0)$ と $Q_0(s) = \mathcal{F}_\ell(\hat{M}, K)$ の入出力関係

$G(s)$ が安定の場合，安定化制御器の公式は特に簡単である．

系 6.1 $G(s)$ が安定であるとき，その安定化制御器のすべては

$$K(s) = Q(I + G_{22}Q)^{-1} = (I + QG_{22})^{-1}Q \quad (6.26)$$

で表せる．ただし， $Q(s)$ は適切な次元をもつ任意の安定伝達行列である．

証明 この場合， $F = 0$ ， $L = 0$ とおけるので，係数行列 $M(s)$ は

$$M(s) = \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & -G_{22}(s) \end{bmatrix}$$

となる．よって，結果は明白である．

なお，図 6.6 に示される通常の負のフィードバック系は $G_{22}(s) = -P(s)$ の場合に当たるから， $P(s)$ が安定のときその安定化制御器の公式は

$$K(s) = Q(I - PQ)^{-1} \tag{6.27}$$

となる．

【例題 6.1】 図 6.6 の 1 入力フィードバック系を考える． $P(s)$ を安定とし， $P(0) \neq 0$ とする．ステップ状の外乱 d を漸的に除去できる制御器をすべて求めよ．さらに， $P(s) = 1/(s+1)$ について $\|y\|_2 \leq 0.1$ となるように制御器を決めよ．ただし， $Q(s) = P^{-1}(s) \frac{k}{1+\epsilon s}$ ($\epsilon > 0$) とする．

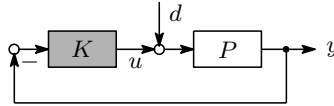


図 6.6 外乱制御

解答 外乱応答の Laplace 変換は

$$\hat{y}(s) = \frac{P}{1+PK} \hat{d}(s) = \frac{P}{1+PK} \frac{1}{s}$$

である．安定化制御器の公式 $K = Q/(1 - PQ)$ を代入すると

$$\hat{y}(s) = P(1 - PQ) \frac{1}{s} \tag{6.28}$$

となる．Laplace 変換の最終値定理により

$$y(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \hat{y}(s) = P(0)[1 - P(0)Q(0)]$$

を得る． $P(0) \neq 0$ なので， $y(\infty) = 0$ が成立するために

$$Q(0) = \frac{1}{P(0)} \tag{6.29}$$

でなければならない．よって，外乱を漸近除去できるすべての制御器は集合

$$\left\{ K = \frac{Q}{1 - PQ} : Q(s) \text{ 安定かつ } Q(0) = \frac{1}{P(0)} \right\} \tag{6.30}$$

で与えられる．明らかに

$$K(0) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{Q}{1 - PQ} \rightarrow \infty \tag{6.31}$$

となるので， $K(s)$ に積分器 $1/s$ をもつ．

プラント $P(s) = 1/(s+1)$ について $\|y\|_2$ を有界にするために $y(\infty) = 0$ が成り立たなければならない．故に $k = Q(0) = 1/P(0) = 1$ となる．このとき $P(s), Q(s)$ を式 (6.28) に代入すると

$$\hat{y}(s) = \frac{\epsilon}{(s+1)(\epsilon s+1)} = \frac{\epsilon}{1-\epsilon} \left(\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+1/\epsilon} \right)$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{\epsilon}{1-\epsilon} (e^{-t} - e^{-t/\epsilon}), t \geq 0$$

が得られる．すると

$$\|y\|_2^2 = \int_0^\infty y^2(t)dt = \frac{\epsilon^2}{2(1+\epsilon)} \leq 0.1^2 \Rightarrow \epsilon^2 - 0.02\epsilon - 0.02 \leq 0$$

この不等式の解は $-0.131 \leq \epsilon \leq 0.151$ であり, $\epsilon > 0$ を考慮すると最終的に解の範囲が $0 < \epsilon \leq 0.151$ となる. 対応する制御器を計算するとPI制御器

$$K(s) = \frac{s+1}{\epsilon s} = \frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{\epsilon s}$$

となる. ◇

6.3 Youlaのパラメータ化

安定化制御器のパラメータ化はYoulaの強安定化問題の研究^{2),3)}に端を発する. その形式は前節のLFT形式とは異なる. いくつかの問題に対して, Youlaのパラメータ化が便利なので, 本節ではこれを導入しておく.

定理6.1の制御器係数行列 $M(s)$ の入出力関係 (図6.4を参照)

$$\begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{\xi} \end{bmatrix} = M(s) \begin{bmatrix} \hat{y} \\ \hat{\eta} \end{bmatrix} \quad (6.32)$$

から着手する. これを形式的に以下のように変形する.

$$\begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{y} \end{bmatrix} = \Phi(s) \begin{bmatrix} \hat{\eta} \\ \hat{\xi} \end{bmatrix} \quad (6.33)$$

または

$$\begin{bmatrix} \hat{\eta} \\ \hat{\xi} \end{bmatrix} = \Phi^{-1}(s) \begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{y} \end{bmatrix} := \Theta(s) \begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{y} \end{bmatrix} \quad (6.34)$$

に変形する.

伝達行列 $\Phi(s)$ を求めるために, $M(s)$ の状態方程式を変形することによって $\Phi(s)$ の状態方程式を導く. キーポイントは $\Phi(s)$ の入出力関係に着目することである. まず, $M(s)$ の状態を x_M とおくと, その状態方程式は

$$\begin{aligned} \dot{x}_M &= (A + B_2F + LC_2)x_M - Ly + B_2\eta \\ u &= Fx_M + \eta \\ \xi &= -C_2x_M + y \end{aligned} \quad (6.35)$$

と書ける. $\xi = -C_2x_M + y$ から $y = C_2x_M + \xi$ を得る. これを \dot{x}_M の式に代入することによって $\Phi(s)$ に関する状態方程式

$$\begin{aligned} \dot{x}_M &= (A + B_2F)x_M + B_2\eta - L\xi \\ u &= Fx_M + \eta \\ y &= C_2x_M + \xi \end{aligned} \quad (6.36)$$

が得られる．よって， $\Phi(s)$ の伝達行列は

$$\Phi(s) = \left[\begin{array}{c|cc} A + B_2F & B_2 & -L \\ \hline F & I & 0 \\ C_2 & 0 & I \end{array} \right] := \begin{bmatrix} D(s) & -Y(s) \\ N(s) & -X(s) \end{bmatrix} \quad (6.37)$$

となる．また，2.7節の公式を用いて $\Phi^{-1}(s) = \Theta(s)$ を計算すると

$$\Theta(s) = \left[\begin{array}{c|cc} A + LC_2 & -B_2 & L \\ \hline F & I & 0 \\ C_2 & 0 & I \end{array} \right] := \begin{bmatrix} -\tilde{X}(s) & \tilde{Y}(s) \\ -\tilde{N}(s) & \tilde{D}(s) \end{bmatrix} \quad (6.38)$$

が容易に得られる．明らかに，

$$\begin{bmatrix} -\tilde{X}(s) & \tilde{Y}(s) \\ -\tilde{N}(s) & \tilde{D}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D(s) & -Y(s) \\ N(s) & -X(s) \end{bmatrix} = I \quad (6.39)$$

が成り立つ．以上の準備のもとでYoulaのパラメータ化を示そう．

定理 6.2 (A, B_2) が可安定， (C_2, A) が可検出であると仮定する． F, L はそれぞれ $A + B_2F, A + LC_2$ を安定にする行列とする．このとき，以下の命題が成り立つ．

- (1) $G_{22}(s) = N(s)D^{-1}(s) = \tilde{D}^{-1}(s)\tilde{N}(s)$ が成立する．
- (2) 式(6.14)の一般化プラント $G(s)$ を内部安定化できる制御器のすべては

$$K(s) = (\tilde{X} - Q\tilde{N})^{-1}(\tilde{Y} - Q\tilde{D}) = (Y - DQ)(X - NQ)^{-1} \quad (6.40)$$

で与えられ， $Q(s)$ は適切な次元をもつ任意の安定伝達行列である．

証明 (1)は上で与えられた $N(s), D(s), \tilde{N}(s), \tilde{D}(s)$ の実現を用いた伝達行列積の演算と相似変換によって示せる(練習問題6.8)．以下，(2)を証明する．

$$\hat{\eta} = Q\hat{\xi} \text{ (図6.4) に注意すると，式(6.33)は} \\ \hat{u} = (DQ - Y)\hat{\xi}, \quad \hat{y} = (NQ - X)\hat{\xi} \quad (6.41)$$

に変形できる．すると， $\hat{\xi}$ を消去することによって

$$\hat{u} = (Y - DQ)(X - NQ)^{-1}\hat{y} = K(s)\hat{y} \quad (6.42)$$

が導出される．一方，式(6.34)から

$$\hat{\eta} = \tilde{Y}\hat{y} - \tilde{X}\hat{u} = Q\hat{\xi}, \quad \hat{\xi} = \tilde{D}\hat{y} - \tilde{N}\hat{u} \quad (6.43)$$

を得る．2番目の式を1番目の式に代入して (\hat{u}, \hat{y}) について整理すると

$$\hat{u} = (\tilde{X} - Q\tilde{N})^{-1}(\tilde{Y} - Q\tilde{D})\hat{y} = K(s)\hat{y} \quad (6.44)$$

となる．

この定理の命題(1)は、必ずしも安定でない伝達行列 $G_{22}(s)$ を二つの安定伝達行列 $N(s)$ と $D(s)$ の比で表せることを示している。また、式(6.39)の(1, 1)ブロックより次式を得る。

$$\tilde{Y}(s)N(s) - \tilde{X}(s)D(s) = I \tag{6.45}$$

本式は $N(s)$ と $D(s)$ が共通の零点および右零点ベクトルを持たないこと[†]を示しており、そのためこのような分解は安定伝達行列による既約分解(coprime factorization)といわれている²⁾。

次のことは容易に確かめられる(練習問題6.8)。

- $N(s)$, $\tilde{N}(s)$ の零点は $G_{22}(s)$ の零点に一致する。
- $D(s)$, $\tilde{D}(s)$ の零点は $G_{22}(s)$ の極に一致する。

6.4 閉ループ系の構造

本節では、安定化された閉ループ系の構造を調べる。ここでは二種類のものを示す。一つは制御器のパラメータ行列を変数とするときの閉ループ系パラメータ行列の構造で、もう一つは安定化制御器の自由パラメータを変数とする場合の閉ループ伝達行列の構造である。

6.4.1 制御器のパラメータに関するアフィン構造

ここで、制御器

$$K(s) = (A_K, B_K, C_K, D_K) \tag{6.46}$$

で一般化プラント(6.13)を制御するときの閉ループ系と制御器の関係を調べる。2.8.4項で与えられた $\mathcal{F}_\ell(P, K)$ の状態空間実現によると、閉ループ伝達行列の状態空間実現は

$$\hat{z} = (A_c, B_c, C_c, D_c)\hat{w} \tag{6.47}$$

で与えられる。ただし、

$$\begin{bmatrix} A_c & B_c \\ C_c & D_c \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c} A + B_2 D_K C_2 & B_2 C_K & B_1 + B_2 D_K D_{21} \\ \hline B_K C_2 & A_K & B_K D_{21} \\ \hline C_1 + D_{12} D_K C_2 & D_{12} C_K & D_{11} + D_{12} D_K D_{21} \end{array} \right] \tag{6.48}$$

[†] 共通の零点を z 、右零点方向を $u \neq 0$ とすると $D(z)u = 0, N(z)u = 0$ が成り立つ。すると、式(6.45)に右から u をかけ $s = z$ とすると $0 = u$ の矛盾が生じる。

である．以下，閉ループ系のパラメータ行列と制御器パラメータ行列の関係を調べよう．まず

$$\begin{aligned} A_c &= \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_2 D_K C_2 & B_2 C_K \\ B_K C_2 & A_K \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_2 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_K & C_K \\ B_K & A_K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_2 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \end{aligned}$$

と書けることに注意する．つまり， A_c は制御器のパラメータ行列

$$\mathcal{K} = \begin{bmatrix} D_K & C_K \\ B_K & A_K \end{bmatrix} \tag{6.49}$$

に関してアフィンとなっている[†]．ほかの係数行列についても同様に書き換えると，閉ループ系のパラメータ行列は

$$\begin{bmatrix} A_c & B_c \\ C_c & D_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A} & \bar{B}_1 \\ \bar{C}_1 & \bar{D}_{11} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{B}_2 \\ \bar{D}_{12} \end{bmatrix} \mathcal{K} [\bar{C}_2, \bar{D}_{21}] \tag{6.50}$$

となり， \mathcal{K} に関してアフィンな構造をもつ．ただし，各係数行列は

$$\begin{bmatrix} \bar{A} & \bar{B}_1 & \bar{B}_2 \\ \bar{C}_1 & \bar{D}_{11} & \bar{D}_{12} \\ \bar{C}_2 & \bar{D}_{21} & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 & B_1 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I \\ \hline C_1 & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 \\ \hline C_2 & 0 & D_{21} & & \\ \hline 0 & I & 0 & & \end{bmatrix} \tag{6.51}$$

で与えられる．

閉ループ伝達行列は制御器の伝達行列に関しては非線形の分数構造をもつが，状態空間上のパラメータ行列から見たときははるかに性質のよいアフィン関係をもつ．この制御器パラメータに関するアフィン性質は線形閉ループ系のきわめて重要な特徴である．この特徴がゆえに，状態空間法はさまざまな最適制御設計に有効なのである．

6.4.2 自由パラメータに関するアフィン構造

まず，記述の便宜上以下の記号を定義しておく．

$$\begin{aligned} A_F &:= A + B_2 F & C_F &:= C_1 + D_{12} F \\ A_L &:= A + L C_2 & B_L &:= B_1 + L D_{21} \end{aligned} \tag{6.52}$$

[†] $Y = C + AXB$ のような関数は X に関するアフィン関数と呼ばれる．特に， $C = 0$ ，すなわち原点を通る場合線形関数という．

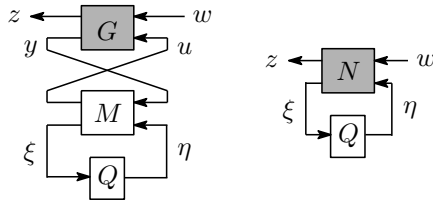


図 6.7 安定化された閉ループ系

ここで，閉ループ伝達行列と自由パラメータ $Q(s)$ の関係を解析したい．定理 6.1 の安定化制御器の公式を用いれば，閉ループ系の結合関係が図 6.7 のようになる．この図より，信号の伝達関係

$$\begin{bmatrix} \hat{z} \\ \hat{\xi} \end{bmatrix} = N(s) \begin{bmatrix} \hat{w} \\ \hat{\eta} \end{bmatrix} \quad (6.53)$$

が分かれば， $H_{zw}(s) = \mathcal{F}_\ell(N, Q)$ と $Q(s)$ の関係も分かる．したがって，以下では $M(s)$ の実現 (6.35) を用いて係数行列 $N(s)$ を計算する． $N(s)$ の状態は (x, x_M) であるが，より構造の見やすい実現を導くために x_M の代わりに状態

$$e = x - x_M \quad (6.54)$$

を用いる．このとき， $x_M = x - e$ であり， $u = Fx_M + \eta$ は $u = Fx - Fe + \eta$ と書ける．これを式 (6.13) に代入すると

$$\dot{x} = A_F x - B_2 F e + B_1 w + B_2 \eta \quad (6.55)$$

を得る．同様に， $x_M = x - e$ と $y = C_2 x + D_{21} w$ を \dot{x}_M の式 (6.35) の右辺に代入すると

$$\dot{x}_M = A_F x - (A_L + B_2 F) e - L D_{21} w + B_2 \eta$$

が成立することもいえる．また，上記二つの式により

$$\dot{e} = \dot{x} - \dot{x}_M = A_L e + B_L w \quad (6.56)$$

となることが示せる．さらに，式 (6.13) の z に $u = Fx - Fe + \eta$ ，式 (6.35) の ξ に $x_M = x - e$ と $y = C_2 x + D_{21} w$ を代入することによって

$$z = C_F x - D_{12} F e + D_{11} w + D_{12} \eta \quad (6.57)$$

$$\xi = C_2 e + D_{21} w \quad (6.58)$$

が導出できる．以上の式 (6.55)~(6.58) によって，

$$\begin{bmatrix} \hat{z} \\ \hat{\xi} \end{bmatrix} = N(s) \begin{bmatrix} \hat{w} \\ \hat{\eta} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} A_F & -B_2F & B_1 & B_2 \\ 0 & A_L & B_L & 0 \\ \hline C_F & -D_{12}F & D_{11} & D_{12} \\ 0 & C_2 & D_{21} & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} \hat{w} \\ \hat{\eta} \end{bmatrix}$$

が得られた． $N(s)$ をブロックに展開すると

$$N_{11} = \left[\begin{array}{cc|c} A_F & -B_2F & B_1 \\ 0 & A_L & B_L \\ \hline C_F & -D_{12}F & D_{11} \end{array} \right], \quad N_{12} = \left[\begin{array}{c|c} A_F & B_2 \\ \hline C_F & D_{12} \end{array} \right]$$

$$N_{21} = \left[\begin{array}{c|c} A_L & B_L \\ \hline C_2 & D_{21} \end{array} \right], \quad N_{22} = 0 \tag{6.59}$$

となる．ゆえに， w から z までの閉ループ伝達行列は

$$H_{zw}(s) = N_{11}(s) + N_{12}(s)Q(s)N_{21}(s) \tag{6.60}$$

となり， $Q(s)$ に関してアフィンとなる．

さらに，不変零点の状態フィードバックに対する不変性より，上記係数行列に関して以下の性質が成り立つ．

補題 6.2 $N_{12}(s)$ の不変零点は $G_{12}(s)$ と一致し， $N_{21}(s)$ の不変零点は $G_{21}(s)$ に一致する．

6.5 2自由度制御系の構造解析

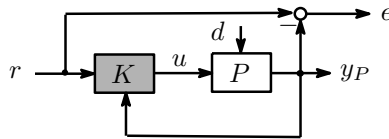


図 6.8 2自由度制御系

図 6.8に示す 2 自由度制御系について考える．制御の目的は外乱 $d(t)$ の影響を抑えながら，プラント出力 $y(t)$ を目標値 $r(t)$ に追従させることである．ここで，評価出力を追従誤差

$$e(t) = r(t) - y_P(t) \tag{6.61}$$

とする．また，制御対象の状態方程式を

$$\dot{x} = Ax + Hd + Bu \tag{6.62}$$

$$y_P = Cx \quad (6.63)$$

とし, 可安定かつ可検出とする. このとき, $u \mapsto y_P$ の伝達行列 $P_u(s)$ と $d \mapsto y_P$ の伝達行列 $P_d(s)$ はそれぞれ以下ようになる.

$$P_u(s) = C(sI - A)^{-1}B, \quad P_d(s) = C(sI - A)^{-1}H \quad (6.64)$$

この2自由度系を一般化フィードバック系に当てはめると, 外乱が $w = [r^T \ d^T]^T$, 測定出力が $y = [r^T \ y_P^T]^T$ となり, 一般化プラントの状態空間実現は

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ e \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 & H & B \\ -C & I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ C & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \\ u \end{bmatrix}$$

となる. ここで, 行列 F , $[0 \ L]$ をそれぞれ $A_F := A + B_2F = A + BF$, $A_L := A + [0 \ L]C_2 = A + LC$ を安定にする状態フィードバックゲインとオブザーバゲインとする. $[r^T \ d^T]^T$ から e までの閉ループ伝達行列は

$$[T_{er}(s) \ T_{ed}(s)] = N_{11}(s) + N_{12}(s)Q(s)N_{21}(s) \quad (6.65)$$

となる. 式(6.52)で定義された行列を計算すると, $B_L = [0 \ H]$, $C_F = -C$ となる. よって, (6.59)式より係数行列 $N_{ij}(s)$ は

$$N_{12}(s) = -C(sI - A_F)^{-1}B, \quad N_{21}(s) = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & C(sI - A_L)^{-1}H \end{bmatrix}$$

$$N_{11}(s) = [I, \ -N_{12}(s)F(sI - A_L)^{-1}H - C(sI - A_F)^{-1}H]$$

のように求まる. ここで, 自由パラメータを $y = [r^T \ y_P^T]^T$ の次元に合わせて

$$Q(s) = [Q_F(s) \ Q_B(s)] \quad (6.66)$$

のように分割すると, 閉ループ伝達行列はそれぞれ

$$T_{ed}(s) = N_{12}(s)Q_B(s)C(sI - A_L)^{-1}H - N_{12}(s)F(sI - A_L)^{-1}H - C(sI - A_F)^{-1}H \quad (6.67)$$

$$T_{er}(s) = I + N_{12}(s)Q_F(s) \quad (6.68)$$

になる. 明らかに, $T_{er}(s)$ は $Q_F(s)$ だけに依存する. 他方, $T_{ed}(s)$ は $Q_B(s)$ だけに依存する. すなわち $T_{er}(s)$ は $T_{ed}(s)$ と独立に設計できる.

さらに, $N_{12}(s)$ と $P_u(s)$ の零点が一致するので, $P_u(s)$ の不安定零点 z において $u^*N_{12}(z) = 0$ を満たすベクトル $u \neq 0$ がある. このとき, $Q_F(s)$ によらず式 $u^*T_{er}(z) = u^*$ が成立する. すなわち, 目標値追従伝達行列 $T_{er}(s)$ がプラン

ト $P_u(s)$ の不安定零点によって拘束される[†]。これに対して，外乱除去伝達行列 $T_{ed}(s)$ はプラント $P_u(s)$ の不安定零点だけでなく，外乱伝達行列 $P_d(s)$ の不安定零点の拘束も受ける（伝達行列 $C(sI - A_L)^{-1}H$ と $P_d(s)$ が同じ零点をもつ）。

特に，プラントが安定の場合 $F = 0$ ， $L = 0$ とおけるので，閉ループ伝達関数は

$$T_{ed}(s) = -P_u(s)Q_B(s)P_d(s) - P_d(s) \quad (6.69)$$

$$T_{er}(s) = I - P_u(s)Q_F(s) \quad (6.70)$$

に簡略化され，各伝達行列が受ける拘束や独立設計可能性は一層明確に現れる。

■ 例 6.4 次のシステムを考える。

$$\dot{x} = -2x + u + d, \quad y_P = 2x$$

目標値 r と外乱 d を共に単位ステップ信号 $1(t)$ とする。目標値追従誤差 $e(t)$ を低減するように 2 自由度制御系を設計しよう。

いまの場合，制御対象は安定で

$$P_u(s) = P_d(s) = \frac{2}{s+2}$$

である。そこで，制御器の自由パラメータを以下のように選ぶ。

$$Q_F(s) = P_u^{-1}(s)\frac{1}{\epsilon s + 1}, \quad Q_B(s) = -P_u^{-1}(s)\frac{1}{\tau s + 1}, \quad \epsilon, \tau > 0$$

すると，簡単な計算で

$$T_{er}(s) = 1 - P_u Q_F = \frac{s}{s+1/\epsilon}$$

$$T_{ed}(s) = -(P_u Q_B + 1)P_d = -\frac{2s}{(s+2)(s+1/\tau)}$$

が得られる。よって，追従誤差は

$$\begin{aligned} \hat{e}(s) &= T_{er}\hat{r} + T_{ed}\hat{d} = \frac{1}{s+1/\epsilon} - \frac{2}{(s+2)(s+1/\tau)} \\ \Rightarrow e(t) &= e^{-t/\epsilon} - \frac{2\tau}{1-2\tau} (e^{-2t} - e^{-t/\tau}) \end{aligned}$$

となる。 ϵ, τ を小さくすれば，追従誤差をいくらかでも低減できる。なお，対応する制御器は 2 自由度系の一般化プラントの状態空間実現と式 (6.26) を用いて

$$G_{22} = \begin{bmatrix} 0 \\ C \end{bmatrix} (sI - A)^{-1} B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} (s+2)^{-1} \cdot 1 = \begin{bmatrix} 0 \\ P_u \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$K(s) = \frac{Q}{1 + QG_{22}} = \frac{[Q_F \quad Q_B]}{1 + Q_B P_u} = \frac{\tau s + 1}{\tau s} \begin{bmatrix} s+2 & \\ & -\frac{s+2}{2(\tau s + 1)} \end{bmatrix}$$

のように計算できる。明らかに， τ を小さくすると $K(s)$ の低周波ゲインが上昇する。一方， ϵ は $K(s)$ の低周波ゲインに影響を与えない。 □

練習問題

[†] このような拘束の詳細については 7.2 節と 7.4 節を参照。

- 6.1 安定な制御対象 $P = 1/(s+2)$ が与えられたとき、その出力をステップ状の目標値 $r(t) = 1$ ($t \geq 0$) に偏差なく漸近追従できるように制御器を設計したい。制御器のパラメータ化公式を用いて 1 次の制御器 $K(s)$ を求めよ。
- 6.2 前問においてステップ状の目標値追従のほか、さらにランプ状の目標値 $r(t) = t$ ($t \geq 0$) に対する追従偏差が $|e(\infty)| \leq 0.05$ となるように制御器を設計したい。そこで、自由パラメータを $Q(s) = P^{-1}/(\epsilon s + 1)$ とする。この二つの条件を満たす $\epsilon > 0$ および対応する制御器 $K(s)$ を求めよ。
- 6.3 安定化制御器の公式を用いて、安定制御対象 $P(s) = 1/(s+2)$ の出力 $y(t)$ がランプ状の目標値 $r(t) = t$ ($t \geq 0$) に漸近追従できるように制御器を設計せよ。ただし、 $Q = (as + b)/(s + 1)$ とする。
- 6.4 プラント $P(s) = 5/(s + 5)$ の入力 $u(t)$ であり、出力 $y(t)$ である。その安定化制御器

$$K(s) = \frac{Q}{1 - PQ}, \quad Q(s) = \frac{s + 5}{5(as + b)}, \quad a, b > 0$$

で出力 $y(t)$ を単位ステップ状の目標値 $r(t) = 1(t)$ に漸近追従させたい。追従誤差は $e = r - y$ である。また、システムの接続関係を $\hat{u}(s) = K(s)\hat{e}(s)$ とする。

- (a) 閉ループ系のブロック線図を描け。
- (b) 自由パラメータ $Q(s)$ を用いて追従誤差のラプラス変換 $\hat{e}(s)$ を表せ。
- (c) 漸近追従 $e(\infty) = 0$ となるために (a, b) が満たすべき条件を導け。
- (d) さらに、 $\|e\|_2 \leq 0.1$ となるために (a, b) が満たすべき条件を導け。
- (e) 上記の条件 (c), (d) をすべて満足する (a, b) から一組を選び、対応する制御器 $K(s)$ を計算せよ。
- 6.5 図 6.9 に示す 1 入出力閉ループ系は IMC (内部モデル制御) と呼ばれるもので、プロセス制御系に広く用いられている。 $P(s)$ は実プラントを表し、 $P_0(s)$ はそのモデルを表し、共に厳密にプロパーである。 $Q(s)$ は制御用のパラメータで、安定伝達関数である。また、追従誤差を $e = r - y$ とする。
- (a) $P(s) = P_0(s)$ で、かつ安定であるとき、任意の $Q(s)$ に対して閉ループ系が安定であることを示せ。
- (b) $P(s) = P_0(s)$ で、安定かつ最小位相 (つまり零点が安定) であるとき、任意の目標値 r に対する追従性能を向上させるための方策を検討せよ。
- (c) $P(s)$ と $P_0(s)$ に共通の不安定極 p をもつとき、閉ループ系が安定化できるかについて吟味せよ。
- 6.6 図 6.6 の (1 入出力) 制御系にステップ状の外乱 $d(t) = 1(t)$ が印加されるとする。また、制御対象 $P(s)$ は原点に零点をもたない。
- (a) この外乱に対する出力応答が $y(\infty) = 0$ となるように、安定化制御器の公式を用いて制御器 $K(s)$ を設計せよ。ただし、自由パラメータは定数 $Q(s) = q$ に限定して考えるとする。

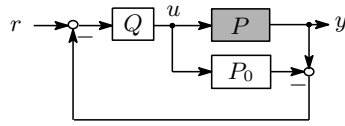


図 6.9 IMC 制御構成

(b) $P(s) = 1/(s + 2)$ のとき，上述の仕様を満足する制御器 $K(s)$ を与えよ．

6.7 図 6.6 の制御系において，プラント P と外乱 d は

$$P(s) = \frac{1}{s+1}, \quad \hat{d}(s) = \frac{1}{s}\hat{w}(s), \quad \|w\|_2 \leq 1$$

で与えられる．外乱 d の影響を抑えるために， w から y までの閉ループ伝達関数 $H_{yw}(s)$ が $\|H_{yw}\|_\infty < 1$ を満たすようにしたい．このことは次の制御器

$$K(s) = \frac{Q}{1-PQ}, \quad Q(s) = \frac{s+1}{as+b}, \quad a > 0, b > 0$$

で実現できるかを調べよ．実現できる場合， a, b に関する条件を与えよ．

6.8 定理 6.2 の命題 (1) を示した上， $N(s), \tilde{N}(s)$ の零点は $G_{22}(s)$ の零点に，そして $D(s), \tilde{D}(s)$ の零点は $G_{22}(s)$ の極に一致することを証明せよ．

7

フィードバック制御の限界*

制御工学の根本的原理はフィードバックであり，これによってはじめて外乱の影響を抑え込んだり，目標値追従の誤差を低減したりすることができる．しかし，フィードバックは万能ではない．すなわち，フィードバック制御によって過渡応答をいくらでもよくすることができるわけではない．フィードバックという特殊な構造がゆえに，構成されるシステムに超えられない限界が生じている．線形システムの場合，それは主に制御対象および制御器の不安定な極と零点によるものとして現れる．本章の目的は，このような限界を定量的に解析し，それを明らかにすることによってシステム設計時の性能評価に指針を与えることである．

フィードバック制御による性能限界がどのように生じたかについて定性的に知るために，まず以下の例を見てみよう．一入出力系の目標値追従問題を考える．制御対象 P と制御器 K を分子多項式と分母多項式の比に既約分解しておく．

$$P(s) = \frac{N_P}{M_P}, \quad K(s) = \frac{N_K}{M_K} \quad (7.1)$$

このとき，目標値 $r(t)$ から出力 $y_P(t)$ までの閉ループ伝達関数は

$$T(s) = \frac{PK}{1 + PK} = \frac{N_P N_K}{M_P M_K + N_P N_K} \quad (7.2)$$

で与えられる．この伝達関数は相補感度関数 (complementary sensitivity) と呼ばれる．内部安定性のために $P(s)$ と $K(s)$ の間に不安定な極零相殺があってはならない．このため， $P(s)$ と $K(s)$ の不安定零点はそのまま $T(s)$ の零点となる． $T(s)$ の零点がステップ状目標値追従制御で行き過ぎ量を増幅させたり，逆振れを引き起こしたりすることはすでに4章で示した通りである．さらに， $P(s)$ の不安定極を $K(s)$ の零点で相殺できないことから，許容し得る制御器の範囲に制限が加わり，これも過渡応答に悪い影響を与えるはずである．この例から分か

るように、フィードバック制御の最大の特徴は、システムの極を移動できるが、不安定零点を移動できないことである（安定零点は閉ループ極で相殺できる）。

以下の節では、フィードバック制御系の性能限界について定量的に解析を行う。ただし記述を簡単化するために、ここでは一入出力系に関する結果だけを述べる。そして、フィードバック系の性能限界の本質は一入出力系にもっとも顕著に現れている。多入出力系の場合、性能限界に新たに制御対象の零点ベクトルや目標値入力ベクトルが関わってくる。詳細については章末の参考文献を参照されたい。

7.1 予 備 知 識

本節では、性能限界解析に必要な予備知識を述べておく。

7.1.1 Poissonの積分公式

複素関数論では、ある領域において微分可能な関数 $F(s)$ はその領域で解析的であるという。複素平面上のある閉曲線 $\partial\Omega$ 上およびその内部 Ω で解析的な関数に対して、Cauchyの積分定理⁷⁾

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_{\partial\Omega} F(s) ds = 0 \quad (7.3)$$

が成り立つ。さらに、次のCauchyの積分公式

$$F(s_0) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\partial\Omega} \frac{F(s)}{s - s_0} ds, \quad s_0 \in \Omega \quad (7.4)$$

も成立する。ただし、積分経路 $\partial\Omega$ の方向については反時計回りを正とする。これを用いて次のPoissonの積分公式を示せる。

補題 7.1 開右半面上で有理関数 $F(s)$ が解析的で、かつ $|F(s)|$ が有界であると仮定する。このとき、開右半面の任意の点 $s_0 = x_0 + jy_0$ ($x_0 > 0$) において次式が成り立つ。

$$F(s_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) \frac{x_0}{x_0^2 + (\omega - y_0)^2} d\omega \quad (7.5)$$

証明 仮定より $F(s)(\bar{s}_0 + s_0)/(s + \bar{s}_0)$ も開右半面で解析的となる。 $\partial\Omega$ を直線 $\text{Re}(s) = \epsilon$ ($\epsilon > 0$) と右半面上の半径無限大の円弧からなる閉曲線とする。Cauchyの積分公式を使えば、

$$F(s_0) = F(s_0) \frac{\bar{s}_0 + s_0}{s_0 + \bar{s}_0} = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\partial\Omega} F(s) \frac{\bar{s}_0 + s_0}{(s - s_0)(s + \bar{s}_0)} ds = I_1 + I_2$$

を得る。ただし、 I_1 は直線 $\text{Re}(s) = \epsilon$ に沿う積分で

$$I_1 = \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{\infty} F(\epsilon + j\omega) \frac{\bar{s}_0 + s_0}{(\epsilon + j\omega - s_0)(\epsilon + j\omega + \bar{s}_0)} d(j\omega)$$

$$\rightarrow \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) \frac{x_0}{x_0^2 + (\omega - y_0)^2} d\omega \quad (\epsilon \rightarrow 0 \text{ のとき})$$

である．また， I_2 は半径 $R (R \rightarrow \infty)$ の右半面上の円弧 $s = Re^{j\theta}$ に沿う積分

$$I_2 = \frac{1}{\pi} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-\arccos(\epsilon/R)}^{\arccos(\epsilon/R)} F(Re^{j\theta}) \frac{x_0}{(Re^{j\theta} - s_0)(Re^{j\theta} + \bar{s}_0)} Re^{j\theta} d\theta$$

である． $|F(Re^{j\theta})|$ が有界なので， I_2 の積分関数は $R \rightarrow \infty$ のとき 0 に収束する．積分区間が $(-\pi/2, \pi/2)$ で有界であることに注意すれば， $I_2 = 0$ となることが分かる．よって，結論が得られた．

この補題は，安定伝達関数の右半面内の点 s_0 における値がその周波数応答および点 s_0 によって一意に決まることを示している．

7.1.2 全域通過伝達関数と最小位相伝達関数

$$|A(j\omega)| = 1, \quad \forall \omega \tag{7.6}$$

を満たす安定な伝達関数 $A(s)$ を全域通過伝達関数 (all-pass transfer function) という．例えば，

$$1, \frac{1-s}{1+s}, \frac{\bar{\lambda}-s}{\lambda+s} (\operatorname{Re}(\lambda) > 0), \frac{s^2-2s+5}{s^2+2s+5} = \frac{(1-j2-s)(1+j2-s)}{(1+j2+s)(1-j2+s)}$$

はすべて全域通過伝達関数である．全域通過伝達関数の特徴は，その極と零点が虚軸を境に対称に配置していることである．物理的には，全域通過伝達関数は入力信号のゲインを変えずに位相だけを遅らせる要素である．

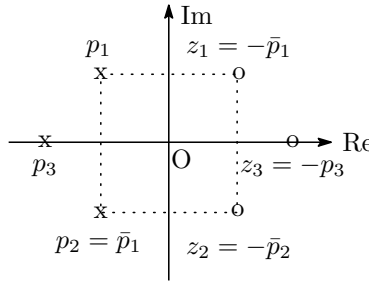


図 7.1 全域通過関数の極零点の配置

安定伝達関数 $H(s)$ に対して，全域通過伝達関数の性質 (7.6) より明らかに

$$\|AH\|_{\infty} = \|H\|_{\infty} \tag{7.7}$$

が成り立つ．すなわち， \mathcal{H}_{∞} ノルムは全域通過伝達関数に対して不変である．

一方，開右半面に零点をもたない安定な伝達関数は最小位相伝達関数 (minimum phase transfer function) と呼ばれる．例えば，

$$\frac{1}{s+1}, \frac{s}{s+1}, \frac{s+1}{s^2+2s+6}, \frac{s^2+2s+6}{(s+2)^2}$$

はそうである．最小位相と呼ばれる理由は，同じゲインを有するほかの安定伝達関数に比べ，最小位相伝達関数の位相遅れが一番小さいからである．例えば， $s/(s+2)$ と $s(1-s)/(s+2)(s+1)$ の位相を比べればこのことが分かる．これに対して，開右半面に零点をもつ伝達関数は非最小位相伝達関数 (nonminimum phase transfer function) と呼ばれる．

任意の安定有理伝達関数 $P(s)$ は必ず全域通過関数 $A(s)$ と最小位相の伝達関数 $P_m(s)$ の積に分解できる．例えば， $1 \pm j2$ に零点をもつ伝達関数 $P(s) = (s^2 - 2s + 5)/(s+1)(s^2 + 4s + 6)$ は次のように書ける．

$$P(s) = \frac{1-j2-s}{1+j2+s} \times \frac{1+j2-s}{1-j2+s} \times \frac{s^2+2s+5}{(s+1)(s^2+4s+6)}$$

7.1.3 信号の 2 ノルムと内積

4章では，2乗可積の信号 $u(t)$ について，時間域においてその 2 ノルムを

$$\|u\|_2 = \sqrt{\int_0^\infty u(t)^2 dt} \tag{7.8}$$

と定義した．一方，周波数域において $\hat{u}(s) = \mathcal{L}[u(t)]$ の 2 ノルムは

$$\|\hat{u}\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \hat{u}^*(j\omega)\hat{u}(j\omega) d\omega} \tag{7.9}$$

と定義される．Parseval の定理によれば，次の恒等式が成り立つ．

$$\|\hat{u}\|_2 = \|u\|_2 \tag{7.10}$$

次に，2乗可積の関数 $\hat{f}(s), \hat{g}(s)$ の内積は

$$\langle \hat{f}, \hat{g} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \hat{f}^*(j\omega)\hat{g}(j\omega) d\omega \tag{7.11}$$

で与えられる．このように定義された内積は次の性質を有する．その証明は上述の内積定義に従って簡単に行える (練習問題 7.3) ．

補題 7.2 $\hat{f}(s), \hat{g}(s)$ が 2 乗可積であるとき，以下の命題は成立する．

- (1) $a, b \in \mathbf{C}$ とすると， $\langle a\hat{f}, b\hat{g} \rangle = \bar{a}b\langle \hat{f}, \hat{g} \rangle$
- (2) $\langle \hat{f}, \hat{f} \rangle = \|\hat{f}\|_2^2$
- (3) $H(s)$ が虚軸上に極をもたないとき， $\langle H^*\hat{f}, \hat{g} \rangle = \langle \hat{f}, H\hat{g} \rangle$
- (4) $|A(j\omega)| = 1 (\forall\omega)$ のとき， $\|A\hat{f}\|_2 = \|\hat{f}\|_2$

命題(4)は2ノルムの全域通過関数に対する不変性を示すものである。この性質は後の証明に頻繁に用いられる。

7.1.4 2ノルムと内積の計算

$\hat{f}(s), \hat{g}(s)$ が共に厳密にプロパーな実有理関数で、純虚数の極をもたないと仮定する。このとき、 $\lim_{R \rightarrow \infty} R \cdot \hat{f}(-Re^{j\theta})\hat{g}(Re^{j\theta}) = 0$ となる。よって、半径無限大の半円に沿う積分 $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \hat{f}(-Re^{j\theta})\hat{g}(Re^{j\theta})d(Re^{j\theta})$ も零となる。このことから

$$\langle \hat{f}, \hat{g} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}^*(j\omega)\hat{g}(j\omega)d\omega = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\partial\Omega} \hat{f}(-s)\hat{g}(s)ds \quad (7.12)$$

が成り立つ。ただし最後の周回積分は、虚軸と左半面上における半径無限大の半円に沿うものである。留数定理により、内積 $\langle \hat{f}, \hat{g} \rangle$ は $\hat{f}(-s)\hat{g}(s)$ の左半面極における留数の総和に等しい。すなわち、 s_i を $\hat{f}(-s)\hat{g}(s)$ の任意の左半面極とすると

$$\langle \hat{f}, \hat{g} \rangle = \sum_i \operatorname{Res}_{\operatorname{Re}(s_i) < 0} \hat{f}(-s)\hat{g}(s) \quad (7.13)$$

が成り立つ。したがって、内積の計算は留数の計算に帰着できる。

そして、安定な $\hat{g}(s)$ についてその極が $\hat{g}(-s)\hat{g}(s)$ の左半面極と一致するので、 $\hat{f}(s) = \hat{g}(s)$ とおけば安定な $\hat{g}(s)$ に関する2ノルム $\|g\|_2 = \|\hat{g}\|_2$ は次のように留数で計算できる。ただし、 s_i は $\hat{g}(s)$ の極を表す。

$$\|g\|_2 = \|\hat{g}\|_2 = \sqrt{\sum_i \operatorname{Res}_{s_i} \hat{g}(-s)\hat{g}(s)} \quad (7.14)$$

【例題7.1】 安定伝達関数 $G(s) = 1/(s+1)$ の入力を $u(t)$ 、出力を $y(t)$ とする。

- (1) 単位インパルス応答 $g(t)$ の2ノルムを計算せよ。
- (2) $u(t) = e^{-5t}$ のとき、 $\|y\|_2$ を求めよ。

解答 (1) まず、 $G(-s)G(s) = 1/(1-s)(1+s)$ であり $G(s)$ が閉左半面上に一つの極 $p = -1$ をもつ。この極における留数は

$$\lim_{s \rightarrow -1} (s+1)G(-s)G(s) = \lim_{s \rightarrow -1} (s+1) \frac{1}{(1-s)(s+1)} = \lim_{s \rightarrow -1} \frac{1}{1-s} = \frac{1}{2}$$

であるので、 $\|g\|_2 = 1/\sqrt{2}$ となる。

(2) $\hat{u}(s) = 1/(s+5)$ なので、 $\hat{y}(s) = 1/(s+1)(s+5)$ となり、二つの極 $p = -1, -5$ をもつ。これらの極における $\hat{y}(-s)\hat{y}(s) = 1/(1-s)(5-s)(1+s)(5+s)$ の留数はそれぞれ

$$\lim_{s \rightarrow -1} (s+1)\hat{g}(-s)\hat{g}(s) = \frac{1}{48}, \quad \lim_{s \rightarrow -5} (s+5)\hat{g}(-s)\hat{g}(s) = -\frac{1}{240}$$

であり、よって $\|y\|_2 = 1/\sqrt{60}$ となる。

◇

次の補題は、安定伝達関数と純虚数極をもたない完全不安定な伝達関数が直交することを示す。

補題 7.3 $\hat{f}(s)$ を安定、 $\hat{g}(s)$ を純虚数極をもたない完全不安定な実有理伝達関数とし、共に厳密にプロパーとする。このとき、以下の関係が成立する。

$$\langle \hat{f}, \hat{g} \rangle = 0, \quad \|\hat{f} + \hat{g}\|_2^2 = \|\hat{f}\|_2^2 + \|\hat{g}\|_2^2$$

証明 \hat{f}, \hat{g} が厳密にプロパーで、かつ純虚数極をもたないので、内積は存在する。そして、 $\hat{f}(-s)\hat{g}(s)$ が左半面に極をもたないから (7.13) 式より $\langle \hat{f}, \hat{g} \rangle = 0$ となる。2 番目の式は Pythagoras の定理による (定理 A.3(3))。

さらに、次の補題に示す簡単な結果は後の証明に使われる (練習問題 7.4)。

補題 7.4 $\text{Re}(\lambda) > 0, \text{Re}(\eta) > 0$ とする。このとき、次の式が成り立つ。

$$\left\langle \frac{1}{\lambda-s}, \frac{1}{\eta-s} \right\rangle = \frac{1}{\lambda+\eta}, \quad \left\| \frac{1}{\lambda-s} \right\|_2^2 = \frac{1}{2\text{Re}(\lambda)} \quad (7.15)$$

7.2 実現可能な閉ループ伝達関数の限界

4章で述べたように、制御性能は閉ループ伝達関数のノルムで定量的に評価できる。制御の目的からなるべく閉ループ伝達関数のノルムを小さくしたい、もしくは閉ループ伝達関数をできるだけ望ましい伝達関数にしたい。しかし、実際に達成し得る閉ループ伝達関数に制約が付いている。本節では、安定化制御器のパラメータ化公式を用いてこれを示す。

7.2.1 補間条件

一般に、安定化制御器を用いると閉ループ伝達関数は

$$H(s) = N_{11}(s) + N_{12}(s)Q(s)N_{21}(s) \quad (7.16)$$

と書ける。ここでは、 $N_{12}(s)$ と $N_{21}(s)$ が不安定零点をもつ場合について調べる。以下の仮定をおく。

- $z(\text{Re}(z) \geq 0)$ が $N_{12}(s)$ の l 重零点である
- $p(\text{Re}(p) \geq 0)$ が $N_{21}(s)$ の r 重零点である

これらの条件は $N_{12}(s)$ に因子 $(s - z)^l$, $N_{21}(s)$ に因子 $(s - p)^r$ をもつことを意味し, 数学的に以下の式と等価である.

$$N_{12}^{(i)}(z) = 0, \quad i = 0, \dots, l - 1 \tag{7.17}$$

$$N_{21}^{(j)}(p) = 0, \quad j = 0, \dots, r - 1 \tag{7.18}$$

ここで, $X^{(i)}(z)$ は $d^i X(s)/ds^i|_{s=z}$ を表し, $X^{(0)}(s) = X(s)$ である.

このとき,

$$H(s) - N_{11}(s) = N_{12}(s)Q(s)N_{21}(s)$$

であり, $Q(s)$ が安定だから $N_{12}(s)$ と $N_{21}(s)$ の不安定零点をその極で相殺できない. よって $H(s) - N_{11}(s)$ に同様な零点をもってしまう. すると, $H(s)$ が

$$(H - N_{11})^{(i)}(z) = 0, \quad i = 0, \dots, l - 1 \tag{7.19}$$

$$(H - N_{11})^{(j)}(p) = 0, \quad j = 0, \dots, r - 1 \tag{7.20}$$

を満たさなければならない. これらは補間条件とも呼ばれ, 使用する制御器によらず満足すべき条件である. これらの制約条件がもつ物理的インパクトを次の項で感度関数を例に示す.

7.2.2 感度関数に対する解析

ここで制御対象 $P(s)$ について, 以下の仮定をおく.

仮定1 $z(\text{Re}(z) \geq 0)$ が $P(s)$ の l 重零点である

仮定2 $p(\text{Re}(p) \geq 0)$ が $P(s)$ の r 重極である

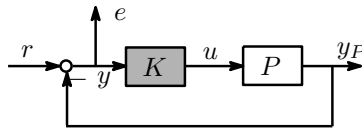


図 7.2 感度関数と目標値追従

感度関数 $S(s)$ は

$$S(s) = \frac{1}{1 + P(s)K(s)} \tag{7.21}$$

で定義される. これは図 7.2 の閉ループ系における目標値 r から追従誤差 $e = r - y_P$ までの伝達関数を表している. 以下, Youla のパラメータ化を用いて感度関数を展開していく. いまの場合, $G_{22} = -P$ であり

$$G_{22}(s) = -P(s) = N(s)D^{-1}(s) = \tilde{D}^{-1}(s)\tilde{N}(s) \tag{7.22}$$

のように既約分解できる．定理 6.2 で与えられた Youla のパラメータ化公式を代入すると， $S(s)$ は

$$\begin{aligned} S(s) &= \left[1 - \tilde{D}^{-1}(s)\tilde{N}(s)(Y - DQ)(X - NQ)^{-1} \right]^{-1} \\ &= (X - NQ) \left[\tilde{D}X - \tilde{N}Y - (\tilde{D}N - \tilde{N}D)Q \right]^{-1} \tilde{D} \end{aligned}$$

に変形できる．式 (7.22) より $\tilde{D}N = \tilde{N}D$ ，そして式 (6.39) の (2, 2) ブロックより $\tilde{D}X - \tilde{N}Y = -1$ が得られる．これらを上式に代入すると感度関数 $S(s)$ は

$$S(s) = -(X - NQ)\tilde{D} \tag{7.23}$$

と書けることが分かる．さらに，式 (6.39) 左辺二つの行列を入れ替えてもその積が単位行列であり，その (2, 2) ブロックから $N\tilde{Y} - X\tilde{D} = 1$ を得る．よって，式 (7.23) の感度関数 S に $-X\tilde{D} = 1 - N\tilde{Y}$ を代入すれば別表現

$$S(s) = 1 - N\tilde{Y} + NQ\tilde{D} = 1 + N(-\tilde{Y} + Q\tilde{D}) \tag{7.24}$$

が得られる．

$N(s)$ の零点が $P(s)$ の零点と一致し， $\tilde{D}(s)$ の零点が $P(s)$ の極と一致するので (6章の練習問題 6.8 より)，感度関数 $S(s)$ は補間条件

$$S(z) = 1, \quad S^{(i)}(z) = 0, \quad i = 1, \dots, l - 1 \tag{7.25}$$

$$S^{(j)}(p) = 0, \quad j = 0, \dots, r - 1 \tag{7.26}$$

を満たさなければならない．つまり，制御対象に不安定な極・零点がある場合，フィードバック制御で感度関数を設計者の望む通りに整形できるとは限らない．そのシステム性能にもたらす影響について次の例に示す．

■ 例 7.1 閉ループ系 $L(s) = P(s)K(s)$ の既約分解 $N(s)/M(s)$ を感度関数に代入すると

$$S(s) = \frac{1}{1 + L(s)} = \frac{M(s)}{M(s) + N(s)} \tag{7.27}$$

となる．これより， $L(s)$ の不安定極 $p_i (i = 1, \dots, k)$ は感度関数の零点となる．したがって， $S(s)$ は次のように最小位相伝達関数 $S_m(s)$ と全域通過伝達関数 $A(s)$ の積に分解できる．

$$S(s) = S_m(s)A(s), \quad A(s) = \prod_{i=1}^k \frac{p_i - s}{\bar{p}_i + s} \tag{7.28}$$

重み $W(s)$ 付きの感度関数を最小化する問題では， $\|SW\|_\infty$ は $W(s)$ をモデルとする目標値に対する誤差信号の大きさを表しており，小さくなることが望ましい．しかし $S(z) = 1$ であること， \mathcal{H}_∞ ノルムの全域通過関数に対する不変性ならびに最大値の原理[†]により，

[†] 閉右半面で解析的な関数の最大値は虚軸上でとる (文献⁷⁾，p.143)．

$$\begin{aligned}\|WS\|_\infty &= \|WS_m\|_\infty \geq |W(z)S_m(z)| \\ &= |W(z)S(z)A^{-1}(z)| = |W(z)A^{-1}(z)|\end{aligned}\quad (7.29)$$

$$= |W(z)| \prod_{i=1}^k \left| \frac{\bar{p}_i + z}{p_i - z} \right| \quad (7.30)$$

が成り立つ。零点 z に近い極 p_i がある場合、2 番目の因子が大きくなり、追従誤差は増幅される。さらに、 z が $W(s)$ の極に近い場合も、このノルムを小さくすることはできない。例えば、ステップ信号追従問題では、 $W(s) = 1/s$ であるが、 $|z| \ll 1$ ならば $\|SW\|_\infty > 1/|z| \gg 1$ となり、よい追従制御は実現できない。このことは、ステップ信号に漸近追従するために制御対象が原点零点をもつてはいけないという、よく知られている事実に呼応している。□

なお、追従制御に関するさらなる定量的な限界は後の節で解き明かされる。

7.3 積分条件

本節では、Bode の感度積分条件および位相公式について解説する。

7.3.1 Bode の感度積分条件

ここで、開ループ伝達関数を $L(s) = P(s)K(s)$ とおく。また、以下の仮定をおく。

仮定 3 開ループ系 (P, K) は内部安定であり、 $L(s)$ は開右半面極 $p_i (i = 1, \dots, k)$ をもつ。

前に説明したように、開ループ伝達関数 $L(s)$ の開右半面極はすべて感度関数 $S(s)$ の零点となる。よって、仮定 3 より $S(s)$ は開右半面極 $p_i (i = 1, \dots, k)$ を零点としてもつ。したがって、感度 $S(s)$ は (7.28) 式のように分解できる。ただし $S(s)$ の次数差が零だから、 $S_m(s)$ は $L(s)$ の虚軸極を除き、無限遠点を含む閉右半面に零点をもたない。このとき、関数 $F(s) := \ln S_m(s)$ は $L(s)$ の虚軸極を除く閉右半面で解析的になり、かつ有界となる。なぜなら、形式的には $d \ln S_m(s)/ds = S_m^{-1}(s) dS_m/ds$ であり、 $S_m^{-1}(s)$ は $L(s)$ の虚軸極を除く閉右半面で有界で、 $S_m(s)$ の安定性から dS_m/ds も閉右半面で存在するからである。すると、補題 7.1 によれば閉右半面上の任意点 $s_0 = x_0 + jy_0$ について

$$\ln S_m(s_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln S_m(j\omega) \frac{x_0}{x_0^2 + (\omega - y_0)^2} d\omega \quad (7.31)$$

が成り立つ。 $S_m(s)$ を極座標 $|S_m(s)|e^{j\angle S_m(s)}$ で書くと、 $\ln S_m(s) = \ln |S_m(s)| + j\angle S_m(s)$ になる。よって、 $|A(j\omega)| = 1$ に注意すれば $\ln |S(j\omega)| = \ln |S_m(j\omega)| = \operatorname{Re}(\ln S_m(j\omega))$ となることが分かる。上式両辺について実部をとると

$$\ln |S_m(s_0)| = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln |S(j\omega)| \frac{x_0}{x_0^2 + (\omega - y_0)^2} d\omega \quad (7.32)$$

が得られる[†]。これより、開ループ系不安定極の感度関数との関係を与える次の定理が導出できる。

定理 7.1 仮定 3 が成立ち、かつ $L(s)$ が 2 以上の次数差をもつとき、次の Bode の感度積分条件が成り立つ。

$$\int_0^{\infty} \ln |S(j\omega)| d\omega = \pi \sum_{i=1}^k \operatorname{Re}(p_i) \geq 0 \quad (7.33)$$

証明 式 (7.32) で $y_0 = 0$ とおき、その両辺に x_0 をかけ、極限をとると

$$\lim_{x_0 \rightarrow \infty} x_0 \ln |S_m(x_0)| = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln |S(j\omega)| d\omega = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \ln |S(j\omega)| d\omega \quad (7.34)$$

となる。以下、

$$\lim_{x_0 \rightarrow \infty} x_0 \ln S(x_0) = 0 \quad (7.35)$$

を先に示す。まず、 $x_0 \rightarrow \infty$ のとき、次数差の仮定より $L(x_0) \rightarrow c/x_0^k$ 、 $S(x_0) \rightarrow 1$ がいえる。ただし、 c は定数で、 $k \geq 2$ である。ゆえに、 $x_0^2 dL(x_0)/dx_0 \rightarrow -kc/x_0^{k-1} \rightarrow 0$ となる。そして、 $dS(x_0)/dx_0 = -S^2(x_0)dL(x_0)/dx_0$ に注意し、ド・ロピタルの定理を用いれば

$$\begin{aligned} \lim_{x_0 \rightarrow \infty} x_0 \ln S(x_0) &= \lim_{x_0 \rightarrow \infty} \frac{\ln S(x_0)}{1/x_0} = \lim_{x_0 \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{S(x_0)} \frac{dS(x_0)}{dx_0}}{-1/x_0^2} \\ &= \lim_{x_0 \rightarrow \infty} S(x_0) x_0^2 \frac{dL(x_0)}{dx_0} = \lim_{x_0 \rightarrow \infty} S(x_0) \lim_{x_0 \rightarrow \infty} x_0^2 \frac{dL(x_0)}{dx_0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

となることが分かる。よって、(7.35) 式から実部を取り出すと $\lim_{x_0 \rightarrow \infty} x_0 \ln |S(x_0)| = 0$ が成立する。また、 $\ln |S(x_0)| = \ln |S_m(x_0)| + \ln |A(x_0)|$ であるので、

$$\begin{aligned} \lim_{x_0 \rightarrow \infty} x_0 \ln |S_m(x_0)| &= - \lim_{x_0 \rightarrow \infty} x_0 \ln |A(x_0)| \\ &= - \sum_{i=1}^k \lim_{x_0 \rightarrow \infty} x_0 \ln \left| \frac{p_i - x_0}{\bar{p}_i + x_0} \right| \end{aligned}$$

が成り立つ。したがって、 $\lim_{x_0 \rightarrow \infty} x_0 \ln \left| \frac{p_i - x_0}{\bar{p}_i + x_0} \right| = -2\operatorname{Re}(p_i)$ を示せば十分である。これは再びド・ロピタルの定理を用いるか、もしくは次式よりいえる。

$$\begin{aligned} x_0 \ln \frac{x_0 - p_i}{x_0 + \bar{p}_i} &= x_0 \ln \frac{1 - p_i/x_0}{1 + \bar{p}_i/x_0} = x_0 [\ln(1 - p_i/x_0) - \ln(1 + \bar{p}_i/x_0)] \\ &= -x_0 \left[\left(\frac{p_i}{x_0} + \frac{1}{2} \left(\frac{p_i}{x_0} \right)^2 + \dots \right) - \left(-\frac{\bar{p}_i}{x_0} + \frac{1}{2} \left(\frac{\bar{p}_i}{x_0} \right)^2 - \dots \right) \right] \\ &= -x_0 \left[\frac{p_i + \bar{p}_i}{x_0} + \frac{1}{2} \frac{p_i^2 - \bar{p}_i^2}{x_0^2} + \dots \right] = -2\operatorname{Re}(p_i) + \frac{1}{2} \frac{p_i^2 - \bar{p}_i^2}{x_0} + \dots \end{aligned}$$

[†] $|A(s_0)| \neq 1$ なので、左辺は $\ln |S(s_0)|$ とならない。

$$\rightarrow -2\text{Re}(p_i) \text{ as } x_0 \rightarrow \infty \quad (7.36)$$

ただし，式変形に Taylor 展開 $\ln(1-x) = -\sum_{i=1}^{\infty} x^i/i$ を使った．

$|S(j\omega)| < 1$ ならば $\ln|S(j\omega)| < 0$ ，そして $|S(j\omega)| > 1$ ならば $\ln|S(j\omega)| > 0$ に注意すれば，定理 7.1 は，ある周波数帯域で感度関数を 1 未満にすると，感度関数が 1 を越える別の周波数帯域が必ず存在することを示している．しかも，開ループ伝達関数が不安定極をもつとき，1 を越える帯域の面積は 1 未満の帯域の面積よりも大きい．この現象はウォーターベッド効果と呼ばれている．つまり，全周波数帯域において感度関数を一様に小さくすることが不可能である．

■ 例 7.2 一例として，図 7.3 は開ループ伝達関数

$$L(s) = -\frac{4(s-2)}{s(s+2)(s+10)}$$

に関する感度関数のゲインを示している．この図から明らかなようにウォーターベッド効果が現れている．

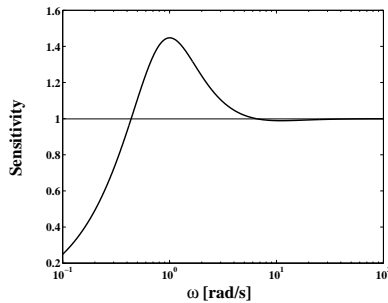


図 7.3 ウォーターベッド効果

□

幸いなことに，実際の制御問題において感度関数は目標値追従性能を表す伝達関数で，目標値はステップ信号のような高周波成分をあまりもたないものが多い．したがって，低周波域で低いゲインをもてば十分に追従誤差を低減でき，それ以外の帯域に少々大きいゲインをもったとしても問題にはならない．

さらに，開ループ伝達関数の次数差が 1 である場合，感度関数と開ループ不安定極の関係は

$$\int_0^{\infty} \ln|S(j\omega)|d\omega = \pi \sum_{i=1}^k \text{Re}(p_i) - \frac{\pi}{2} \lim_{s \rightarrow \infty} sL(s) \quad (7.37)$$

となることも知られている⁴⁾．

7.3.2 開ループ系不安定極と感度限界の関係

以下では、上で導かれた積分条件を用いて、バンド幅仕様と右半面の極が感度にもたらす影響を解析する。

ここで、感度に関する仕様として帯域 $[-\omega_L, \omega_L]$ において感度を小さくしたい、すなわち、

$$|S(j\omega)| \leq \epsilon < 1, \quad \forall \omega \in [-\omega_L, \omega_L] \quad (7.38)$$

を満足する制御系を設計したいとする。ただし、 $\epsilon > 0$ である。

次に、モデル化しなかった高周波数域の動特性の影響や雑音の影響を抑えるために、開ループ系の高周波数ゲインを十分に減衰させる必要がある。典型的にはある周波数 ω_H 以上でゲインを十分に小さくし、かつゲインの傾きを $-40[\text{dB}/\text{dec}]$ 以上にすることが求められる。これは

$$|L(j\omega)| \leq \frac{h}{\omega^{1+k}} \leq \delta < 1, \quad \forall \omega \in [\omega_H, \infty) \quad (7.39)$$

で定量化できる。ただし、 $\omega_H > \omega_L$ 、 $h > 0$ で、 k は1以上の整数である。このとき、帯域 $[\omega_L, \omega_H]$ において感度の増加が避けられないことを次の系が示す。

系7.1 仮定3が成り立つとし、 $\omega_H > \omega_L$ を満たすある ω_H と ω_L に対し、条件(7.38)および(7.39)が成り立つとする。このとき、

$$\max_{\omega \in [\omega_L, \omega_H]} |S(j\omega)| \geq e^\alpha \left(\frac{1}{\epsilon} \right)^{\frac{\omega_L - \omega_L}{\omega_H - \omega_L}} (1 - \delta)^{\frac{\omega_H}{k(\omega_H - \omega_L)}}$$

が成り立つ。ただし

$$\alpha = \pi \sum_{i=1}^k \text{Re}(p_i) / (\omega_H - \omega_L)$$

である。

証明 条件(7.39)より、次数差が2以上の仮定は自動的に満たされ、定理7.1は適用できる。次に、 $\omega \geq \omega_H$ に対し

$$|S(j\omega)| \leq \frac{1}{1 - |L(j\omega)|} \leq \frac{1}{1 - \frac{h}{\omega^{1+k}}}$$

が成り立つ。 $\ln(1 - x) = -\sum_{i=1}^{\infty} x^i / i$ を用いて計算すると

$$\begin{aligned} \int_{\omega_H}^{\infty} \ln |S(j\omega)| d\omega &\leq -\int_{\omega_H}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{h}{\omega^{1+k}} \right) d\omega = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{\omega_H}^{\infty} \frac{1}{i} \left(\frac{h}{\omega^{1+k}} \right)^i d\omega \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \frac{\omega_H}{i(1+k) - 1} \left(\frac{h}{\omega_H^{1+k}} \right)^i \\ &\leq \frac{\omega_H}{k} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \left(\frac{h}{\omega_H^{1+k}} \right)^i = -\frac{\omega_H}{k} \ln \left(1 - \frac{h}{\omega_H^{1+k}} \right) \\ &\leq -\frac{\omega_H}{k} \ln(1 - \delta) \end{aligned}$$

が得られる．すると，

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \ln |S(j\omega)| d\omega \\ &= \int_0^{\omega_L} \ln |S(j\omega)| d\omega + \int_{\omega_L}^{\omega_H} \ln |S(j\omega)| d\omega + \int_{\omega_H}^\infty \ln |S(j\omega)| d\omega \\ &\leq \omega_L \ln \epsilon + (\omega_H - \omega_L) \max_{\omega \in [\omega_L, \omega_H]} \ln |S(j\omega)| - \frac{\omega_H}{k} \ln(1 - \delta) \end{aligned} \quad (7.40)$$

となる．上式に(7.33)式を代入し， $y \ln x = \ln x^y$ と $\max \ln |S(j\omega)| = \ln \max |S(j\omega)|$ に基づく式変形を行えば結果が得られる．

7.3.3 Bode の位相公式

古典制御において，最小位相の開ループ系に対するBodeの位相公式は，開ループ伝達関数整形に基づく古典制御設計法に重要な役割を果たしてきた．次に説明する定理はBodeの位相公式を多少拡張したバージョンである．

定理 7.2 開ループ伝達関数 $L(s)$ が開右半面に極と零点をもたず，かつ $L(j0) > 0$ であるとき， $L(s)$ の虚軸極・零点と異なる $j\omega_0$ ($\omega_0 > 0$) に対して次の関係式が成り立つ．

$$\angle L(j\omega_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{d \ln |L|}{d\nu} \ln \coth \frac{|\nu|}{2} d\nu \quad (7.41)$$

ただし， $\nu := \ln(\omega/\omega_0)$ であり， $|L|$ は $|L(j\omega_0 e^\nu)|$ の省略形である．

証明 まず，中心 $(0, j\omega)$ 半径 r の円の右半分 C_r (図7.4の C_1, C_2 を参照) に沿う次の積分を考える ($\omega \neq \omega_0$) ．

$$\int_{C_r} \frac{\ln(s - j\omega)}{s^2 + \omega_0^2} ds = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{j r (\ln r + j\theta) e^{j\theta}}{(j\omega + r e^{j\theta})^2 + \omega_0^2} d\theta$$

$r \rightarrow 0$ のとき $r \ln r \rightarrow 0$ であることに注意すれば

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_r} \frac{\ln(s - j\omega)}{s^2 + \omega_0^2} ds = 0$$

が分かる． $L(s)$ の虚軸極・零点は $\ln L(s)$ の特異点となるが，上式から分かるようにこれらの特異点は虚軸に沿う $\ln L(s)/(s^2 + \omega_0^2)$ の積分に影響はない．また，仮定より $\ln L(s)$ が開右半面で解析的である．

すると， $\partial\Omega$ を図7.4に示す閉曲線とするととき，Cauchyの積分公式より

$$\oint_{\partial\Omega} \frac{\ln L(s)}{s^2 + \omega_0^2} ds = 0 \quad (7.42)$$

が成り立つ．この積分において，半径無限大の半円に沿う部分は積分関数が零であるため零となる．よって，

$$0 = \int_{-j\infty}^{-j(\omega_0+r)} + \int_{C_1} + \int_{-j(\omega_0-r)}^{j(\omega_0-r)} + \int_{C_2} + \int_{j(\omega_0+r)}^{j\infty}$$

となる．半円 C_1 上では $s = -j\omega_0 + r e^{j\theta}$ ($\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$) であり，これを代入すると $r \rightarrow 0$ のとき

$$\int_{C_1} \frac{\ln L(s)}{s^2 + \omega_0^2} ds = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\ln L(-j\omega_0 + re^{j\theta})}{re^{j\theta} - j2\omega_0} j d\theta \rightarrow -\frac{\pi}{2\omega_0} \ln L(-j\omega_0)$$

が得られる．同様に， $r \rightarrow 0$ のとき

$$\int_{C_2} \frac{\ln L(s)}{s^2 + \omega_0^2} ds \rightarrow \frac{\pi}{2\omega_0} \ln L(j\omega_0)$$

である．よって， $r \rightarrow 0$ の極限をとることによって

$$0 = j \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln L(j\omega)}{\omega_0^2 - \omega^2} d\omega + \frac{\pi}{2\omega_0} \ln \frac{L(j\omega_0)}{L(-j\omega_0)} \quad (7.43)$$

を得る． $L(s)$ が実有理関数であることと仮定 $L(j0) > 0$ より， $|L(j\omega_0)| = |L(-j\omega_0)|$ ， $\angle L(-j\omega_0) = -\angle L(j\omega_0)$ が成り立つ．したがって，上式右辺第2項は $j\frac{\pi}{\omega_0} \angle L(j\omega_0)$ となる．両辺の虚部を比較することによって式

$$\angle L(j\omega_0) = \frac{\omega_0}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln |L(j\omega)|}{\omega^2 - \omega_0^2} d\omega = \frac{2\omega_0}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\ln |L(j\omega)|}{\omega^2 - \omega_0^2} d\omega \quad (7.44)$$

を得る(右辺の積分関数が ω_0 で発散するが，積分自体は有界である)．

以下，上式右辺を所望の形式に変形する．まず，直接計算で

$$\frac{d}{d\nu} \left(\ln \coth \frac{|\nu|}{2} \right) = -\frac{1}{\sinh \nu} \quad (7.45)$$

を確かめられる．そして， $\nu = \ln(\omega/\omega_0)$ の変数変換を行うとき，積分区間は $[0, \infty)$ から $(-\infty, \infty)$ に変わる．さらに， $\omega/\omega_0 = e^\nu$ ， $d\nu = d\omega/\omega$ などを使うと式(7.44)の右辺は

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\ln |L(j\omega)|}{\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega} \frac{d\omega}{\omega} = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln |L|}{e^\nu - e^{-\nu}} d\nu \\ & = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln |L|}{\sinh \nu} d\nu \\ & = -\frac{1}{\pi} \left[\ln |L| \ln \coth \frac{|\nu|}{2} \right]_{-\infty}^{\infty} + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d \ln |L|}{d\nu} \ln \coth \frac{|\nu|}{2} d\nu \quad (7.46) \end{aligned}$$

に帰着される． $|L(j\omega_0 e^\nu)|$ は ν の偶関数ではないから，右辺第1項が零となることは簡単にいえないが，以下の手順で示せる．

1. $\coth \frac{|\nu|}{2} = \left| \frac{\omega + \omega_0}{\omega - \omega_0} \right|$ が示せる．すると上式第1項は $-\frac{1}{\pi} \left[\ln |L(j\omega)| \ln \left| \frac{\omega + \omega_0}{\omega - \omega_0} \right| \right]_0^{\infty}$ となる．
2. $\omega \rightarrow \infty$ ， 0 のとき，いずれも $\ln \left| \frac{\omega + \omega_0}{\omega - \omega_0} \right| \rightarrow 0$ となる．よって， $\ln |L(j\infty)|$ あるいは $\ln |L(j0)|$ が有界ならば対応する項は零となる．
3. $d \ln |L(j\omega)| / d \ln \omega$ がBodeゲイン線図の傾きで， $\omega \rightarrow 0, \infty$ のとき有界であることに注目する． $\ln |L(j\omega)|$ が $\omega \rightarrow 0, \infty$ で発散する場合， $\ln |L(j\omega)| \ln \frac{\omega + \omega_0}{\omega - \omega_0} = \ln |L(j\omega)| / (1 / \ln \frac{\omega + \omega_0}{\omega - \omega_0})$ に対してド・ロピタルの定理を用いると，その極限は0となることが示せる．

以上によって結論が得られた．

この定理は非プロパーの伝達関数 $L(s)$ に対しても成立することに注意されたい．

関数 $\ln \coth \frac{|\nu|}{2}$ のグラフを図7.5に示す．この関数の面積は $\pi^2/2$ である．図

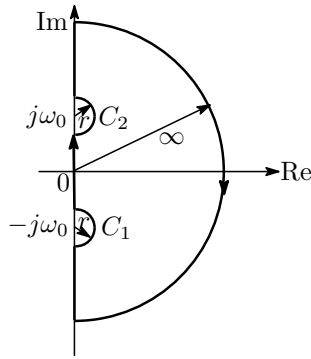


図 7.4 積分経路

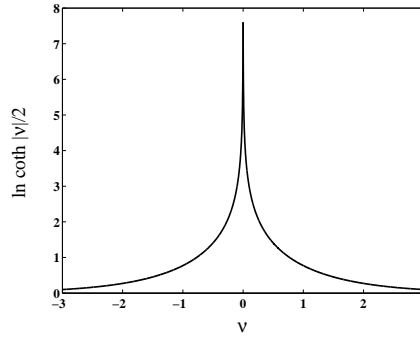


図 7.5 関数 $\ln \coth \frac{|\nu|}{2}$ のグラフ

7.5から分かるように，関数 $\ln \coth \frac{|\nu|}{2}$ は $\nu = 1 \Leftrightarrow \omega = \omega_0$ の付近から急激に減衰しており，その面積は $\nu \in (-2.5, 2.5) \Leftrightarrow \omega \in (\omega_0/2, 5\omega_0)$ の区間の間にある面積で十分よく近似できる． ω_0 を交差周波数 $\omega_c (|L(j\omega_c)| = 1$ となる周波数) として考える．その前後の 1[dec] の周波数帯において開ループゲインが一定の傾きをもつ，つまり， $\omega \in (0.5\omega_0, 5\omega_0)$ に対して $d \ln |L|/d\nu = d \ln |L(j\omega)|/d \ln \omega = -k(-20k[\text{dB}/\text{dec}]$ に相当)である場合，定理 7.2から

$$\angle L(j\omega_c) \approx -\frac{\pi}{2}k \tag{7.47}$$

が成り立つことが分かる． $\text{PM} = \pi + \angle L(j\omega_c)$ はフィードバック系の位相余裕であるから， ω_c における位相角について調べる．ここで

$$\angle L(j\omega_c) \approx \begin{cases} -90^\circ, & k = 1 \\ -180^\circ, & k = 2 \end{cases} \tag{7.48}$$

が成り立つので，十分な位相余裕 ($\text{PM} > 0$) を確保するために，交差周波数前後 1[dec] ぐらいにわたって対数ゲインの傾きを -1 に保たなければならない．これは古典制御における重要な設計ルールの一つとなっている．

なお， $L(s)$ が開右半面にも極・零点を有する場合， $L(s) = L_m(s)A(s)B(s)^{-1}$ のように定理 2 の条件満たす $L_m(s)$ と全域通過の $A(s) = \prod_{i=1}^k (z_i - s)/(\bar{z}_i + s)$ ， $B(s) = \prod_{j=1}^l (p_j - s)/(\bar{p}_j + s)$ との積に分解できる．ここで， z_i, p_j はそれぞれ $L(s)$ の開右半面上の零点，極である．このとき， $|L| = |L_m|$ および $\angle L = \angle L_m + \angle A - \angle B$ が成り立つ． L_m に対して適用した Bode の位相公式にこれらの関係式を代入すれば，次のように Bode の位相公式を任意の開ループ系に拡張できる．

系 7.2 開ループ伝達関数 $L(s)$ は $L(j0) > 0$ を満たし，開右半面の零点

z_i ($i = 1, \dots, k$) と極 p_j ($j = 1, \dots, l$) をもつとき, 次式が成り立つ.

$$\begin{aligned} \angle L(j\omega_0) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d \ln |L|}{d\nu} \ln \coth \frac{|\nu|}{2} d\nu \\ &+ \sum_{i=1}^k \angle \frac{z_i - j\omega_0}{\bar{z}_i + j\omega_0} - \sum_{j=1}^l \angle \frac{p_j - j\omega_0}{\bar{p}_j + j\omega_0} \end{aligned} \quad (7.49)$$

7.4 目標値追従の限界

本節では, ステップ信号に対する追従誤差 2 乗面積の下限が制御対象の不安定零点および不安定極によって制約されることを示す. これらの結果は, フィードバック制御の限界を定量的に示すものとなる.

本節では, 次の基本仮定をおく.

仮定 4 $P(s)$ は虚軸に零点をもたず, 開右半面零点 z_i ($i = 1, \dots, k$) をもつ (重複度を含める).

7.4.1 1 自由度系

1 自由度系のシステム構成は図 7.2 に示される通りである. $r \mapsto e$ の閉ループ伝達関数は感度関数 $S(s)$ であり, 追従誤差は $\hat{e}(s) = S(s)r(s)$ で与えられる.

【1】 制御対象が安定な場合 この場合, 安定化制御器のすべては $K(s) = Q/(1 - PQ)$ で与えられる. これを感度関数 $S(s)$ に代入すると,

$$S(s) = 1 - P(s)Q(s) \quad (7.50)$$

となる. またこのとき, $P(s)$ は

$$P(s) = L(s)P_m(s), \quad L(s) = \prod_{i=1}^k L_i(s), \quad L_i(s) = \frac{\bar{z}_i z_i - s}{z_i \bar{z}_i + s} \quad (7.51)$$

に分解できる. ただし, $L_i(s)$ は全域通過伝達関数で, $P_m(s)$ は虚軸上に零点をもたない最小位相の伝達関数である. さらに, $L_i(s)$ は $L_i(0) = 1$ に規格化されていることにも注意しておく.

次の定理はフィードバック制御で実現し得る追従誤差の下限を与える.

定理 7.3 $P(s)$ が安定で, かつ仮定 4 を満たすとき, 単位ステップの目標値に対する追従誤差の下限は

$$\inf \|e\|_2^2 = \sum_{i=1}^k \frac{2\operatorname{Re}(z_i)}{|z_i|^2} \quad (7.52)$$

で与えられる. さらに, P に不安定零点がないとき, $\inf \|e\|_2^2 = 0$ となる.

証明 追従誤差の Laplace 変換は

$$\hat{e}(s) = (1 - PQ)\hat{r}(s) = (1 - PQ)\frac{1}{s} \quad (7.53)$$

である． $e(t)$ が有界な 2 ノルムをもつために， $\hat{e}(s)$ は安定でなければならない．よって，自由パラメータ $Q(s)$ は $1 - P(0)Q(0) = 0$ を満たさなければならない．このことと $L_i(0) = 1$ から， $1 - P_m(0)Q(0) \prod_{i=j \geq 1}^k L_i(0) = 0$ は $1 \leq j \leq k$ について成立する．すると，2 ノルムの全域通過関数の積に対する不変性により

$$\begin{aligned} \|e\|_2^2 &= \left\| \left(1 - P_m Q \prod_{i=1}^k L_i\right) \frac{1}{s} \right\|_2^2 \\ &= \left\| \left(L_1^{-1} - P_m Q \prod_{i=2}^k L_i\right) \frac{1}{s} \right\|_2^2 \\ &= \left\| (L_1^{-1} - 1) \frac{1}{s} + \left(1 - P_m Q \prod_{i=2}^k L_i\right) \frac{1}{s} \right\|_2^2 \end{aligned} \quad (7.54)$$

が成り立つ． $(L_1^{-1} - 1)/s = 2\text{Re}(z_1)/(\bar{z}_1(z_1 - s))$ は完全不安定である．そして， $1 - P_m(0)Q(0) \prod_{i=2}^k L_i(0) = 0$ だから第 2 項は安定である．よって，補題 7.3 により

$$\begin{aligned} \|e\|_2^2 &= \left\| (L_1^{-1} - 1) \frac{1}{s} \right\|_2^2 + \left\| \left(1 - P_m Q \prod_{i=2}^k L_i\right) \frac{1}{s} \right\|_2^2 \\ &= \frac{4(\text{Re}(z_1))^2}{|z_1|^2} \left\| \frac{1}{z_1 - s} \right\|_2^2 + \\ &\quad \left\| \left(1 - P_m Q \prod_{i=2}^k L_i P_m Q\right) \frac{1}{s} \right\|_2^2 \end{aligned} \quad (7.55)$$

が得られる．さらに，補題 7.4 を用いると

$$\|e\|_2^2 = \frac{2\text{Re}(z_1)}{|z_1|^2} + \left\| \left(1 - P_m Q \prod_{i=2}^k L_i\right) \frac{1}{s} \right\|_2^2 \quad (7.56)$$

を得る．この変形を繰り返していくと，最終的に

$$\|e\|_2^2 = \sum_{i=1}^k \frac{2\text{Re}(z_i)}{|z_i|^2} + \left\| (1 - P_m Q) \frac{1}{s} \right\|_2^2 \quad (7.57)$$

を得る． $P_m^{-1}(s)$ がプロパーでないが， $Q(s, \epsilon) := P_m^{-1}(s)/(\epsilon s + 1)^r$ は安定プロパーとなる．ただし， $\epsilon > 0$ で r は $P(s)$ 次数差である．しかも， $\epsilon \rightarrow 0$ のとき $Q(s, \epsilon) \rightarrow P_m^{-1}(s)$ ．つまり，安定プロパーな Q で限りなく $1 - P_m Q$ を零に近づけることができる．したがって，上式第 2 項の下限は零である．よって

$$\inf \|e\|_2^2 = \sum_{i=1}^k \frac{2\text{Re}(z_i)}{|z_i|^2}$$

が成り立つ．

P に不安定零点がないとき， $P = P_m$ となる．上記証明の最後の部分から分かるようにこの場合ノルムの下限値は零となる．

この定理は，安定制御対象に対して目標値追従の精度は制御対象の不安定零

点によって制約されることを示している。

【例題 7.2】 安定制御対象 $P(s) = (s-2)/(s+1)(s+3)$ について、追従誤差がなるべく下限値に近いように制御器を設計せよ。

【解答】 $P(s)$ は $P_m(s) = -(s+2)/(s+1)(s+3)$ と $L(s) = (2-s)/(2+s)$ との積に分解できる。不安定零点が $z = 2$ であるので、追従誤差の下限値は

$$\inf \|e\|_2^2 = \frac{2z}{z^2} = 1$$

である。

上記定理の証明から分かるように $\|(1 - P_m Q) \frac{1}{s}\|_2$ を零に近づける制御器を設計すればよい。そこで、 $Q(s)$ を

$$Q(s, \epsilon) = \frac{P_m^{-1}(s)}{\epsilon s + 1} = -\frac{(s+1)(s+3)}{(s+2)(\epsilon s + 1)} \quad (7.58)$$

とすると、

$$\|(1 - P_m Q) \frac{1}{s}\|_2^2 = \left\| \frac{1}{s + \epsilon^{-1}} \right\|_2^2 = \frac{1}{2\epsilon^{-1}} = \frac{\epsilon}{2}$$

となり、 $\epsilon \rightarrow 0$ のとき零に近づく。対応する制御器は

$$K(s, \epsilon) = -\frac{1}{2(1+\epsilon)} \times \frac{(s+1)(s+3)}{s(\frac{\epsilon}{2(1+\epsilon)}s + 1)} \quad (7.59)$$

となる。 $\epsilon \rightarrow 0$ のとき、制御器はプロパーでない $K_{\text{opt}}(s) = -(s+1)(s+3)/(2s)$ に漸近する。つまり、下限にいくらでも近づけることができるが、下限を達成できるプロパーな制御器は存在しない。

またこのとき、閉ループ系の特性多項式は

$$p(s) = \epsilon(s+1)(s+3)(s+2)(s + \frac{1}{\epsilon}) \quad (7.60)$$

となり、その根は $-1, -3, -2, -1/\epsilon$ となる。その内の $-1, -3$ は制御対象の安定極と制御器の零点間の極零相殺で残ったもので、もう一つの -2 は制御対象の右半面零点 $z = 2$ の虚軸に関する鏡像である。最後の極 $-1/\epsilon$ は $\epsilon \rightarrow 0$ のとき負の無限大へ漸近する。つまり、この準最適制御器の特徴として制御対象の安定な極と零点をすべて相殺させ、不安定零点の鏡像のところに閉ループ極を配置して、残りの極を負の無限大へ移動させている。

そして、プロパーでない最適制御器 $K_{\text{opt}}(s)$ を調べると、制御対象の安定極 $p = -1, -3$ を零点としてもち、制御対象の無限遠点零点を極としてもつ（これは最適制御器がプロパーでない理由となる）。

さらに、最適なループゲインと感度関数はそれぞれ

$$L_{\text{opt}}(s) = -\frac{s-2}{2s}, \quad S_{\text{opt}}(s) = \frac{2s}{s+2}$$

となる。ループゲインは周波数 $\omega > 2$ [rad/sec] で $1/2$ であり、減衰が不十分である。したがって、この最適制御器は追従誤差を最小にすることができるが、センサ雑音に対して弱い。◇

〔2〕 制御対象が不安定な場合

ここで制御対象 $P(s)$ について、仮定 4 のほかに次の仮定 5 も設ける。

仮定5 $P(s)$ は虚軸に極をもたず, 開右半面において相異なる極 $p_j (j = 1, \dots, h)$ をもつ.

ここで, 不安定零点に関して重複度を許しているに対して, 不安定極に関しては技術上の問題で重複はないとしている. 重複する不安定極がある場合, 追従誤差下限の導出はさらに複雑なものになる.

7.2.2項の解析によると $S(s)$ は $S = -(X - NQ)\tilde{D} = 1 + N(-\tilde{Y} + Q\tilde{D})$ に変形できる. さらに, 仮定4, 5のもとで以下の性質を有する.

1. $N(s)$ の不安定零点は $z_i (i = 1, \dots, k)$ だけである
2. $\tilde{D}(s)$ の不安定零点は $p_j (j = 1, \dots, h)$ だけである
3. $S(z_i) = 1 \forall i$, かつ $S(p_j) = 0 \forall j$

ここでまず, $N(s)$, $\tilde{D}(s)$ を次のように全域通過関数と最小位相関数の積に分解しておく.

$$N(s) = LM, \quad L(s) = \prod_{i=1}^k \frac{\bar{z}_i z_i - s}{z_i \bar{z}_i + s}, \quad M(s) \text{ は最小位相} \quad (7.61)$$

$$\tilde{D}(s) = gb, \quad b(s) = \prod_{j=1}^h \frac{\bar{p}_j p_j - s}{p_j \bar{p}_j + s}, \quad g(s) \text{ は最小位相} \quad (7.62)$$

すると, 感度関数はさらに

$$S(s) = 1 + LM(-\tilde{Y} + Q\tilde{D}) = -(X - NQ)gb \quad (7.63)$$

と書ける. $\|e\|_2$ の有界性が $S(0) = 0$, すなわち

$$1 - M(0)\tilde{Y}(0) + M(0)Q(0)\tilde{D}(0) = 0 \quad (7.64)$$

に等価であること, および $L(0) = b(0) = 1$ であることに注意しておく.

次の定理は, 不安定制御対象に対して目標値追従の精度は制御対象の不安定零点にだけでなく, 不安定極にも制約されていることを示す.

定理7.4 $P(s)$ が仮定4, 5を満たすとき, 単位ステップの目標値に対する追従誤差の下限は

$$\inf \|e\|_2^2 = \sum_{i=1}^k \frac{2\text{Re}(z_i)}{|z_i|^2} + \sum_{i=1}^h \sum_{j=1}^h \frac{4\text{Re}(p_i)\text{Re}(p_j)}{(\bar{p}_i + p_j)p_i\bar{p}_j\bar{b}_i b_j} (1 - L^{-1}(p_i))^* (1 - L^{-1}(p_j)) \quad (7.65)$$

で与えられる. ただし, 定数 b_i は次式で与えられるものである.

$$b_i = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^h \frac{\bar{p}_j p_j - p_i}{p_j \bar{p}_j + p_i}$$

さらに、 $P(s)$ に不安定零点がないとき、 $\inf \|e\|_2^2 = 0$ となる。

上述下限値の第1項は不安定零点だけによってもたらされた追従性能の制約であり、原点によほど近い零点でない限りこの制約は強くない。他方、第2項は不安定極が追従制御に対する不安定零点の制約を増幅させることを示すものである。特に、 $P(s)$ に互いに近い不安定極零点がある場合、 L^{-1} は大きくなる。同様に、互いに近い不安定極がある場合、 b_i^{-1} は大きくなる。いずれの場合にしても追従誤差は増大することをこの定理が示している。

制御対象に不安定零点がない場合、 $L(s) = 1$ となるので、 $\inf \|e\|_2^2$ の2番目の項、すなわち不安定極の影響はなくなる。ゆえに、目標値追従性能への本質的な制約は不安定零点によって加えられたものであり、不安定極は単にこの制約を増幅させているに過ぎない。

以下、定理7.4の証明を与えておこう。

証明 $L(0) = 1$ より $(L^{-1} - 1)/s$ の極はすべて開右半面にある。そして $\|e\|_2$ の有界条件(7.64)より $(1 - M\tilde{Y} + MQ\tilde{D})/s$ が安定である。よって、補題7.2(4)と補題7.3を使うと

$$\begin{aligned} \|e\|_2^2 &= \|(1 - LM\tilde{Y} + LMQ\tilde{D}) \frac{1}{s}\|_2^2 = \|(L^{-1} - M\tilde{Y} + MQ\tilde{D}) \frac{1}{s}\|_2^2 \\ &= \|(L^{-1} - 1) \frac{1}{s} + (1 - M\tilde{Y} + MQ\tilde{D}) \frac{1}{s}\|_2^2 \\ &= \|(L^{-1} - 1) \frac{1}{s}\|_2^2 + \|(1 - M\tilde{Y} + MQ\tilde{D}) \frac{1}{s}\|_2^2 \end{aligned} \quad (7.66)$$

となることが分かる。定理7.3の証明と同様な手法で第1項を計算すれば

$$\|e\|_2^2 = \sum_{i=1}^k \frac{2\text{Re}(z_i)}{|z_i|^2} + \|(1 - M\tilde{Y} + MQgb) \frac{1}{s}\|_2^2 \quad (7.67)$$

が成り立つ。ここで、上式の第2項について考えればよいので、それを

$$J_1 = \|(1 - M\tilde{Y} + MQgb) \frac{1}{s}\|_2^2 = \left\| \left(\frac{1 - M\tilde{Y}}{b} + MQg \right) \frac{1}{s} \right\|_2^2 \quad (7.68)$$

とおく。 J_1 を計算する前に、以下の準備をしておこう。まず、 $S(p_j) = 0$ と式(7.63)より $1 - L(p_j)M(p_j)Y(p_j) = 0$ が成り立つから、 $1 - M(p_j)Y(p_j) = 1 - L^{-1}(p_j)$ となる。よって、 $(1 - M\tilde{Y})/b$ を

$$\frac{1 - M\tilde{Y}}{b} = \sum_{j=1}^h a_j \frac{p_j \bar{p}_j + s}{\bar{p}_j p_j - s} + R, \quad R(s) \text{ は安定} \quad (7.69)$$

に部分分数展開するとき、係数 a_j は

$$a_j = \frac{\bar{p}_j}{p_j(p_j + \bar{p}_j)} \lim_{s \rightarrow p_j} (p_j - s) \frac{1 - M\tilde{Y}}{b} = \frac{1 - L^{-1}(p_j)}{b_j} \quad (7.70)$$

となる。この部分分数展開を J_1 に代入すると

$$\begin{aligned}
J_1 &= \left\| \left(\sum_{j=1}^h a_j \frac{p_j \bar{p}_j + s}{\bar{p}_j p_j - s} + R + MQg \right) \frac{1}{s} \right\|_2^2 \\
&= \left\| \left(\sum_{j=1}^h a_j \left(\frac{p_j \bar{p}_j + s}{\bar{p}_j p_j - s} - 1 \right) + \sum_{j=1}^h a_j + R + MQg \right) \frac{1}{s} \right\|_2^2 \\
&= \left\| \sum_{j=1}^h a_j \frac{2\operatorname{Re}(p_j)}{\bar{p}_j} \frac{1}{p_j - s} + \left(\sum_{j=1}^h a_j + R + MQg \right) \frac{1}{s} \right\|_2^2
\end{aligned}$$

となる． $\sum a_j + R(0) = 1 - M(0)\tilde{Y}(0)$ は式 (7.69) から容易に分かる．よって式 (7.64) より $\sum a_j + (R + MQg)(0) = 0$ となり， $(\sum a_j + R + MQg)/s$ は安定となる．すると

$$J_1 = \left\| \sum_{j=1}^h a_j \frac{2\operatorname{Re}(p_j)}{\bar{p}_j} \frac{1}{p_j - s} \right\|_2^2 + \left\| \left(\sum_{j=1}^h a_j + R + MQg \right) \frac{1}{s} \right\|_2^2 \quad (7.71)$$

が成り立つ． $M(s)$, $g(s)$ が安定な逆システムを有するので，第 2 項の下限は零となる．したがって

$$\inf J_1 = \left\| \sum_{j=1}^h a_j \frac{2\operatorname{Re}(p_j)}{\bar{p}_j} \frac{1}{p_j - s} \right\|_2^2 \quad (7.72)$$

となる．一方，内積の性質 (補題 7.2 と補題 7.4) を用いると

$$\begin{aligned}
\inf J_1 &= \sum_{i=1}^h \sum_{j=1}^h \left\langle a_i \frac{2\operatorname{Re}(p_i)}{\bar{p}_i} \frac{1}{p_i - s}, a_j \frac{2\operatorname{Re}(p_j)}{\bar{p}_j} \frac{1}{p_j - s} \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^h \sum_{j=1}^h \bar{a}_i \frac{2\operatorname{Re}(p_i)}{p_i} a_j \frac{2\operatorname{Re}(p_j)}{\bar{p}_j} \left\langle \frac{1}{p_i - s}, \frac{1}{p_j - s} \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^h \sum_{j=1}^h \bar{a}_i a_j \frac{4\operatorname{Re}(p_i)\operatorname{Re}(p_j)}{p_i \bar{p}_j} \frac{1}{\bar{p}_i + p_j}
\end{aligned} \quad (7.73)$$

と計算される．以上で定理前半の結論を導出できた．

次に， $P(s)$ に不安定零点がないとき， $N(s)$ は最小位相となる．よって

$$\|e\|_2^2 = \|(-X + NQ)gb \frac{1}{s}\|_2^2 = \|(-X + NQ)g \frac{1}{s}\|_2^2 \quad (7.74)$$

が成り立つ． $N(s)$ は安定な逆システムをもつので， $Q(s, \epsilon) = N^{-1}X/(\epsilon s + 1)^r$ (r は $N(s)$ の次数差，すなわち $P(s)$ の次数差を表す) と選べば

$$-X(s) + N(s)Q(s, \epsilon) = -X(s) \frac{(\epsilon s + 1)^r - 1}{(\epsilon s + 1)^r} \quad (7.75)$$

となり，以下の漸近的性質をもつ．

$$-X(0) + N(0)Q(0, \epsilon) = 0, \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (-X(s) + N(s)Q(s, \epsilon)) = 0 \quad (7.76)$$

ゆえに， $\inf \|e\|_2^2 = 0$ となる．

7.4.2 2 自由度系

この場合，6.5 節によれば $r \mapsto e = r - y_P$ の閉ループ伝達関数は

$$T_{er}(s) = 1 + N_{12}(s)Q_F(s), \quad N_{12}(s) = -c(sI - A_f)^{-1}b \quad (7.77)$$

となり， $Q_F(s)$ は任意の安定な伝達関数である． $N_{12}(s)$ の零点が $P(s)$ の零点に一致することから，その結果は当然安定制御対象の場合と同様である．よって，次の定理を得る．

定理 7.5 仮定 4 が成り立つとする．2 自由度制御系において，単位ステップの目標値に対する追従誤差の下限は

$$\inf \|e\|_2^2 = \sum_{i=1}^k \frac{2\operatorname{Re}(z_i)}{|z_i|^2} \quad (7.78)$$

で与えられる．さらに， $P(s)$ に不安定零点がないとき， $\inf \|e\|_2^2 = 0$ となる．

つまり，2 自由度系の場合制御対象の不安定極は目標値追従の妨げにならない．これは 2 自由度系の大きな利点となっている．また，この下限値は 1 自由度制御器で制御対象が安定の場合と同じである．逆説的にいえば，安定制御対象に対して 2 自由度構成を導入しても追従誤差の下限値を下げられず，究極的な目標値応答改善に寄与しない．

練習問題

- 7.1 伝達関数 $G(s) = s(s^2 - 5s + 6)/(s + 5)^2(s^2 + 2s + 5)$ を全域通過伝達関数と最小位相伝達関数の積に分解せよ。
- 7.2 式 (7.11) で定義した関数が内積であることを示せ．
- 7.3 補題 7.2 を示せ．
- 7.4 補題 7.4 を示せ．
- 7.5 $c(sI - A - bf)^{-1}b$ と $c(sI - A)^{-1}b$ が同じ次数差をもつことを示せ．
- 7.6 安定伝達関数

$$G(s) = \frac{s + 5}{(s + 1)(s + 10)}$$

の H_2 ノルムをそれぞれ留数，インパルス応答を用いて計算せよ．

- 7.7 定理 7.4 の証明に習って，不安定プラント $P(s) = 1/(s - 1)$ に対する単位ステップ目標値の追従誤差下限値 $\inf \|e\|_2$ および準最適制御器を求めよ．

付録 A

線形代数のまとめ

この付録では本書で使う線形代数の知識についてまとめる．特に，一般教養課程であまり触れられないベクトル空間の構造に関する性質に重点をおく．このような構造的性質は線形システムの構造解析においてきわめて重要な役割を果たす．ここでは，読者がベクトルと行列の演算ができるとして話を進める．

簡単のために， i 行 j 列目の要素が a_{ij} である行列 A を $A = (a_{ij})$ と書くことがある．また， I は適当な次元の単位行列を表すが，その次元が $n \times n$ であることを強調したいとき， I_n と書く場合がある．本書では， \mathbf{R} ですべての実数の集合， \mathbf{C} ですべての複素数の集合を表す．実数と複素数両方について成り立つ結果を述べるとき， \mathbf{F} で \mathbf{R} もしくは \mathbf{C} を表す．ベクトルに含まれる要素の数はその次元 (dimension) という．ベクトル x の転置を x^T で表す．ベクトル x の要素が複素数である場合，その共役転置 (conjugate transpose) とは各要素の共役をとってからベクトルの転置をとって得られた行ベクトル \bar{x}^T であり， x^* で表す．すなわち，

$$x^* := \bar{x}^T = [\bar{x}_1 \ \bar{x}_2 \ \cdots \ \bar{x}_n] \quad (\text{A.1})$$

である．なお，記号 $:=$ は「定義する」を表す．さらに， $A^* = A$ を満たす行列をエルミート行列 (Hermitian matrix) と呼ぶ． $\text{diag}(X_1, \dots, X_k)$ は X_i を対角ブロックとしてもつブロック対角行列を表す．

A.1 行列式，逆行列とブロック行列

ここでまず，行列式の性質をまとめる．同じ次元を有する正方行列 A, B について，その積の行列式は

$$\det(AB) = \det(A) \det(B) \quad (\text{A.2})$$

で計算できる．これと恒等式 $A^{-1}A = I$ により次式を得る．

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} \quad (\text{A.3})$$

また，次元が必ずしも等しくない正方行列 A, B を対角ブロックとしてもつブロック三角行列の行列式は

$$\det \begin{bmatrix} A & * \\ 0 & B \end{bmatrix} = \det(A) \det(B) \quad (\text{A.4})$$

$$\det \begin{bmatrix} A & 0 \\ * & B \end{bmatrix} = \det(A) \det(B) \quad (\text{A.5})$$

となる．

そして，行列 A, B が共に正則のとき，その積の逆行列は次式となる．

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \quad (\text{A.6})$$

次に， A を

$$A := \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad (\text{A.7})$$

のようにブロック分割された正方行列とする．ただし， A_{11} と A_{22} は共に正方行列である． A_{11} が正則であると仮定すると， A は次のように分解できる．

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ A_{21}A_{11}^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & \Delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & A_{11}^{-1}A_{12} \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (\text{A.8})$$

ここで $\Delta := A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$ である．同じように， A_{22} が正則であれば，

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & A_{12}A_{22}^{-1} \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\Delta} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ A_{22}^{-1}A_{21} & I \end{bmatrix} \quad (\text{A.9})$$

が成り立つ．ここで $\hat{\Delta} := A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}$ である．

上述の行列分解公式を利用すれば，次の行列式に関する公式を簡単に導ける．

$$\det(A) = \det(A_{11}) \det(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}), \quad A_{11} \text{ が正則の場合} \quad (\text{A.10})$$

$$\det(A) = \det(A_{22}) \det(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}), \quad A_{22} \text{ が正則の場合} \quad (\text{A.11})$$

また，次のブロック三角行列の逆行列の式も容易に確認できる[†]．

$$\begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ -A_{22}^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & A_{22}^{-1} \end{bmatrix} \quad (\text{A.12})$$

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} \\ 0 & A_{22}^{-1} \end{bmatrix} \quad (\text{A.13})$$

さらに，式 (A.7) のように任意のブロック分割された正則行列 A について，その逆行列は上述のブロック分解式 (A.8)，(A.9)，ブロック三角行列の逆行列の式 (A.12)，(A.13) 及び性質 $(RST)^{-1} = T^{-1}S^{-1}R^{-1}$ で計算できるので，公式を覚える必要はまったくない．

恒等式

$$A - ABA = A(I - BA) = (I - AB)A, \quad (I - AB)^{-1}(I - AB) = I$$

より次の逆行列に関する性質が得られる．

$$A(I - BA)^{-1} = (I - AB)^{-1}A \quad (\text{A.14})$$

$$(I - AB)^{-1} = I + (I - AB)^{-1}AB = I + A(I - BA)^{-1}B \quad (\text{A.15})$$

これに基づいて，次の非常に役立つ恒等式を導出できる．すなわち， A, B, C, D が適当な次元の行列で A と D が共に正則行列であるとき，

$$(A - BD^{-1}C)^{-1} = A^{-1} + A^{-1}B(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} \quad (\text{A.16})$$

[†] 右辺の非対角ブロックはもとの行列の対角ブロックの逆行列と非対角ブロックを時計回りの順にかけて得られたものである．

が成り立つ．これは以下のように示せる．まず， $A - BD^{-1}C = A(I - A^{-1}BD^{-1}C)$ と変形できる．すると，式(A.16)の左辺は(A.14)，(A.15)式より

$$(I - A^{-1}BD^{-1}C)^{-1}A^{-1} = [I + A^{-1}B(I - D^{-1}CA^{-1}B)^{-1}D^{-1}C]A^{-1}$$

に変形できる．さらに，上式に $(I - D^{-1}CA^{-1}B)^{-1} = (D - CA^{-1}B)^{-1}D$ を代入すれば式(A.16)の右辺になる．

A.2 行列の基本操作とその行列表現

伝達関数の状態空間実現について相似変換を行う際に，ブロック行列の基本操作 (elementary manipulation) を使う必要がある．また，任意の行列を特殊構造をもつものに変換するにも基本操作が役に立っている．ここで，行列の基本操作とその行列表現 (matrix representation) について説明する．

行列 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ について考える．以下の行列操作を総じて基本操作という．

(1) i 行目と j 行目を入れ換える

これは単位行列 I_m に対して同じ操作を行って得られた行列 T を左から A にかけることで実現できる．

例えば， $A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ (a_i は行ベクトルである) の 1 行目と 3 行目を入れ換えるとき， I_3 について同様の操作を行うと

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \rightarrow T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow TA = \begin{bmatrix} a_3 \\ a_2 \\ a_1 \end{bmatrix}$$

を得る．明らかに， T の j 列目と i 列目を入れ換えると単位行列に戻るので， T^{-1} は単位行列 I_m に対して同様の操作を行うことで得られる．

(2) i 列目と j 列目を入れ換える

これは単位行列 I_n に対して同じ操作を行って得られた行列 T を右から A にかけることで実現できる．

例えば， $A = [a_1 \ a_2 \ a_3]$ (a_i は列ベクトルである) の 1 列目と 3 列目を入れ換えるとき， I_3 について同様の操作を行うと

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow AT = [a_1 \ a_2 \ a_3] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [a_3 \ a_2 \ a_1]$$

となる．また， T の j 行目と i 行目を入れ換えると単位行列に戻るので， T^{-1} は単位行列 I_n に対して同様の操作を行うことで得られる．

(3) $\alpha \times (i$ 行目) を j 行目に加える

これは単位行列 I_m に対して同じ操作を行って得られた行列 T を左から A にかけることで実現できる．

例えば， $A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ の $2 \times (1$ 行目) を 3 行目に加えたいとき， I_3 について同様の操作を行うと

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow TA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 + 2a_1 \end{bmatrix}$$

を得る．また， T の $-\alpha \times (j$ 列目) を i 列目に加えると単位行列に戻るので， T^{-1} は単位行列 I_m に対して同様の操作を行うことで得られる．

(4) $(i$ 列目) $\times \alpha$ を j 列目に加える

これは単位行列 I_n に対して同じ操作を行って得られた行列 T を右から A にかけることで実現できる．

例えば， $A = [a_1 \ a_2 \ a_3]$ の $(1$ 列目) $\times 2$ を 3 列目に加えたいとき， I_3 について同様の操作を行うと

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow AT = [a_1 \ a_2 \ a_3] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [a_1 \ a_2 \ 2a_1 + a_3]$$

を得る．また， T の $(j$ 行目) $\times (-\alpha)$ を i 行目に加えれば単位行列に戻るので， T^{-1} は単位行列 I_n に対して同様の操作を行うことで得られる．

(5) i 行目に $\alpha \neq 0$ をかける

これは単位行列 I_m に対して同じ操作を行って得られた行列 T を左から A にかけることで実現できる．

例えば， $A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ の 1 行目に 3 をかけたいとき， I_3 について同様の操作を行うと

$$T = \begin{bmatrix} 3 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow TA = \begin{bmatrix} 3 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

となる．また， T の i 列目に α^{-1} をかければ単位行列となるので， T^{-1} は単位行列 I_m に対して同様の操作を行うことで得られる．

(6) i 列目に $\alpha \neq 0$ をかける

これは単位行列 I_n に対して同じ操作を行って得られた行列 T を右から A にかけることで実現できる．

例えば， $A = [a_1 \ a_2 \ a_3]$ の 3 列目に 2 をかけたいとき， I_3 について同様の操作を行うと

$$T = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow AT = [a_1 \ a_2 \ a_3] \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{bmatrix} = [a_1 \ a_2 \ 2a_3]$$

となる．明らかに， T の j 行目に α^{-1} をかければ単位行列に戻るので， T^{-1} は単位行列 I_n に同様の操作を行うことで得られる．

以上の基本操作の法則はブロック行列に対しても同様である．ただし，行ブロックに行列をかけるときは左から，列ブロックに行列をかけるときは右からかけなければならない．

(A.8) 式の行列は基本操作で非対角ブロックを消去することによって得ることができる．例えば，行操作で A_{21} を消すことの行列表現は $\begin{bmatrix} I & 0 \\ -A_{21}A_{11}^{-1} & I \end{bmatrix}$ であり，その逆行列は (A.8) 式右辺一番目の行列になる．同様に，右辺 3 番目の行列は A_{12} を消去

する列操作の行列表現と対応する．

A.3 線形ベクトル空間

ベクトル空間は次元が同じであるベクトルの集合である．特に，要素がすべて実数である n 次元ベクトルの空間は \mathbf{R}^n で表し，要素がすべて複素数である n 次元ベクトルの空間は \mathbf{C}^n で表す．実ベクトル空間 \mathbf{R}^n に関しては，以下の性質が成り立つ．

1. $x, y \in \mathbf{R}^n$ ならば， $x + y \in \mathbf{R}^n$ となる．
2. $x \in \mathbf{R}^n$ かつ $a \in \mathbf{R}$ ならば， $ax \in \mathbf{R}^n$ となる．

この二つの性質は次のように一つにまとめることができる (練習問題 A.2)．

任意の $x, y \in \mathbf{R}^n$ と $a, b \in \mathbf{R}$ に対して， $ax + by \in \mathbf{R}^n$ が成り立つ

同じように，複素ベクトル空間 \mathbf{C}^n に関しては，以下の性質が成り立つ．

任意の $x, y \in \mathbf{C}^n$ と $a, b \in \mathbf{C}$ に対して， $ax + by \in \mathbf{C}^n$ が成り立つ

$ax + by$ はベクトル x, y に関する線形演算であり，ベクトル空間はこの演算に対して閉じているため，線形ベクトル空間 (linear vector space) と呼ばれる．

建物が柱によって支えられると同じように，ベクトル空間も基底というものによって構成される．また，壁が柱で張られる面にあるように，任意のベクトルも基底で張られる．この主従関係は線形独立性という概念につながる．そして，建物を部屋に区切ることができるのと同じようにベクトル空間も部分空間に分けることができる．さらに，ベクトルの長さ，二つのベクトル間の角度などの性質はノルムと内積で表現される．以下の節では，線形ベクトル空間に関するこれらの性質について述べる．

A.3.1 線形独立性

$x_1, x_2, \dots, x_k \in \mathbf{F}^n$ と $\alpha_i \in \mathbf{F} (i = 1, \dots, k)$ に対し[†]，次のベクトル

$$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_k x_k \tag{A.17}$$

を x_1, x_2, \dots, x_k の線形結合 (linear combination) という．

ベクトル x_1, x_2, \dots, x_k について，少なくとも 1 つ零でないスカラー $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ が存在し，等式

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_k x_k = 0 \tag{A.18}$$

を満たすとき，ベクトル x_1, x_2, \dots, x_k が線形従属 (linearly dependent) であるという．逆に，上式が $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$ ときに限って成立する場合，ベクトル x_1, x_2, \dots, x_k が線形独立 (linearly independent) であるという．

ベクトル x_1, x_2, \dots, x_k が線形従属であるとき， $\alpha_1 \neq 0$ ならば x_1 は

$$x_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} x_2 - \dots - \frac{\alpha_k}{\alpha_1} x_k \tag{A.19}$$

となり， x_2, \dots, x_k の線形結合で表せることが分かる．つまり， x_1, x_2, \dots, x_k が線形従属であるとは，その中にほかのベクトルの線形結合で表せるベクトルが存在すると

[†] ベクトルの要素 x_j と係数 α_i が同じ性質の数であることを注意されたい．すなわち，ベクトルの要素 x_j が実数であれば係数 α_i も実数でなければならない．複素数の場合も同様である．

ということなのである．逆に，線形独立なベクトルの集合ではその中のどのベクトルでもほかのベクトルの線形結合で表せない．線形独立と線形従属の概念は図的に示すと，図 A.1 のように表せる．この図において， u と $\{x_1, x_2\}$ の線形従属関係，および v と $\{x_1, x_2\}$ の線形独立関係が表されている．

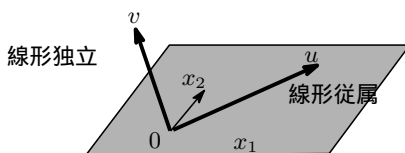


図 A.1 線形独立性と従属性

■ 例 A.1 ベクトル $u = [1\ 0\ 2]^T$, $v = [0\ 2\ 1]^T$, $w = [2\ 2\ 5]^T$ について

$$2u + v - w = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} = 0$$

が成り立つから，互いに線形従属である．しかし， u, v については

$$au + bv = \begin{bmatrix} a \\ 2b \\ 2a + b \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow a = b = 0$$

となるから，互いに線形独立である．同様に， u と w および v と w もそれぞれ線形独立している．幾何的には， u, v は相異なる方向に向くベクトルであり，その線形結合で 1 つの平面を構成できる． w がこの平面に位置しているから， u, v と線形従属である．また， u と w の線形結合もしくは v と w の線形結合も同じ平面を形成する． □

A.3.2 次元と基底

さて， F^n に含まれる線形独立なベクトルの数は最大でいくつになるか．この質問に答える前に，まず次の例を見てみよう．ここで， e_i で i 番目の要素だけが 1 でほかはすべて 0 のベクトルを表す．

■ 例 A.2 3次元のユークリッド空間 R^3 の場合，任意のベクトル u は

$$u = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = xe_1 + ye_2 + ze_3 \quad (\text{A.20})$$

と表せる．すると， u は (e_1, e_2, e_3) の線形結合で表せることになる．また， (e_1, e_2, e_3) は明らかに線形独立である．したがって， R^3 の線形独立ベクトルの個数は最大で 3 であり，要素の数に等しい．

なお，ベクトル (e_1, e_2, e_3) はそれぞれ x 軸， y 軸と z 軸に沿う単位ベクトルであるので， R^3 の自然基底とも呼ばれる． □

この例から分かるように， F^n の任意のベクトルは必ず n 本のベクトル

$$e_1, \dots, e_i, \dots, e_n$$

の線形結合となる．これより n 次元線形ベクトル空間に含まれる線形独立ベクトルの数は n 以下であることがいえる．さらに，上述のベクトルはもちろん線形独立であるので，線形独立なベクトルの数が n となる．以上をまとめると，次の定理を得る．

定理 A.1 線形ベクトル空間 \mathbf{F}^n の次元とその線形独立なベクトルの最大本数は等しい．

次に， \mathbf{F}^n のベクトル集合 $\{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ の線形結合で作られる集合をこれらのベクトルで張られる空間といい，

$$\text{span}\{u_1, u_2, \dots, u_k\} := \{x = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_k u_k : \alpha_i \in \mathbf{F}\} \quad (\text{A.21})$$

で表す．また，ベクトル集合 $\{u_1, u_2, \dots, u_n\} \subset \mathbf{F}^n$ が線形独立であるとき， \mathbf{F}^n の基底 (basis) という． \mathbf{F}^n がその基底で張られる空間に等しいことを次の定理に示す．

定理 A.2 $\{u_1, u_2, \dots, u_n\} \subset \mathbf{F}^n$ を \mathbf{F}^n の任意の基底とする．このとき， $\mathbf{F}^n = \text{span}\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ が成り立つ．

証明 $x \in \text{span}\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ ならば $x \in \mathbf{F}^n$ となるので， $\text{span}\{u_1, u_2, \dots, u_n\} \subset \mathbf{F}^n$ は明らかに成り立つ．次に， $[u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n] = U$ とおくと，正方行列となる．線形独立の仮定から

$$0 = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n]c = Uc, \quad c \in \mathbf{F}^n$$

が零解 $c = 0$ しかもたない．すると，行列 U は正則でなければならず逆行列をもつ (A.5.3 節参照)．ゆえに，任意の $x \in \mathbf{F}^n$ に対し $\alpha = U^{-1}x$ とおけば， $x = U\alpha = \sum \alpha_i u_i$ ($\alpha_i \in \mathbf{F}$ は α の要素である) となり， $\mathbf{F}^n \subset \text{span}\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ が成立する．以上で証明が完了する．

この定理より，任意のベクトル $x \in \mathbf{F}^n$ は必ず基底 $\{u_1, \dots, u_n\}$ とスカラ $\alpha_i (i = 1, \dots, n)$ によって

$$x = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n \quad (\text{A.22})$$

のように表せる． $\alpha_i (i = 1, \dots, n)$ は基底 $\{u_1, \dots, u_n\}$ 上におけるベクトル x の座標 (coordinate) という．

A.3.3 部分空間

ベクトル $x_1, x_2, \dots, x_k \in \mathbf{F}^n$ の線形結合全体

$$\text{span}\{x_1, x_2, \dots, x_k\} := \{x = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_k x_k : \alpha_i \in \mathbf{F}\} \quad (\text{A.23})$$

を x_1, x_2, \dots, x_k で張られる部分空間 (subspace) と呼ぶ．部分空間 $S := \text{span}\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ について， $u, v \in S$ ならば，必ず $\alpha_i, \beta_i \in \mathbf{F} (i = 1, \dots, k)$ が存在して

$$u = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_k x_k, \quad v = \beta_1 x_1 + \dots + \beta_k x_k \quad (\text{A.24})$$

と書ける．すると，任意の $a, b \in \mathbf{F}$ に対して

$$au + bv = (a\alpha_1 + b\beta_1)x_1 + \dots + (a\alpha_k + b\beta_k)x_k \quad (\text{A.25})$$

が成立し、しかも $a\alpha_i + b\beta_i \in \mathbb{F}$ なので、 $au + bv \in S$ となる。すなわち、部分空間 S が線形空間の性質を満たす。したがって、部分空間自身も線形空間となっている。

さらに、 \mathbb{F}^n の部分空間 $S = \text{span}\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ において、 $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ の中の線形独立なベクトルの集合は S の基底[†] (basis) という。 S の基底に含まれるベクトルの数は部分空間 S の次元 (dimension) といい、 $\dim(S)$ で表す。いい換えると、部分空間 S の次元は S に含まれる線形独立なベクトルの数に等しい。

■ 例 A.3 例 A.1 では、ベクトル $u = [1 \ 0 \ 2]^T$ 、 $v = [0 \ 2 \ 1]^T$ が線形独立しているから、 \mathbb{R}^3 の 2 次元部分空間を張る。一方、ベクトル $w = [2 \ 2 \ 5]^T$ が u, v に線形従属しているため、 $\text{span}\{u \ v \ w\} = \text{span}\{u \ v\}$ となる。 □

A.4 ベクトルのノルムと内積

本節では、ベクトルの大きさやベクトル間の方向関係について考える。

A.4.1 ベクトルのノルム

3 次元ユークリッド空間上の点 $P(x, y, z)$ と原点の間の距離は

$$d(\vec{OP}) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (\text{A.26})$$

で与えられている。これはベクトル $u = [x \ y \ z]^T$ の大きさを表す。一般にベクトルの大きさをノルム (norm) といい、 $\|\cdot\|$ で表す。したがって、 $d(\vec{OP}) = \|u\|$ とも書ける。このノルムはベクトルを正数に写像する関数として捉えることができる。この関数の性質を調べていくと、以下の条件をすべて満たすことが分かる (練習問題 A.4)。

- (1) $\|u\| \geq 0$
- (2) $\|u\| = 0$ と $u \equiv 0$ は等価である
- (3) 任意のスカラー $\alpha \in \mathbb{R}$ に対し、 $\|\alpha u\| = |\alpha| \|u\|$
- (4) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ (三角不等式)

これらユークリッド距離の性質は任意のベクトルや関数のノルムを考える出発点になる。以降、任意のベクトル空間/関数空間上で定義される実スカラー関数で、上述の性質をすべて満たすとき、対応するベクトル空間/関数空間のノルムと呼ぶ。ただし、性質 (3) については、ベクトル/関数が実数のときスカラー $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して成り立つとし、複素数のときスカラー $\alpha \in \mathbb{C}$ に対して成り立つとする。ノルムはユークリッド空間の距離の概念を一般化したもので、ゆえにユークリッド距離のイメージで考えることができる。

ベクトル $u = [u_1 \ \dots \ u_n]^T \in \mathbb{C}^n$ について、よく利用するノルムを以下に示しておく。

$$\|u\|_1 := \sum_{i=1}^n |u_i| \quad 1 \text{ ノルム} \quad (\text{A.27})$$

[†] 基底に含まれるベクトルが必ず線形独立であることに注意されたい。一方、 $\text{span}\{x_1, \dots, x_k\}$ を張る $\{x_1, \dots, x_k\}$ に線形従属のものがあってもよい。

$$\|u\|_2 := \sqrt{u^*u} = \sqrt{\sum_{i=1}^n |u_i|^2} \quad 2 \text{ ノルム} \quad (\text{A.28})$$

$$\|u\|_\infty := \max_{1 \leq i \leq n} |u_i| \quad \infty \text{ ノルム} \quad (\text{A.29})$$

■ 例 A.4 $f(u) = \sum_{i=1}^n |u_i|$ がノルム条件を満たすことを示そう。

まず, $f(u) \geq 0$ は明らかである。そして,

$$f(u) = 0 \Leftrightarrow |u_i| = 0 \forall i \Leftrightarrow u_i = 0 \forall i \Leftrightarrow u = 0$$

が成り立つ。さらに,

$$f(\alpha u) = \sum_{i=1}^n |\alpha u_i| = |\alpha| \sum_{i=1}^n |u_i| = |\alpha| f(u)$$

および

$$f(u+v) = \sum_{i=1}^n |u_i + v_i| \leq \sum_{i=1}^n (|u_i| + |v_i|) = f(u) + f(v)$$

も成立する ($|u_i + v_i| \leq |u_i| + |v_i|$ より)。よって, $f(u)$ がノルムである。□

なお, 関数のノルムについては4.5節で紹介される。

A.4.2 ベクトルの内積

2次元ユークリッド空間 \mathbf{R}^2 では, ベクトル間の角度は幾何学的に二つのベクトルがなす角度 (図 A.2) として考えられている。図 A.2の二つのベクトルを $u_i = [x_i \ y_i]^T$ ($i = 1, 2$) とする。この角度は余弦定理

$$\|u_1 - u_2\|_2^2 = \|u_1\|_2^2 + \|u_2\|_2^2 - 2\|u_1\|_2\|u_2\|_2 \cos \theta \quad (\text{A.30})$$

で計算できる。2ノルムの定義に従ってこの式の左辺を展開し整理すると,

$$\cos \theta = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\|u_1\|_2 \|u_2\|_2} = \frac{u_1^T u_2}{\|u_1\|_2 \|u_2\|_2} \quad (\text{A.31})$$

が得られる。 $u_1^T u_2$ はベクトルをスカラーへ写像する関数であり, 内積 (inner product) と呼ばれる。それを

$$\langle u_1, u_2 \rangle := u_1^T u_2 \quad (\text{A.32})$$

で表記する。すると,

$$\cos \theta = \frac{\langle u_1, u_2 \rangle}{\|u_1\|_2 \|u_2\|_2}, \quad \theta \in [0, \pi] \quad (\text{A.33})$$

が成り立ち, 内積と角度は一对一の関係にある。もっと次元の高いベクトル空間や関数空間では, 角度は書けないので, 内積でベクトル間の角度という概念を定義する必要がある。

この例を一般化して, 任意の $u, v \in \mathbf{R}^n$ の内積は

$$\langle u, v \rangle := u^T v \quad (\text{A.34})$$

と定義される。そして, 任意の $u, v \in \mathbf{C}^n$ の内積は

$$\langle u, v \rangle := u^* v \quad (\text{A.35})$$

と定義される。さらに, 二つのベクトル u, v の間の角度は式

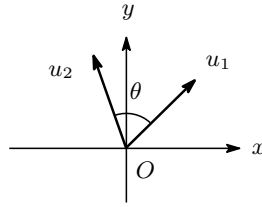


図 A.2 内積と角度

$$\cos \theta = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\|_2 \|v\|_2}, \quad \theta \in [0, \pi] \quad (\text{A.36})$$

で定義される。

上述の内積の定義により, $\langle u, v \rangle = 0$ のとき, u, v 間の角度は 90° となるから, u, v が直交 (orthogonal) するといい, $u \perp v$ と書く。

■ 例 A.5 ベクトル

$$u = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad w = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

の間の角度を計算すると, u, v 間の角度 ϕ と u, w 間の角度 θ はそれぞれ

$$\cos \phi = \frac{u^T v}{\|u\|_2 \|v\|_2} = 0 \Rightarrow \phi = 90^\circ$$

$$\cos \theta = \frac{u^T w}{\|u\|_2 \|w\|_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \theta = 45^\circ$$

となる。これが正しいことは図を書いてみれば分かる。 □

上で定義したベクトル空間 \mathbf{F}^n の内積は以下の性質をすべて有している。

- (1) 任意のスカラー $\alpha, \beta \in \mathbf{F}$ に対して, $\langle x, \alpha y + \beta z \rangle = \alpha \langle x, y \rangle + \beta \langle x, z \rangle$
- (2) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$
- (3) $\langle x, x \rangle \geq 0$ かつ $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$\sqrt{\langle u, u \rangle}$ はノルム条件をすべて満たす。これを内積から誘導されたノルム (induced norm) という。実際, $\sqrt{\langle u, u \rangle} = \|u\|_2$ である。

内積および内積から誘導されたノルムは, 以下の性質をもつ。

定理 A.3 任意の $u, v \in \mathbf{F}^n$ に対して, 以下の結果が成り立つ。

- (1) $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\|_2 \|v\|_2$ (Cauchy-Schwarz の不等式)。等式が成り立つのは, $u = \alpha v$ (α は定数) か $u = 0$, あるいは $v = 0$ のときに限る。
- (2) $\|u + v\|_2^2 + \|u - v\|_2^2 = 2\|u\|_2^2 + 2\|v\|_2^2$ (平行四辺形法則)
- (3) $u \perp v$ ならば, $\|u + v\|_2^2 = \|u\|_2^2 + \|v\|_2^2$ (Pythagoras の定理)

証明 まず, 任意の $\alpha \in \mathbf{F}$ について,

$$\langle \alpha u + v, w \rangle = \overline{\langle w, \alpha u + v \rangle} = \overline{\alpha \langle w, u \rangle + \langle w, v \rangle} = \overline{\alpha} \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$$

が成り立つ．すると上式および内積の性質 (1), (2) より

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle \alpha u + v, \alpha u + v \rangle = \alpha \langle \alpha u + v, u \rangle + \langle \alpha u + v, v \rangle \\ &= \alpha \bar{\alpha} \langle u, u \rangle + \alpha \langle v, u \rangle + \bar{\alpha} \langle u, v \rangle + \langle v, v \rangle \\ &= |\alpha|^2 \|u\|_2^2 + 2\operatorname{Re}(\bar{\alpha} \langle u, v \rangle) + \|v\|_2^2 \end{aligned} \tag{A.37}$$

が成り立つ．本展開式に $\alpha = t \langle u, v \rangle$ ($t \in \mathbf{R}$) を代入すると，すべての t に対して

$$\|u\|_2^2 |\langle u, v \rangle|^2 t^2 + 2|\langle u, v \rangle|^2 t + \|v\|_2^2 \geq 0 \tag{A.38}$$

が成立するので，

$$\|v\|_2^2 - \frac{4|\langle u, v \rangle|^4}{4\|u\|_2^2 |\langle u, v \rangle|^2} \geq 0 \Rightarrow |\langle u, v \rangle| \leq \|u\|_2 \|v\|_2 \tag{A.39}$$

を得る[†]．命題 (2) は $\langle \alpha u + v, \alpha u + v \rangle$ の展開式 (A.37) に $\alpha = 1$ と $\alpha = -1$ をそれぞれ代入して得られた二つの式を足すことによって得られる．命題 (3) はやはり $\alpha = 1$ と $\langle u, v \rangle = 0$ をこの展開式に代入することによって得られる．

A.5 行列と線形写像

A.5.1 像と零空間

行列 $A \in \mathbf{F}^{m \times n}$ にベクトル $x \in \mathbf{F}^n$ をかけると，新しいベクトル

$$y = Ax \in \mathbf{F}^m \tag{A.40}$$

が得られる．すなわち，行列 A は線形空間 \mathbf{F}^n から線形空間 \mathbf{F}^m への写像

$$A : \mathbf{F}^n \mapsto \mathbf{F}^m \tag{A.41}$$

と考えることができる^{††}．この写像は明らかに線形性質

$$A(ax + by) = a(Ax) + b(Ay), \quad a, b \in \mathbf{F} \tag{A.42}$$

を満たすので，線形写像 (linear mapping) という．

線形写像 A の像 (image, range) は

$$\operatorname{Im} A := \{y \in \mathbf{F}^m : y = Ax, x \in \mathbf{F}^n\} \tag{A.43}$$

で記述され， \mathbf{F}^m 上の部分空間である．また，定義域 \mathbf{F}^n において $x \neq 0$ であるが，その像が $Ax = 0$ となるようなベクトルが考えられる．その集合は A の零空間 (kernel, null space) と呼ばれ，

$$\operatorname{Ker} A := \{x \in \mathbf{F}^n : Ax = 0\} \tag{A.44}$$

で定義される． $\operatorname{Ker} A$ が写像の定義域 \mathbf{F}^n の部分空間であることが容易に分かる (練習問題 A.3)．これら部分空間の関係は図 A.3 に示される．

■ 例 A.6 行列

[†] $a > 0$ とする．任意の実数 t に対して 2 次多項式が $at^2 + bt + c = a(t + b/2a)^2 + (c - b^2/4a) \geq 0$ を満たすとき，その第一項は $t = -b/2a$ で零になるので， $c - b^2/4a \geq 0$ でなければならない．

^{††} 実は，行列 A がこの線形写像の行列表現となっている．

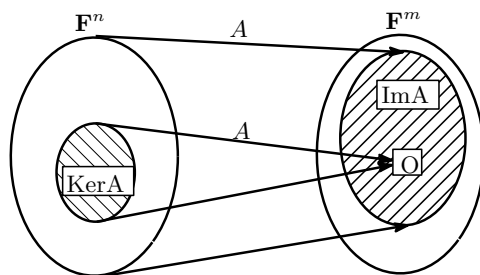


図 A.3 像と零空間

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

の場合, $x = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T$ を写像すると, 像 y は

$$y = Ax = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = (x_1 + x_2) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

であるので, 像空間は

$$\text{Im}A = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = \mathbf{R}^2 \quad (\text{A.45})$$

となる. そして,

$$Ax = 0 \Rightarrow x_2 = -x_1, \ x_3 = 0 \Rightarrow x = x_1 [1 \ -1 \ 0]^T$$

より零空間は次のようになる.

$$\text{Ker}A = \text{span} \{ [1 \ -1 \ 0]^T \} \quad (\text{A.46})$$

□

補題 A.1 $a_i (i = 1, 2, \dots, n)$ を行列 $A \in \mathbf{F}^{m \times n}$ の列ベクトルとすると,

$$\text{Im}A = \text{span}\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

が成り立つ. さらに,

$$\begin{aligned} \dim(\text{Im}A) &= A \text{ の線形独立な列の最大本数} \\ &= A \text{ の線形独立な行の最大本数} \end{aligned}$$

証明 任意の $x = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T \in \mathbf{F}^n$ に対して, $Ax = x_1 a_1 + \dots + x_n a_n \in \text{span}\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ より包含関係 $\text{Im}A \subseteq \text{span}\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ が成り立つ. 逆に, $y \in \text{span}\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ はある係数ベクトル $x = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T \in \mathbf{F}^n$ を用いて $y = x_1 a_1 + \dots + x_n a_n = Ax$ と表現できるので, $\text{span}\{a_1, a_2, \dots, a_n\} \subseteq \text{Im}A$ も成立する. よって, 両者が等しい.

また, $\text{span}\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ は $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ の中の線形独立なベクトルで張られる部分空間と同じなので, $\dim(\text{Im}A)$ が A の線形独立な列ベクトルの最大本数に等しい. さらに, A の線形独立な列ベクトルの最大本数と線形独立な行ベクトルの最大本

数が等しいので、 $\dim(\text{Im}A)$ が A の線形独立な行ベクトルの最大本数にも等しい。

明らかに、像 $\text{Im}A$ の次元は定義域 \mathbf{F}^n の次元よりは小さい。すなわち、

$$\dim(\text{Im}A) \leq n = \dim(\text{定義域}) = A \text{ の列数} \quad (\text{A.47})$$

である。

A.5.2 行列のランク

行列 A のランク (rank) は

$$\text{rank}(A) = \dim(\text{Im}A) \quad (\text{A.48})$$

と定義される。よって

$$\text{rank}(A) = A \text{ の線形独立な列ベクトルの最大本数} \quad (\text{A.49})$$

$$= A \text{ の線形独立な行ベクトルの最大本数} \quad (\text{A.50})$$

が成り立つ。例えば、例 A.6 では $\text{rank}(A) = 2$ である。

行列 $A \in \mathbf{F}^{m \times n}$ が、 $m \leq n$ (横長) かつ $\text{rank}(A) = m$ のとき、行フルランク (full row rank) であるという。同様に、 $n \leq m$ (縦長) かつ $\text{rank}(A) = n$ のとき、列フルランク (full column rank) であるという。フルランクの正方行列は正則行列 (nonsingular matrix) という。

行列積のランクについては、次の補題が知られている。その証明を理解する一助として写像の図を描いてみることを勧める。

補題 A.2

- (1) $A \in \mathbf{F}^{m \times n}$ で、 T と P が適当な次元をもつ正則行列であるとき、 $\text{rank}(A) = \text{rank}(AT) = \text{rank}(PA)$ が成立する。
- (2) (Sylvester の不等式) $A \in \mathbf{F}^{m \times n}$ 、 $B \in \mathbf{F}^{n \times k}$ とするとき、

$$\text{rank}(A) + \text{rank}(B) - n \leq \text{rank}(AB) \leq \min\{\text{rank}(A), \text{rank}(B)\}$$
 が成立する。

証明 (1): まず A と PA は次元が同じである。 A の i 列目を a_i とすると、 PA の i 列目は Pa_i となる。 $\sum c_i Pa_i = 0 \Leftrightarrow \sum c_i a_i = 0 (c_i \in \mathbf{F})$ なので、 A の線形従属な列の数は PA と同じである。よって、両者は同数の線形独立な列ベクトルをもつ。すなわち、両者のランクが等しい。同様に、 A と AT の線形独立な行の数は同じであり、よって $\text{rank}(A) = \text{rank}(AT)$ も成り立つ。

(2): まず $B: \mathbf{F}^k \mapsto \mathbf{F}^n$ 、 $A: \mathbf{F}^n \mapsto \mathbf{F}^m$ であり、 $\text{Im}B \subset \mathbf{F}^n$ 、 $\text{Im}A \subset \mathbf{F}^m$ に注意する。そして、 \mathbf{F}^n は $\mathbf{F}^n = \text{Im}B + (\text{Im}B)^\perp$ のように直交分解できる[†]。いま、 A の

[†] $(\text{Im}B)^\perp$ は $\text{Im}B$ の直交補空間と呼ばれ、そのベクトルは $\text{Im}B$ のすべてのベクトルと直交する。

定義域を $\text{Im}B$ に限定した写像 $A|_{\text{Im}B}$ を S と書き, その像の次元を r_S とする. すると, $\text{Im}AB = \text{Im}S$ が成り立ち, $\text{rank}(AB) = r_S$ となる. そして, $\text{rank}(A) = r_A = \dim(\text{Im}A)$, $\text{rank}(B) = r_B = \dim(\text{Im}B)$ とおく. 空間の関係 $\text{Im}AB = A\text{Im}B \subset \text{Im}A$, $\text{Im}A = A\mathbf{F}^n = A\text{Im}B + A(\text{Im}B)^\perp$ が成り立つ. すると, $r_S \leq \dim(\text{Im}A) = r_A$ が成り立つ. また, 像の次元が定義域の次元よりも小さいこと (式 (A.47) 参照) によれば, $r_S = \dim(A\text{Im}B) \leq r_B$ がいえる. さらに, $\dim(\text{Im}B)^\perp = n - r_B$ より $\dim A(\text{Im}B)^\perp \leq n - r_B$, 並びに $r_A = \dim(A\text{Im}B) + \dim A(\text{Im}B)^\perp \leq r_S + n - r_B$ から, $r_S \geq r_A + r_B - n$ を得る.

さらに, 行列の像, 零空間と行列式の間以下関係が成立する.

定理 A.4 正方形行列 $A \in \mathbf{F}^{n \times n}$ に対して, 以下の命題が等価である.

- (1) $\text{Ker}A \neq \{0\}$
- (2) $\text{Im}A \neq \mathbf{F}^n$
- (3) $\det(A) = 0$

証明 (1) \Leftrightarrow (2): $Ax = 0$ を満たす $x \neq 0$ が存在することと A に線形従属な列が存在することが等価である. このことはまた $\dim(\text{Im}A) < n$ と等価である. よって, (1) と (2) は等価である.

(2) \Leftrightarrow (3): まず, (2) と A に線形従属な列が存在することは等価である. 次に, 列の入れ替えとある列の係数倍を別の列に加えるという二つの基本列操作で常に A を下三角行列 AT (T は基本列操作の行列表現で $\det(T) \neq 0$ を満たす) に変換でき, しかも $\det(AT) = \det(A)\det(T)$ が成り立つ. すると, (2) が成り立てば下三角行列 AT に必ず零の列が現れ, よって $\det(AT) = 0 \Rightarrow \det(A) = 0$ となる. 逆に, (3) が成り立つとき $\det(AT) = 0$ となるが, これは下三角行列 AT に零の列があることを意味する. 補題 A.2 より基本列操作は行列のランク (線形独立な列ベクトルの最大本数) を変えないので, A にも線形従属な列が存在することになる. したがって, (2) も成立する.

本補題の証明から分かるように, $\det(A) = 0$ と A に線形従属な列/行が存在することは等価である.

例 A.7 行列

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} := [a_1 \ a_2 \ a_3]$$

の場合, $a_3 = 2a_1 + a_2$ なので

$$\text{Im}A = \text{span}\{a_1, a_2\} \neq \mathbf{R}^3, \quad \det(A) = 0$$

$$\text{Ker}A = \text{span}\{[2 \ 1 \ -1]^T\} \neq \{0\}$$

となることが容易に確認できる. □

A.5.3 線形代数方程式

線形代数方程式

$$Ax = b \quad (\text{A.51})$$

について考える．ここで， $A \in \mathbf{F}^{n \times m}$ と $b \in \mathbf{F}^n$ は与えられた行列， $x \in \mathbf{F}^m$ は変数ベクトルである．この方程式の左辺はベクトル x の要素による行列 A の列の線形結合として捉えることができる．したがって，上式が解をもつとき，ベクトル b は行列 A の列による線形結合で表せることになる．

次の結果はよく知られている．

定理 A.5 線形方程式 (A.51) について，以下の四つの命題が等価である．

- (1) 解 $x \in \mathbf{F}^m$ が存在する．
- (2) $b \in \text{Im}A$
- (3) $\text{rank} \begin{bmatrix} A & b \end{bmatrix} = \text{rank}(A)$
- (4) $\text{Ker}(A^*) \subset \text{Ker}(b^*)$

さらに，解が存在するとき，

- (5) 1つの解 x_0 が得られたとき，すべての解は次式で与えられる．

$$x_0 + \text{Ker}A = \{x_0 + y : y \in \text{Ker}A\} \quad (\text{A.52})$$

- (6) 解が一意であるための必要十分条件は A が列フルランクをもつことである．

証明 (1) \Leftrightarrow (2) : (1) が成り立てば， $\text{Im}A$ の定義より $b = Ax \in \text{Im}A$ となる．逆に (2) が成立するとき， b はある $x \in \mathbf{F}^m$ によって $b = Ax$ と書ける．つまり，解 x が存在する．

(2) \Leftrightarrow (3) : (2) と (3) が共に行列 $[A \ b]$ ，行列 A が同じ数の線形独立な列をもつことと等価であるから，その等価性は明らかである．

(3) \Leftrightarrow (4) : まず $T^*y = 0 \Leftrightarrow y^*T = 0$ に注意すれば，(4) は

$$y^*A = 0 \text{ ならば } y^*[A \ b] = 0 \quad (\text{A.53})$$

と等価であることが分かる．このことはまた A の線形従属の行の数が $[A \ b]$ より少ないことと等価である．行列ランクと線形独立な行の最大本数の関係を考えれば，これは $\text{rank}(A) \geq \text{rank}[A \ b]$ と等価である．さらに， $[A \ b]$ の列数が A より多いことから， $\text{rank}(A) \leq \text{rank}[A \ b]$ が成り立つ．ゆえに，(3) と (4) は等価である．

さらに x_0 を 1つの解とすると， $Ay = 0$ ならば $A(x_0 + y) = b$ が成り立つので， $x_0 + y$ も解となる．逆に $Ax = b$ ならば $A(x - x_0) = 0$ ，つまり $y = x - x_0 \in \text{Ker}A$ となる．よって，(5) がいえる．最後に， A が列フルランクであることと $\text{Ker}A = \{0\}$ が等価なので，(6) は明らかである．

■ 例 A.8 次の行列とベクトル

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad b_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

が与えられたとする． $Ax = b_1$ を展開すると

$$x_1 + 2x_3 = 0, \quad x_1 + 2x_3 = 1, \quad x_2 + x_3 = 0$$

となる．最初の二つの式は矛盾しているから，解が存在しない．これは $b_1 \notin \text{Im}A$ と対応する．一方， $b_2 \in \text{Im}A$ について $Ax = b_2$ を展開すると

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_3 = 1 \\ x_2 + x_3 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 2x_3 \\ 2 - x_3 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad x_3 \text{ は任意} \quad (\text{A.54})$$

が得られる．また， $x_0 = [-1 \ 1 \ 1]^T$ は $Ax = b_2$ の1つの解であり， $\text{Ker}A = \text{span}\{[2 \ 1 \ -1]^T\}$ であるので，定理 A.5 によれば，一般解は

$$x = x_0 + y = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 + 2\alpha \\ 1 + \alpha \\ 1 - \alpha \end{bmatrix} \quad (\text{A.55})$$

で与えられる．これは前記の解に $x_3 = 1 - \alpha$ とおいたときの解に一致する． \square

A.6 固有値と固有ベクトル

正方行列 $A \in \mathbf{C}^{n \times n}$ ，スカラー $\lambda \in \mathbf{C}$ ，ベクトル $u \in \mathbf{C}^n$ が関係式

$$Au = \lambda u, \quad u \neq 0 \quad (\text{A.56})$$

を満たすとき， λ を A の固有値 (eigenvalue)， u を A の固有ベクトル (eigenvector) という．ただし，たとえ行列 A が実行列であっても，その固有値と固有ベクトルは一般に実数になるとは限らない．また， u の係数倍 $\alpha u (\alpha \neq 0 \in \mathbf{C})$ も固有ベクトルとなることは自明である．等価的な定義式は次のようになる．

$$(A - \lambda I)u = 0, \quad u \neq 0 \quad (\text{A.57})$$

また，定理 A.4 より (A.57) 式が成り立つとき

$$\det(\lambda I - A) = 0 \quad (\text{A.58})$$

も成立する．よって，固有値は行列式 $\det(\lambda I - A)$ の根となる．この行列式 $\det(\lambda I - A)$ は A の特性多項式 (characteristic polynomial) と呼ばれ，特性多項式の根は特性根と呼ばれる． $\det(\lambda I - A)$ が n 次の多項式であり， n 個の特性根をもつ．すると， n 次元の行列は必ず n 個の固有値をもつことになる．

【例題 A.1】 次の実行列の固有値と固有ベクトルを求めよ．

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}$$

解答 特性多項式は

$$\det(\lambda I - A) = (\lambda - 4)(\lambda + 2)$$

である．これより，固有値は $\lambda = -2, 4$ となることが分かる．また，固有ベクトルは以下のように求めることができる．

$\lambda_1 = -2$ に対応する固有ベクトルを $u = [\alpha \ \beta]^T$ とおく．このベクトルは式

$$(A - \lambda_1 I)u = 0$$

を満たす．この連立方程式を解くと， $\beta = -2\alpha$ となることが分かる．よって， $\alpha = 1/2$ と選ぶと固有ベクトルの一つ $u = [1/2 \ -1]^T$ を得る．

同様に， $\lambda_2 = 4$ に対応する固有ベクトルを $v = [\gamma \ \delta]^T$ とおいて，連立方程式 $(A - \lambda_2 I)v = 0$ を解くと，固有ベクトルの一つである $v = [1/4 \ 1]^T$ が求まる．この例題における固有ベクトルは図 A.4 に示されている．◇

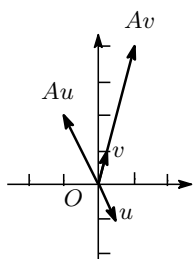


図 A.4 固有値と固有ベクトル

A を線形写像として考えるとき，固有ベクトルは写像 A の定義域にある特別なベクトルで， A で写像しても同じ直線上に位置し，長さだけが $|\lambda|$ 倍伸びる．したがって， A の固有値の絶対値は対応する固有ベクトルを増幅する倍数として理解することができる．固有値が実数である場合，その符号は像ベクトルと固有ベクトルの方向関係を示す．図 A.4 は前記例題の固有ベクトルとその A による写像を示している．

この例では，固有値が実数でその固有ベクトルも要素がすべて実数の実ベクトルとなっている．任意の実行列 $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ に対して，固有値が実数であればその固有ベクトルも実ベクトルとなる．なぜなら， λ が実数の場合，行列 $(A - \lambda I)$ も実行列であるため，その零空間 $\text{Ker}(A - \lambda I)$ が \mathbf{R}^n の部分空間となる．よって，固有ベクトルはこの零空間に含まれるので，実ベクトルとすることができる．

一方， $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ の複素固有値に対応する固有ベクトルは必ず複素ベクトルとならなければならない．なぜなら， λ が複素なので，もし固有ベクトル u が実ベクトルであつたら， $Au = \lambda u$ の左辺は実ベクトルで，右辺は複素ベクトルであるため，矛盾が生じる．

行列 A の固有値集合をそのスペクトル (spectrum) と呼び， $\sigma(A)$ で表す[†]．すなわち， λ_i を特性根とすれば

$$\sigma(A) := \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\} \quad (\text{A.59})$$

である．また，行列 A の固有値がすべて実数である場合， $\lambda_{\max}(A)$ で A の最大固有値， $\lambda_{\min}(A)$ で最小固有値を表すことにする．

[†] 後に定義される特異値と間違わないように．

正方行列 A を正則行列 T で $\bar{A} = T^{-1}AT$ にする変換を相似変換 (similarity transformation) と呼ぶことにする. 固有値と固有ベクトルについては, 以下の基本的な性質がある.

定理 A.6 正方行列 $A \in \mathbf{F}^{n \times n}$ に対して, 以下が成り立つ.

- (1) $T \in \mathbf{F}^{n \times n}$ を正則行列とすると, $\lambda(T^{-1}AT) = \lambda(A)$ が成り立つ.
- (2) $\lambda(A^T) = \lambda(A)$
- (3) 相異なる固有値 $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ に関する固有ベクトル u_1, \dots, u_k が線形独立である.
- (4) 固有値がすべて異なれば, A を対角行列に相似変換することができる.

証明 (1) $T^{-1}AT - \lambda I = T^{-1}(A - \lambda I)T$ より $\det(T^{-1}AT - \lambda I) = \det(T^{-1})\det(A - \lambda I)\det(T) = \det(A - \lambda I)$ が成立するから, (1) がいえる.

(2) $\det(A^T - \lambda I) = \det((A - \lambda I)^T) = \det(A - \lambda I)$ より.

(3) スカラ a_1, \dots, a_k について

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_k u_k = 0 \quad (\text{A.60})$$

が成り立つとする. 行列 $(A - \lambda_1 I) \cdots (A - \lambda_{i-1} I)(A - \lambda_{i+1} I) \cdots (A - \lambda_k I)$ を左から上式にかけると, $a_i(\lambda_i - \lambda_1) \cdots (\lambda_i - \lambda_{i-1})(\lambda_i - \lambda_{i+1}) \cdots (\lambda_i - \lambda_k)u_i = 0$ を得る. $u_i \neq 0$ で固有値が相異なるため, $a_i = 0$ となる. i が任意なので, u_1, \dots, u_k は線形独立となる.

(4) すべての固有値に対して, 固有値定義式の両辺を横に並べれば

$$A[u_1 \ u_2 \ \cdots \ u_n] = [u_1 \ u_2 \ \cdots \ u_n] \text{diag}(\lambda_1 \ \lambda_2 \ \cdots \ \lambda_n) \quad (\text{A.61})$$

が得られる. 固有ベクトルの線形独立性より $T = [u_1 \ u_2 \ \cdots \ u_n]$ が正則となり, 逆行列をもつ. よって, 相似変換 $T^{-1}AT$ で A を対角化できる.

複素行列であっても 2 番目の性質は $\lambda(A^*) = \lambda(A)$ とならないことに注意されたい.

重複固有値をもつ行列が Jordan 標準形 (Jordan canonical form) に相似変換できることは知られている. 証明は煩雑になるので, ほかの成書 (例えば, 文献¹⁾) を参照されたい.

定理 A.7 任意の複素行列 $A \in \mathbf{C}^{n \times n}$ に対し, ある正則行列 T が存在して A を Jordan 標準形

$$T^{-1}AT = J \quad (\text{A.62})$$

に相似変換できる. ただし,

$$J = \text{diag}(J_1, J_2, \dots, J_l), \quad J_i = \text{diag}(J_{i1}, J_{i2}, \dots, J_{im_i}) \quad (\text{A.63})$$

$$J_{ij} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_i & 1 \\ & & & & \lambda_i \end{bmatrix} \in \mathbf{C}^{n_{ij} \times n_{ij}} \quad (\text{A.64})$$

である．また， $\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^{m_i} n_{ij} = n$ で， $\{\lambda_i : i = 1, \dots, l\}$ は A の相異なる固有値である．固有値 λ_i に関するブロック数 m_i はその幾何的重複度 (geometric multiplicity) といい， λ_i の全個数 $\sum_{j=1}^{m_i} n_{ij}$ はその代数的重複度 (algebraic multiplicity) という．

変換行列 T を J の分割に合わせて

$$T = \begin{bmatrix} T_1 & T_2 & \dots & T_l \end{bmatrix}$$

$$T_i = \begin{bmatrix} T_{i1} & T_{i2} & \dots & T_{im_i} \end{bmatrix}, \quad T_{ij} = \begin{bmatrix} t_{ij1} & t_{ij2} & \dots & t_{ijn_{ij}} \end{bmatrix}$$

のように分割すると， t_{ij1} は A の固有ベクトルとなり，

$$At_{ij1} = \lambda_i t_{ij1} \quad (\text{A.65})$$

を満たす．そして $t_{ijk} \neq 0 (k \geq 2)$ は次の線形方程式

$$(A - \lambda_i I)t_{ijk} = t_{ij(k-1)} \quad (\text{A.66})$$

の解であり， A の一般化固有ベクトル (generalized eigenvector) と呼ばれる．

【例題 A.2】 行列

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

を Jordan 標準形に変換せよ．

解答 A の特性多項式は $\det(\lambda I - A) = (\lambda - 2)(\lambda + 1)^3$ であるから，その固有値は単根 $\lambda_1 = 2$ と 3 重根 $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = -1$ となる．固有値 λ_i に対応する固有ベクトルを u_i で表す． $u_1 = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T$ と置くと，

$$(A - 2I)u_1 = \begin{bmatrix} x_2 + x_4 \\ -3x_2 \\ x_4 - 2x_3 \\ -(x_2 + 4x_4) \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow x_2 = x_3 = x_4 = 0, \quad x_1 \text{ は任意}$$

を得る．そこで， $x_1 = 1$ とすれば $u_1 = [1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ となる．一方，

$$A + I = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Im}(A + I) = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

であり，固有値 -1 に対応する固有ベクトルを $u = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T$ とすると

$$(A+I)u = \begin{bmatrix} 3x_1 + x_2 + x_4 \\ 0 \\ x_3 + x_4 \\ -(x_3 + x_4) \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow x_3 = -x_4, 3x_1 = -x_2 - x_4$$

が得られる． $x_4 = 1$ とし， x_2 をそれぞれ $0, -1$ とすると，独立した 2 本の固有ベクトル

$$u_2 = [0 \quad -1 \quad -1 \quad 1]^T, \quad u_3 = [-1/3 \quad 0 \quad -1 \quad 1]^T$$

を得る．最後に，固有値 -1 の一般化固有ベクトルを求めるにあたり，固有ベクトルが $\text{Im}(A+I)$ に属するとき限り一般化固有ベクトルが存在すること (式 (A.66) より) に注意する．すると， u_3 だけが対応する一般化固有ベクトルを有することが分かる．そこで，この一般化固有ベクトルを $u_4 = [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4]^T$ とおき， $(A+I)u_4 = u_3$ を展開すると $x_3 + x_4 = -1$ ， $3x_1 + x_2 + x_4 = -1/3$ となる．その解の一つは

$$u_4 = [0 \quad 1/3 \quad -1 \quad 0]^T$$

である．行列 $T = [u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad u_4]$ を使って A を相似変換すると，Jordan 標準形

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 2 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & 1 \\ & & & -1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.67})$$

を得る．重複固有値 -1 の幾何学的重複度は 2，代数的重複度は 3 である． \diamond

A.6.1 Cayley-Hamilton の定理

次の Cayley-Hamilton 定理は線形システムの構造を解析するとききわめて重要なものである．

定理 A.8 (Cayley-Hamilton) $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ とし，

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_n \quad (\text{A.68})$$

とおく．このとき，次式が成り立つ．

$$A^n + a_1 A^{n-1} + \cdots + a_n I = 0 \quad (\text{A.69})$$

A.7 不変部分空間

$A: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ を線形変換と考える．このとき， \mathbb{C}^n の部分空間 S に含まれる任意のベクトルを A で写像すると再び S に戻る，すなわち

$$Ax \in S, \quad \forall x \in S \quad (\text{A.70})$$

ならば， S を写像 A の不変部分空間という．あるいは，単に S が A 不変 (A -invariant) であるという．このことを $AS \subset S$ と書く場合がある．線形写像に関する不変部分空間の概念は，システム理論において構造解析を行うときに重要な役割を果たす．

不変部分空間の例を挙げよう．例えば， λ を A の固有値， x を対応する固有ベクトルとすると， $Ax = \lambda x$ が成り立つが，これは固有ベクトルで張られる 1 次元の部分空間 $\text{span}\{x\}$ が A 不変であることを意味する．

【例題 A.3】 $\{0\}$ ， \mathbb{C}^n ， $\text{Ker}A$ ， $\text{Im}A$ がすべて A 不変部分空間であることを示せ．

解答 $A\{0\} \subset \{0\}$ ， $A\mathbb{C}^n \subset \mathbb{C}^n$ は明らかである．任意の $x \in \text{Ker}A$ に対して $Ax = 0$ であり， $0 \in \text{Ker}A$ より $\text{Ker}A$ は A 不変である．また，本節で扱う行列 A が正方なので， $\text{Im}A \subset \mathbb{C}^n$ ，つまりその値域が定義域に含まれている．よって， $\text{Im}A$ を A でもう一回写像してもやはり $\text{Im}A$ に含まれる． \diamond

一般に， A の固有値 $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ (相異なる必要はない) に対応するすべての固有ベクトル，あるいはすべての固有ベクトルとすべての一般化固有ベクトルを基底とする部分空間は A 不変である．次の例を見よう．

■ 例 A.9 次の Jordan 標準形

$$A \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & \\ & \lambda_1 & \\ & & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

をもつ行列 $A \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$ について，以下の部分空間を考える．

$$S_1 = \text{span}\{x_1\}, \quad S_{12} = \text{span}\{x_1, x_2\}$$

$$S_2 = \text{span}\{x_2\}$$

$$S_3 = \text{span}\{x_3\}, \quad S_{13} = \text{span}\{x_1, x_3\}$$

x_1, x_3 が A の固有ベクトルであるので， S_1 と S_3 が不変部分空間であることは前に示した通りである． S_{12} に関しては， $x \in S_{12}$ ならば $x = ax_1 + bx_2 \Rightarrow Ax = aAx_1 + bAx_2 = a\lambda_1 x_1 + b(x_1 + \lambda_1 x_2) = (a\lambda_1 + b)x_1 + (b\lambda_1)x_2 \in S_{12}$ となる．よって， S_{12} も A 不変である．同様に， S_{13} も A 不変である．しかし， $S_2 = \text{span}\{x_2\}$ は不変部分空間ではない．なぜなら， $Ax_2 = \lambda_1 x_2 + x_1$ であるが， x_2 と線形独立な x_1 が S_2 に含まれていないため $Ax_2 \notin S_2$ となる． \square

次の定理は A 不変部分空間の基底を用いて行列 A をブロック三角行列に相似変換できることを示すものである．

定理 A.9 $S \subset \mathbb{C}^n$ を A 不変部分空間とし，その基底を $\{t_1, \dots, t_k\}$ ($k < n$) とする．このとき，

- (1) ある行列 $A_{11} \in \mathbb{C}^{k \times k}$ について次式が成り立つ．

$$AT_1 = T_1 A_{11}, \quad T_1 = [t_1 \ \cdots \ t_k]$$

- (2) 行列

$$T = [t_1 \ \cdots \ t_k \mid t_{k+1} \ \cdots \ t_n] = [T_1 \ T_2]$$

を正則にするベクトル $t_{k+1}, \dots, t_n \in \mathbb{C}^n$ が存在し，

$$AT = T \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$$

を満たす．ただし， A_{21} ， A_{22} は適当な次元をもつ行列である．

証明 (1) $At_i \in S$ ($1 \leq i \leq k$) なので， $\exists \alpha_{ji} \in \mathbf{C}$ ($1 \leq j \leq k$)

$$At_i = \sum_{j=1}^k \alpha_{ji} t_j = T_1 \begin{bmatrix} \alpha_{1i} \\ \vdots \\ \alpha_{ki} \end{bmatrix}$$

と書ける．命題(1)は上式をすべての i について横に並べたものである．ただし， $A_{11} = (\alpha_{ji})$ である．

(2) ベクトル集合 $\{t_{k+1}, \dots, t_n\}$ の存在は自明である． $T^{-1}AT_2 = \begin{bmatrix} A_{12} \\ A_{22} \end{bmatrix}$ とおき， $AT_1 = T_1 A_{11}$ を使えば結果を得る．

A.7.1 写像の不変部分空間への制限

写像 A をその不変部分空間 S に制限して考えてみよう．これを $A|_S$ で表す．上述の定理によれば， S の基底で作った行列 T に対して必ず

$$AT = T\underline{A} \tag{A.71}$$

を満たす正方行列 \underline{A} が存在する． \underline{A} は部分空間に制限された写像 $A|_S$ の行列表現を表す．明らかに， $\sigma(\underline{A})$ の要素は行列 A の固有値でもあり，これを写像 A を部分空間 S に制限したときの固有値といい，

$$\sigma(A|_S) = \sigma(\underline{A}) \tag{A.72}$$

で表す．

A.7.2 \mathbf{R}^n 上の不変部分空間

前にも述べたように，たとえ実行列であっても，その固有値および対応する固有ベクトルが複素数になることがある．そのとき，複素固有ベクトルを基底とする部分空間はおのずと複素部分空間になる．これはいままで \mathbf{C}^n 上の不変部分空間を議論してきた理由である．しかし，実行列に対しては \mathbf{R}^n 上の不変部分空間をもつ可能性もある．例えば，複素の固有値 $a + jb$ と固有ベクトル $x + jy$ を有する $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ の場合， $A(x + jy) = (a + jb)(x + jy)$ の両辺の実部と虚部を比較することによって $Ax = ax - by$ ， $Ay = bx + ay$ が得られる．すると，式

$$A \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$$

が成立する．さらに，固有値が複素数 ($b \neq 0$) である仮定から x ， y は線形独立である[†]．したがって， $U = [x, y]$ とおいたとき

[†] まず， $a - jb$ も A の固有値であり，対応する固有ベクトルは $x - jy$ である．しかも， $x + jy$ とは線形独立である (固有値が異なるため)． x ， y が線形独立でなければ，非零のスカラー $c \in \mathbf{R}$ があり， $y = cx$ が成り立つ．すると， $x + jy = (1 + jc)x$

$$AU = U\Lambda, \quad \Lambda := \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \tag{A.73}$$

が成り立ち、 $\text{Im}U \subset \mathbf{R}^n$ は A の実不変部分空間となる。この背景には実行列が複素固有値をもつと、必ずその共役も固有値としてもつことがある。実際、 Λ の固有値は $a \pm jb$ であり、これは A の固有値でもある。

実不変部分空間には A の複素固有ベクトルを含まないが、それを生成することができる。例えば、上の例では Λ の固有値に対応する固有ベクトルは $v_{1,2} = [1 \pm j]^T$ であり、 A の固有ベクトルは $[x \ y]v_{1,2} = x \pm jy$ で生成される。

定理 A.10 $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ に関する n 次元の不変部分空間を $S = \text{Im}T$ とし、 S に制限した写像 $A|_S$ の行列表現を \underline{A} とする。 $S \subset \mathbf{R}^n$ となるための必要十分条件は \underline{A} が実行列であることである。

証明 必要性： $AT = T\underline{A}$ において T が実行列であるので、 \underline{A} も実行列でなければならない。よって、必要性は明らかである。

十分性： $a_1 + jb_1$ を \underline{A} の複素固有値とする。 \underline{A} が実行列であることより $a_1 - jb_1$ も \underline{A} の固有値となる。すると、上の議論より正則変換行列 $T_1 = [U \ U_\perp] \in \mathbf{R}^{n \times n}$ について

$$AT_1 = T_1 \begin{bmatrix} \Lambda_1 & * \\ 0 & A_1 \end{bmatrix}, \quad \Lambda_1 = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{bmatrix}$$

が成り立ち、 $A_1 \in \mathbf{R}^{(n-2) \times (n-2)}$ である。また、 \underline{A} の残りの固有値は A_1 の固有値に含まれる。実数固有値 $\lambda_2 \in \sigma(\underline{A}) \cap \sigma(A_1)$ に関する A_1 の固有ベクトルを $u \in \mathbf{R}^{n-2}$ とすると、正則変換行列 $T_{22} = [u \ u_\perp]$ で A_1 を

$$A_1 T_{22} = T_{22} \begin{bmatrix} \lambda_2 & * \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}, \quad A_2 \in \mathbf{R}^{(n-3) \times (n-3)}$$

に変換できる。すると、

$$AT_1 T_2 = T_1 T_2 \begin{bmatrix} \Lambda_1 & * & * \\ 0 & \lambda_2 & * \\ 0 & 0 & A_2 \end{bmatrix}, \quad T_2 = \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & T_{22} \end{bmatrix}$$

が成り立つ。以下、 A_2 に対して同様な変換を行っていくと、有限回 (例えば k 回) の変換で \underline{A} の固有値をとり尽くすことができる。このとき、

$$A \prod_{i=1}^k T_i = \prod_{i=1}^k T_i \begin{bmatrix} \Lambda_1 & * & * & * & * \\ & \lambda_2 & * & * & * \\ & & \ddots & * & * \\ & & & \Lambda_k & * \\ & & & & A_k \end{bmatrix}$$

が得られる (k 回目で固有値が実数であるとき、 $\Lambda_k \in \mathbf{R}$ と考える)。そこで、

と $x - jy = (1 - jc)x$ は線形従属となり、矛盾する。

$$A = \begin{bmatrix} \Lambda_1 & * & * & * \\ & \lambda_2 & * & * \\ & & \ddots & * \\ & & & \Lambda_k \end{bmatrix}$$

とおく．その次元は $\dim(S)$ と等しく， n である． T を $\prod_{i=1}^k T_i$ の最初の n 列とすれば， $AT = T\underline{A}$ が成り立ち， $S = \text{Im}T \subset \mathbf{R}^n$ は A の実不変部分空間となる．

また，前記定理の証明から直ちに以下の結果を得る．この系は，正方な実行列を必ず実変換行列によって実ブロック三角行列に変換できることを示すものである．これは定理 A.9 の複素ブロック三角行列への変換とは異なるものである．

系 A.1 $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ について， $S \subset \mathbf{R}^n$ を A 不変部分空間とし，その基底を $\{t_1, \dots, t_k\}$ ($k < n$) とする．このとき，

- (1) ある行列 $A_{11} \in \mathbf{R}^{k \times k}$ について次式が成り立つ．

$$AT_1 = T_1 A_{11}, \quad T_1 = [t_1 \ \cdots \ t_k]$$

- (2) 行列

$$T = [t_1 \ \cdots \ t_k \mid t_{k+1} \ \cdots \ t_n] = [T_1 \ T_2]$$

を正則にするベクトル $t_{k+1}, \dots, t_n \in \mathbf{R}^n$ が存在し，

$$AT = T \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$$

を満たす．ただし， A_{21} ， A_{22} は適当な次元をもつ実行列である．

A.8 2次形式と正定行列

A.8.1 2次形式とエネルギー関数

ベクトル $x = [x_1 \ x_2]^T$ のスカラー関数 $ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2$ は，すべての項が変数 x_1, x_2 の2次関数[†]となっているため，2次形式 (quadratic form) と呼ばれる．物理系のエネルギーは物理量 (状態) の2次関数で表される場合が多い．例えば，質量 m の運動エネルギー $mv^2/2$ は速度の2次関数である．また，慣性モーメントが J である剛体の回転運動エネルギーも角速度 ω の2次関数 $J\omega^2/2$ で与えられる．システムの安定性や制御性能はエネルギーと密接に関係しているので，2次形式はシステム解析と設計によく現れる．これに関しては，8章と3.2.3項のLyapunov安定解析でもう少し詳しい説明がある．

一般に， n 次元の実ベクトル x に関する2次形式は

[†] 交差項 x_1x_2 も2次とみなす．

$$\begin{aligned}
 V(x) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij} x_i x_j \\
 &= (b_{11}x_1^2 + b_{12}x_1x_2 + \cdots + b_{1n}x_1x_n) + \cdots \\
 &\quad + (b_{n1}x_nx_1 + b_{n2}x_nx_2 + \cdots + b_{nn}x_n^2), \quad b_{ij} \in \mathbf{R}
 \end{aligned} \tag{A.74}$$

であるが, $x_i x_j = x_j x_i$ を使い,

$$a_{ii} = b_{ii}, \quad a_{ij} = a_{ji} = \frac{b_{ij} + b_{ji}}{2}, \quad i \neq j \tag{A.75}$$

と置き直せば, 常に対称な $A = (a_{ij})$ を用いて

$$V(x) = x^T A x \tag{A.76}$$

のように表せる. 例えば, 上の例では

$$ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2 = [x_1 \ x_2] \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

と書ける.

同様に, 複素ベクトル $x \in \mathbf{C}^n$ に関する2次形式はエルミート行列[†] $A^* = A$ を用いて

$$V(x) = x^* A x \tag{A.77}$$

で定義される. ここで, エネルギーが実数であることに対応させるために2次形式も実数に限定して考えている. これは, 複素ベクトルの2次形式を上記のように定義したわけである ($\overline{V(x)} = V(x)$ が成り立っている).

さて, エネルギーが常に正であるので, 対応をとるためには2次形式も正值をとらなければならない. すべての(非零) $x \in \mathbf{F}^n$ に対して, $V(x) = x^* A x \geq 0$ を満たす2次形式を半正定関数 (positive semi-definite function) と呼び, $V(x) = x^* A x > 0$ を満たす2次形式を正定関数 (positive definite function) と呼ぶ. この定義から分かるように, 2次形式が正定か否かはベクトル x によらず, 係数行列 A のみによって決まる. このような性質を有する行列は次節で述べる正定行列/半正定行列となる.

A.8.2 正定行列と半正定行列

エルミート行列 $A = A^*$ は, 任意の $x \neq 0$ に対し $x^* A x > 0$ を満たせば, 正定行列 (positive definite matrix) といい, $A > 0$ と書く. また, 任意の $x \neq 0$ に対し $x^* A x \geq 0$ を満たせば, 半正定行列 (positive semi-definite matrix) といい, $A \geq 0$ と書く. 例えば, $B \in \mathbf{F}^{m \times n}$ に対して

$$x^* B^* B x = \|Bx\|_2^2 \geq 0 \tag{A.78}$$

となるので, $B^* B \geq 0$ である.

エルミート行列 A が (半) 正定行列となるための条件は次の補題で与えられる.

定理 A.11 $A \in \mathbf{F}^{n \times n}$ をエルミート行列とする. このとき, 以下の命題が成り立つ.

[†] エルミート行列の固有値がすべて実数であることに注意する (練習問題 A.12).

- (1) $A \geq 0$ の必要十分条件はその固有値がすべて非負であることである .
- (2) $A > 0$ の必要十分条件はその固有値がすべて正であることである .
- (3) $A \geq 0$ とするとき , $B \in \mathbf{F}^{n \times r}$ が存在し , A を $A = BB^*$ のように分解できる . ただし , $r \geq \text{rank}(A)$ である .

証明 練習問題 A.13 によると , エルミート行列 A はユニタリ行列 (unitary matrix)[†] $U \in \mathbf{F}^{n \times n}$ によって

$$A = U \text{diag}(\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n) U^* \quad (\text{A.79})$$

のように分解できる . ただし , λ_i は A の固有値である . すると , $y = U^*x$ とおけば

$$x^* A x = y^* \text{diag}(\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n) y = \sum_{i=1}^n \lambda_i |y_i|^2 \quad (\text{A.80})$$

となる . 一つでも負の固有値があれば , 例えば $\lambda_i < 0$ ならば , $y_i = 1, y_j = 0 (\forall j \neq i)$ について $x^* A x = \lambda_i < 0$ となる . 一方 , $y \neq 0$ と $x \neq 0$ は等価である . よって , (1) と (2) の結論を得る .

さらに , $A \geq 0$ のとき , (A.79) の分解式よりそのランクは非零の固有値の数に等しい . 列と行の入れ替えによって (その行列表現がユニタリである) 常に A の固有値を大きい順に並べることができる . すると , すべての $i > r \geq \text{rank}(A)$ について $\lambda_i = 0$ となる . よって

$$A = U \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \sqrt{\lambda_r} & \\ 0 & \cdots & 0 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \vdots \\ & & \sqrt{\lambda_r} & 0 \end{bmatrix} U^* \quad (\text{A.81})$$

となる . $B^* = [\text{diag}(\sqrt{\lambda_i}) \ 0] U^*$ とおけばよい .

一方 , 半正定行列 A の平方根は

$$A = A^{1/2} A^{1/2} \quad (\text{A.82})$$

を満たす半正定行列 $A^{1/2} = (A^{1/2})^* \geq 0$ として定義される . 式 (A.79) から分かるように , $A^{1/2}$ は

$$A^{1/2} = U \text{diag}(\sqrt{\lambda_1} \cdots \sqrt{\lambda_n}) U^* \quad (\text{A.83})$$

のように計算できる .

A.9 行列のノルムと特異値

A.9.1 行列ノルム

$A = (a_{ij}) \in \mathbf{C}^{m \times n}$ とする . この行列によるベクトルの写像は図 A.5 のように図示することができる . システムの立場から行列を増幅器 , ベクトルを信号として捉えれば , u は入力信号 , Au は出力信号と見なせる .

[†] $U^*U = UU^* = I$ を満たす行列 .

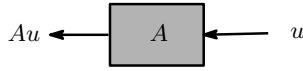


図 A.5 行列によるベクトルの写像

すると、行列のノルムは信号を増幅する倍数として考えることができる。よって、行列のノルムは入出力ベクトルのノルムの比で定義できる。このように定義されるノルムは誘導ノルム (induced norm) という。ただし、入出力ベクトルのノルムの比は一定ではなく、入力ベクトルの方向によって変わるので、その比の上限を行列のノルムと考える。例えば、

$$\|A\|_1 := \sup_{u \neq 0} \frac{\|Au\|_1}{\|u\|_1} \tag{A.84}$$

$$\|A\|_2 := \sup_{u \neq 0} \frac{\|Au\|_2}{\|u\|_2} \tag{A.85}$$

$$\|A\|_\infty := \sup_{u \neq 0} \frac{\|Au\|_\infty}{\|u\|_\infty} \tag{A.86}$$

はすべて行列 A のノルムである。

また、幾何学の立場からは行列 A をベクトル空間 C^n からベクトル空間 C^m への写像とみなせる。行列の誘導ノルムはこの写像によるベクトルノルムの伸び率の上限を表すことになる。

■ 例 A.10 行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ に入力ベクトル $u_1 = [1 \ 0]^T$, $u_2 = [0 \ 1]^T$, $u_3 = [1 \ 1]^T/\sqrt{2}$ をかけると、それぞれ出力ベクトル $y_1 = [1 \ 3]^T$, $y_2 = [2 \ 4]^T$, $y_3 = [3 \ 7]^T/\sqrt{2}$ を得る。すると、入出力 2 ノルムの比は $\sqrt{10}$, $2\sqrt{5}$, $\sqrt{29}$ となり、それぞれ異なることが分かる。 □

上記の行列ノルムは入力ベクトル u に依存せず、以下のように行列の要素だけによって決まる。

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^m |a_{ij}| \quad (\text{列の和}) \tag{A.87}$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^*A)} \tag{A.88}$$

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \quad (\text{行の和}) \tag{A.89}$$

■ 例 A.11 例として 1 ノルムの公式を示そう。まずベクトル 1 ノルムの定義より

$$\begin{aligned} \|Au\|_1 &= \sum_{i=1}^m \left| \sum_{j=1}^n a_{ij}u_j \right| \leq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}| |u_j| = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m |a_{ij}| \right) |u_j| \\ &\leq \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^m |a_{ij}| \sum_{j=1}^n |u_j| = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^m |a_{ij}| \|u\|_1 \\ &\Rightarrow \frac{\|Au\|_1}{\|u\|_1} \leq \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^m |a_{ij}| \end{aligned}$$

が成り立つ。この不等式は任意のベクトル u についていえるので、左辺のノルム比の

上限も同じ不等式を満たす．すなわち， $\|A\|_1 \leq \max_j \sum_{i=1}^m |a_{ij}|$ ．次に，列の和の最大値は j^* 列目でとると仮定し，つまり

$$\sum_{i=1}^m |a_{ij^*}| = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^m |a_{ij}|$$

とする． $u_* = e_{j^*}$ (j^* 番目の要素だけが 1 で，ほかはすべて零の列ベクトル) とすると， $\|u_*\| = 1$ となり

$$\begin{aligned} \|Au_*\|_1 &= \sum_{i=1}^m |a_{ij^*}| = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^m |a_{ij}| = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^m |a_{ij}| \|u_*\|_1 \\ \Rightarrow \frac{\|Au_*\|_1}{\|u_*\|_1} &= \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^m |a_{ij}| \Rightarrow \|A\|_1 \geq \frac{\|Au_*\|_1}{\|u_*\|_1} = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^m |a_{ij}| \end{aligned}$$

が得られる．よって，式 (A.87) が成り立つ． \square

誘導ノルムの重要な性質として，次の劣乗法性と呼ばれるものが成立する．

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\| \quad (\text{A.90})$$

これは次のようにして容易に分かる．

$$y = Av, \quad v = Bu$$

とおくと

$$\begin{aligned} \frac{\|y\|}{\|u\|} &= \frac{\|y\| \|v\|}{\|v\| \|u\|} \leq \sup \frac{\|y\|}{\|v\|} \sup \frac{\|v\|}{\|u\|} \Rightarrow \sup \frac{\|y\|}{\|u\|} \leq \sup \frac{\|y\|}{\|v\|} \sup \frac{\|v\|}{\|u\|} \\ &\Rightarrow \|AB\| \leq \|A\| \|B\| \end{aligned}$$

となる．

A.9.2 特異値

前項では行列のノルムを述べたが，それはあらゆる方向の入力ベクトルを増幅する最大可能な倍数を表している．一方，ベクトルには方向性があり，方向が違うと，行列によって増幅される度も異なるはずである．しかし，行列のノルムではこのようなことを表現できない．また，正方行列の固有値の絶対値は対応する固有ベクトル方向の増幅度を表現しているが，正方でない行列に対して固有値は定義できない．そこで，任意次元の行列 A に対して， A^*A が正方，かつ半正定であることに着目し，行列の特異値 (singular value) という非負の実数値を導入する．行列 $A \in \mathbf{C}^{m \times n}$ の特異値は次式で定義される．

$$\sigma_i(A) := \sqrt{\lambda_i(A^*A)} \quad (\text{A.91})$$

ただし， $\lambda_i(A^*A)$ は A^*A の i 番目に大きい固有値を表し， $\sigma_i(A)$ は A の i 番目に大きい特異値を表す．また，

$$A^*Av_i = \sigma_i^2 v_i \quad (\text{A.92})$$

を満たすベクトル $v_i \neq 0$ が存在し，(右) 特異ベクトル (singular vector) と呼ばれる．明らかに， $\|Av_i\|_2 / \|v_i\|_2 = \sigma_i$ が成り立つ．よって，ベクトルの 2 ノルムの意味において，特異値はその対応する特異ベクトル方向の入力ベクトルに対する増幅倍数を表している．さらに， A^*A がエルミート行列なので，その固有ベクトル集合 $\{v_1, \dots, v_n\}$ は正規直交となるようにとれる (練習問題 A.13) ．

なお、行列 A の最大特異値と最小特異値は添字 \max, \min を用いて $\sigma_{\max}(A), \sigma_{\min}(A)$ のように表現する。明らかに、 $\sigma_{\max}(A) = \|A\|_2$ が成り立つ。

A.10 ベクトルと行列の微積分

ベクトル関数や行列関数のスカラー変数 t に関する微積分は、要素ごとに微積分するように定義される。したがって、

$$\dot{x}(t) := \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix}, \quad \dot{A}(t) := [\dot{a}_{ij}(t)] \tag{A.93}$$

$$\int A(t)dt := \left[\int a_{ij}(t)dt \right] \tag{A.94}$$

である。ただし、 $\dot{a}(t)$ は時間に関する $a(t)$ の微分を表す。さらに、スカラー関数積に関する微分や積分の公式はそのまま行列積にも適用できる。すなわち、

$$\frac{d}{dt}(AB) = \frac{dA}{dt}B + A\frac{dB}{dt} \tag{A.95}$$

$$\int_a^b \frac{dA}{dt}Bdt = AB \Big|_a^b - \int_a^b A\frac{dB}{dt}dt \tag{A.96}$$

が成立する。逆行列の微分

$$\frac{dA^{-1}}{dt} = -A^{-1}\frac{dA}{dt}A^{-1} \tag{A.97}$$

は上述の性質を用いて導出できる。

また、列ベクトル $x = [x_1, \dots, x_n]^T$ に関するスカラー関数 $f(x)$ について、その変数ベクトルに対する偏微分は以下のように定義される。

$$\frac{\partial f}{\partial x} := \left[\frac{\partial f}{\partial x_1} \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} \quad \cdots \quad \frac{\partial f}{\partial x_n} \right] \tag{A.98}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} := \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix} \tag{A.99}$$

よって、 $b \in \mathbf{R}^n, A^T = A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ に対して次式が成立する。

$$\frac{\partial}{\partial x}(b^T x) = b^T, \quad \frac{\partial}{\partial x}(x^T A x) = 2x^T A, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2}(x^T A x) = 2A \tag{A.100}$$

練習問題

A.1 任意の $B \in \mathbf{R}^{n \times m}, C \in \mathbf{R}^{m \times n}$ について次式が成立することを示せ。

$$\det(I_n + BC) = \det(I_m + CB)$$

特に、列ベクトル b と行ベクトル c に関して $\det(I + bc) = 1 + cb$ が成り立つ。

A.2 命題

- (a) $x, y \in \mathbf{R}^n$ ならば、 $x + y \in \mathbf{R}^n$ となる。
- (b) $x \in \mathbf{R}^n$ かつ $a \in \mathbf{R}$ ならば、 $ax \in \mathbf{R}^n$ となる。

が次の命題と等価であることを示せ。

任意の $x, y \in \mathbf{R}^n$ と $a, b \in \mathbf{R}$ に対して, $ax + by \in \mathbf{R}^n$ が成り立つ.

A.3 行列 $A \in \mathbf{F}^{m \times n}$ の像 $\text{Im} A$ が値域 \mathbf{F}^m 上の部分空間であり, 零空間 $\text{Ker} A$ が定義域 \mathbf{F}^n 上の部分空間であることを示せ.

A.4 ベクトル $u = [x \ y \ z]^T$ のユークリッドノルム

$$\|u\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

がノルムの性質をすべて満たすことを確認せよ.

A.5 次の行列

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

について, $\text{rank}(A)$ および $\text{Im} A = \{y \in \mathbf{R}^2 \mid y = Ax, x \in \mathbf{R}^3\}$ と $\text{Ker} A = \{x \in \mathbf{R}^3 \mid Ax = 0\}$ の基底を求めよ.

A.6 線形代数方程式

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} x = b, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

について, その解の存在性, 一意性を吟味せよ. $b = [1 \ 1 \ 1]^T$ に変わったとき, 解は存在するか.

A.7 代数方程式

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

の一般解を求めよ. この解はいくつのパラメータをもつか.

A.8 方程式

$$x[n] = A^n x[0] + A^{n-1} b u[0] + A^{n-2} b u[1] + \cdots + A b u[n-2] + b u[n-1]$$

を考える. ただし, $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $b \in \mathbf{R}^n$ で, 共に既知である. 任意の $x[n], x[0]$ に対してこの方程式が常に解 $u[0], \dots, u[n-1]$ をもつために, (A, b) がどんな条件を満たすべきか.

A.9 次の行列の固有値と固有ベクトルを計算せよ.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

A.10 行列

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

について, その固有値と固有ベクトルを計算し, Jordan 標準形へ変換せよ. また, これに基づいて A^k (k は自然数) を計算せよ.

A.11 行列 A の固有値がすべて異なるとし, λ_i, q_i を $A q_i = \lambda_i q_i$ を満たす固有値と右固有ベクトルとする.

- (a) $Q = [q_1 \ q_2 \ \cdots \ q_n]$ とおいたとき, Q が正則となることを示せ .
 (b) Q の逆行列を行ベクトル p_i を用いて

$$P = Q^{-1} := [p_1^T \ p_2^T \ \cdots \ p_n^T]^T$$

のように分割したとする . p_i が A の左固有ベクトルとなること, すなわち $p_i A = \lambda_i p_i$ を満たすことを証明せよ .

A.12 エルミート行列 $A \in \mathbf{F}^{n \times n}$ の固有値がすべて実数であることを示せ .

A.13 次の手順に従って, エルミート行列 $A \in \mathbf{F}^{n \times n}$ が必ずユニタリ行列 $U \in \mathbf{F}^{n \times n}$ を用いて

$$A = U \operatorname{diag}(\lambda_1 \ \lambda_2 \ \cdots \ \lambda_n) U^*$$

に変換できることを示せ . ただし, $\lambda_i \in \mathbf{R}$ は A の固有値を表す .

- (a) $Au_1 = \lambda_1 u_1$ を満たす固有ベクトル $u_1 \in \mathbf{F}^n$ は $u_1^* u_1 = 1$ のように規格化できる . このとき, $U_1 = [u_1 \ V_1]$ をユニタリにする行列 $V_1 \in \mathbf{F}^{n \times (n-1)}$ が存在する . この変換行列を使って A を

$$AU_1 = U_1 \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}, \quad A_2^* = A_2$$

に変換できることを示せ . (定理 A.10 の証明を参照)

- (b) A_2 に対して同様な変換を繰り返すことによって結果を示せ .

A.14 定理 A.9 に基づいて, 零ベクトルでない部分空間 S が A 不変部分空間であれば, 必ずある非零の $x \in S$ と λ が存在して $Ax = \lambda x$ を満たすこと (すなわち, 固有ベクトルを必ず含む) を示せ .

A.15 行列 A がエルミートである場合, その固有値と特異値の間にどのような関係があるかについて吟味せよ .

A.16 行列 $A(t) \in \mathbf{R}^{n \times n}$ について, 恒等式 $A^{-1}A = I$ を用いて式 (A.97) を示せ .

A.17 行列微分公式 (A.100) を確認せよ .

参 考 文 献

【1章】

- 1) Frankline, G.F. et al.: "Feedback Control of Dynamic Systems", Addison-Wesley (1991)
- 2) Chen, T.: "Linear System Theory and Design", Oxford University Press (1999)
- 3) 示村悦二郎: "自動制御とは何か", コロナ社 (1990)
- 4) 小郷寛, 美多勉: "システム制御理論入門", 実教出版 (1982)

【2章】

- 1) Chen, T.: "Linear System Theory and Design", Oxford University Press(1999)
- 2) Kailath, T.: "Linear Systems", Prentice-Hall(1980)
- 3) Wonham, W.M.: "Linear Multivariable Control" (3rd Edition), Springer-Verlag(1985)
- 4) 小郷寛, 美多勉: "システム制御理論入門", 実教出版 (1982)
- 5) 須田信英: "線形システム理論", 朝倉書店 (1993)
- 6) 吉川, 井村: "現代制御論", コロナ社 (1994)
- 7) 劉康志, 羅正華共訳: "ロバスト最適制御" (K.Zhou, J.Doyle and K.Glover 共著), コロナ社 (1997)

【3章】

- 1) Chen, T.: "Linear System Theory and Design", Oxford University Press (1999)
- 2) Vidyasagar, M.: "Control System Synthesis", MIT Press (1985)
- 3) 片山徹: "フィードバック制御の基礎", 朝倉書店 (1992)
- 4) 小郷寛, 美多勉: "システム制御理論入門", 実教出版 (1982)
- 5) 吉川, 井村: "現代制御論", コロナ社 (1994)
- 6) 劉康志, 羅正華共訳: "ロバスト最適制御" (K.Zhou, J.Doyle and K.Glover 共著), コロナ社 (1997)

【4章】

- 1) Frankline, G.F. et al.: "Feedback Control of Dynamic Systems", Addison-Wesley (1991)
- 2) Mita, T.: "On Zeros and Responses of Linear Regulators and Linear Observers", *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 22-3, pp. 423/428 (1977)

- 3) Seron, M.M. et al. : “Fundamental Limitations in Filtering and Control”, Springer (1997)
- 4) 片山 徹 : “フィードバック制御の基礎”, 朝倉書店 (1987)
- 5) 劉 康志 : “線形ロバスト制御”, コロナ社 (2002)
- 6) 劉康志, 羅正華共訳 : “ロバスト最適制御” (K.Zhou, J.Doyle and K.Glover 共著), コロナ社 (1997)

【5章】

- 1) Chen, T. : “Linear System Theory and Design” , Oxford University Press (1999)
- 2) Kailath, T. : “Linear Systems” , Prentice-Hall (1980)
- 3) Mita, T. : “On Zeros and Responses of Linear Regulators and Linear Observers” , *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 22-3, pp. 423/428 (1977)
- 4) Wonham, W.M. : “Linear Multivariable Control” (3rd Edition) , Springer-Verlag (1985)
- 5) 太田快人 : “システム制御のための数学(1) - 線形代数編 - ” , コロナ社 (2000)
- 6) 吉川, 井村 : “現代制御論” , コロナ社 (1994)
- 7) 劉康志, 羅正華共訳 : “ロバスト最適制御” (K.Zhou, J.Doyle and K.Glover 共著), コロナ社 (1997)

【6章】

- 1) Francis, B. A. : “A Course in \mathcal{H}_∞ Control Theory”, Lecture Notes in Control and Information Sciences, vol. 88, Springer (1987)
- 2) Vidyasagar, M. : “Control System Synthesis” , MIT Press (1985)
- 3) Youla, D.C., H.A. Jabr, and C. N. Lu : “Single-Loop Feedback Stabilization of Linear Multivariable Dynamical Plants” , *Automatica*, Vol. 10, pp. 159/173 (1974)
- 4) 劉康志著 : “線形ロバスト制御” , コロナ社 (2002)
- 5) 劉康志, 羅正華共訳 : “ロバスト最適制御” (K.Zhou, J.Doyle and K.Glover 共著), コロナ社 (1997)

【7章】

- 1) Chen, J., Qiu, L. and Toker, O. : “Limitations on Maximal Tracking Accuracy” , *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 45-2, pp. 326/331 (2000)
- 2) Chen, J., Hara, S. and Chen, G. : “Best Tracking and Regulation Performance under Control Energy Constraint” , *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 48-8, pp. 1320/1336 (2003)

- 3) Freudenberg, J.S and Looze, D.P. : “Right Half Plane Poles and Zeros and Design Tradeoffs in Feedback Systems”, *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 30-6, pp. 555/565 (1985)
- 4) Wu, B.F. and Jonckheere, E.A. : “A Simplified Approach to Bode’s Theorem for Continuous-Time and Discrete-Time Systems”, *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 37-11, pp. 1797/1802 (1992)
- 5) 劉康志 : “フィードバック制御の性能限界”, *計測と制御*, vol. 43-10, pp. 789/796 (2004)
- 6) 劉康志, 羅正華共訳 : “ロバスト最適制御” (K.Zhou, J.Doyle and K.Glover 共著), コロナ社 (1997)
- 7) 笠原乾吉訳 : “複素解析” (L.V. Ahlfors 著), 現代数学社 (2000)

【8, 9章】

- 1) H. Khalil : “Nonlinear Systems”, 3rd Edition, Prentice Hall (2002)
- 2) A. Isidori : “Nonlinear Control Systems”, Springer, New York (1995)
- 3) 申鉄龍, 石井千春 : “消散性に基づく非線形系のロバスト制御”, 先端シリーズ No.1, SICE出版委員会 (2002)

【付録 A】

- 1) 太田快人 : “システム制御のための数学 (1) - 線形代数編 - ”, コロナ社 (2000)
- 2) 児玉慎三, 須田信英 : “システム制御のためのマトリクス理論”, 計測自動制御学会 (1978)

練習問題解答

【1章】

- 1.1 $x = [y \ i]^T$ とおくと, $y = [1 \ 0]x$ で $\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1/C \\ -1/L & -R/L \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/L \end{bmatrix} u$.
- 1.2 $\dot{y} = -u/RC \Rightarrow y(t) = y(0) - \int_0^t u(\tau) d\tau / RC$.
- 1.3 運動方程式 $\ddot{y}_1 = -\frac{K_1}{M_1} y_1 + \frac{K_1}{M_1} y_2 - \frac{D}{M_1} \dot{y}_1 + \frac{D}{M_1} \dot{y}_2 + \frac{1}{M_1} u, \ddot{y}_2 = \frac{K_1}{M_2} y_1 - \frac{K_1+K_2}{M_2} y_2 + \frac{D}{M_2} \dot{y}_1 - \frac{D}{M_2} \dot{y}_2$ より $x = [y_1 \ y_2 \ \dot{y}_1 \ \dot{y}_2]^T$ とおけば状態方程式が求まる.
- 1.4 重心の上下運動の方程式: $m\ddot{h} = f_2 - f_1 = k_2\theta - k_1u$. 重心周りの回転運動の方程式: $J\ddot{\theta} = (l_1 + l_2)f_1 - l_1f_2 - b\dot{\theta} = (l_1 + l_2)k_1u - l_1k_2\theta - b\dot{\theta}$. 状態を $x = [h \ \theta \ \dot{h} \ \dot{\theta}]^T$ とおけば状態方程式が求まる. さらに, $\dot{\theta} \approx 0$ のもとで運動方程式を Laplace 変換すると $\hat{h}(s)/\hat{u}(s) = (k_1k_1l_2 - bk_1s)/ms^2(bs + k_2l_1)$.
- 1.5 $\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = -g + \frac{k-x_2}{x_3}u, \dot{x}_3 = u$.
- 1.6 振子の慣性モーメントは ml^2 である. 運動方程式: $ml^2\ddot{\theta}_1 = (\frac{2}{3}l)^2k(\sin\theta_2 - \sin\theta_1)\cos\theta_1 - mgl\sin\theta_1, ml^2\ddot{\theta}_2 = -(\frac{2}{3}l)^2k(\sin\theta_2 - \sin\theta_1)\cos\theta_2 - mgl\sin\theta_2$.
- 1.7 (a) 運動方程式: $m\ddot{x} = k\frac{x^2}{x_0^2} - mg$. (b) $\dot{x}_0 = 0$ で $i_0 = \sqrt{\frac{mg}{k}}x_0$ の関係が成り立つ. これは変位 x_0 を長くするとき, 必要な電流が比例して増加することを意味する. 平衡点からのずれを $\Delta x = x - x_0, \Delta i = i - i_0$ とおき, 状態を $x = [\Delta x \ \Delta \dot{x}]^T$, 入力を $u = \Delta i$ とおけば $\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{2g}{x_0} & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2\sqrt{gk/m}}{x_0} \end{bmatrix} u$.
- 1.8 板 b の運動方程式: $M\ddot{x} = f - Kx - D\dot{x} - f_e = f - Kx - D\dot{x} - \frac{\epsilon A}{2} \frac{e^2}{x^2}$. 回路方程式: $v = Ri + L\frac{di}{dt} + e, i = \dot{q} = \epsilon A \frac{d}{dt}(\frac{e}{x}) = \epsilon A \frac{\dot{e}x - e\dot{x}}{x^2}$. $f_0 = 0$ のときの平衡点: $i_0 = 0, e_0 = v, x_0 = -(\frac{\epsilon A}{2K}v^2)^{1/3}, \dot{x}_0 = 0$. 線形近似方程式: $M\Delta\ddot{x} = f - 3K\Delta x - D\Delta\dot{x} - \frac{\epsilon Av}{x_0^3}\Delta e, L\frac{di}{dt} = -Ri - \Delta e, \Delta\dot{e} = \frac{v}{x_0}\Delta\dot{x} + \frac{x_0}{\epsilon A}i$. 状態を $x = [\Delta x \ \Delta\dot{x} \ i \ \Delta e]^T$ とおけば状態方程式を書ける.

【2章】

- 2.1 $x(t) = [\sin t \ \cos t]^T, t \geq 0$
- 2.2 $y(t) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-t}\cos t + \frac{7}{2}e^{-t}\sin t$. 伝達関数で計算した方が簡単.
- 2.3 (a) 伝達関数は $G(s) = \frac{s}{s^2+2}$ で極が $p_1, p_2 = \pm\sqrt{2}$ である. 単位インパルス応答は $g(t) = \cos\sqrt{2}t$ ($t \geq 0$) で単調振動する. (b) 可制御かつ可観測.
- 2.4 (a) $x(t) = \begin{bmatrix} -1 + e^t/2 + e^{-t}/2 \\ e^t/2 - e^{-t}/2 \end{bmatrix}$ ($t \geq 0$), $y(t) = x_1(t) + x_2(t) = -1 + e^t$ ($t \geq 0$). y に e^{-t} の項を含まない. (b) 可制御, 不可観測. $y(t)$ の応答から極 -1 が不可観測であると推測できる. (c) $G(s) = \frac{s+1}{s^2-1} = \frac{1}{s-1}$ で極 -1 がなくなっている.
- 2.5 (a) $e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & 1 - e^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}$. (b) $y(t) = 1 - \frac{1}{2}(e^{-t} + \cos t + \sin t), t \geq 0$. (c) 可制御かつ可観測.

?? (a) 可制御行列と可観測行列のランクを計算することで示せる。(b) ブロック線図は展開式 $\dot{x}_1 = x_1 + u, \dot{x}_2 = x_2 + u; y = x_1$ に基づいて書ける。状態 x_1 と x_2 の動特性が同じであるからその差は入力で制御できない。また、 x_2 は出力に到達しないし、 x_1 にも影響しないから観測できない。

2.6 対角変換行列と変換後の係数行列は以下のようになる。

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, T^{-1}AT = \text{diag}(1, -1), T^{-1}B = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, CT = [0 \ 2]$$

新しい状態を $z = T^{-1}x$ とすると、 $\dot{z}_1 = z_1 + \frac{1}{2}u, \dot{z}_2 = -z_2 - \frac{1}{2}u, y = z_2$ 。状態 z_1 と z_2 は入力によって制御され、しかも動特性が異なるため制御できる。しかし、 z_1 は出力に到達しないし、 z_2 にも影響しないから観測できない。

2.7 (a) 並列結合。(b) $\dot{x} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}u, y = [1 \ 2]x$ 。(c) 不可制御かつ不可観測である。(d) 理由は同様な動特性が並列結合しているから。

2.8 (a) $u = u_2, y = y_1$ 。全体の状態を $[x_1^T \ x_2^T]^T$ とおくとその実現の係数行列は問題 2.9 と同じになる。 $\text{rank}[A + I \ B] = 2 < 3$ だから不可制御。(b) $u = u_1, y = y_2$ 。全体の実現の係数行列は問題 2.10 と同じになる ($x = [x_1^T \ x_2^T]^T$)。 $\text{rank} \begin{bmatrix} A+I \\ C \end{bmatrix} = 2 < 3$ だから不可観測。(c) $G_1(s) = \frac{1}{s+1}, G_2(s) = \frac{s+1}{(s+2)^2}$ 、両者を直列結合させると $s = -1$ で極零相殺が起きる。相殺された極は (a) の場合不可観測、(b) の場合不可制御となる。

2.9 (a) 可観測，不可制御。(b) $\det \begin{bmatrix} A - zI & b \\ c & 0 \end{bmatrix} = -(z+1) = 0$ より $z = -1$ 。左零点方向 $[\eta^T \ v]^T = [1 \ -1 \ 0 \ 0]^T$ 。左零点出力方向は $v = 0$ であり、このとき $\eta^*[A - zI \ b] = 0$ が成り立つので、不変零点 $z = -1$ が不可制御モードに一致する。

2.10 (a) 可制御，不可観測。(b) $\det \begin{bmatrix} A - zI & b \\ c & 0 \end{bmatrix} = -(z+1) = 0$ より $z = -1$ 。右零点方向 $[\xi^T \ u]^T = [1 \ 1 \ -1 \ 0]^T$ 。右零点出力方向は $u = 0$ であり、このとき $\begin{bmatrix} A - zI \\ c \end{bmatrix} \xi = 0$ が成り立つので、不変零点 $z = -1$ が不可観測モードに一致する。

2.11 条件より $Aq_i = \lambda_i q_i \ (i = 1, \dots, n)$ が成立。そして $T = [q_1 \ \dots \ q_n] \Rightarrow T^{-1} = [p_1^T \ \dots \ p_n^T]^T$ 。これらを行列形式に書き直すと $AT = T \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ 。すると、

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}, T^{-1}B = \begin{bmatrix} p_1 B \\ \vdots \\ p_n B \end{bmatrix}, CT = [Cq_1 \ \dots \ Cq_n]$$

より $C(sI - A)^{-1}B = CT^{-1}(sI - TAT^{-1})^{-1}TB = \sum_{i=1}^n \frac{Cq_i p_i B}{s - \lambda_i}$ が成立。可制御条件の証明は $[T^{-1}AT - sI \ T^{-1}B]$ のランクを調べることで行える。 $s = \lambda_1$ の場合

$$[T^{-1}AT - \lambda_1 I \ T^{-1}B] = \begin{bmatrix} 0 & & & p_1 B \\ & \lambda_2 - \lambda_1 & & p_2 B \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \lambda_n - \lambda_1 & p_n B \end{bmatrix}$$

$\lambda_i \neq \lambda_j$ より $p_i B \neq 0$ が上式のすべての行が線形独立となるための必要十分条件である。ほか同様。可観測条件の証明も同様である。

- 2.12 可制御性は $\text{rank} \begin{bmatrix} A-sI & 0 & B \\ C & -sI & 0 \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} A-sI & B & 0 \\ C & 0 & -sI \end{bmatrix}$ の値で決まる. $s=0$ のときその値は $\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix}$ のランクに等しく, この行列が行フルランクである必要がある. $s \neq 0$ のとき (A, B) の可制御性より
- $$\text{rank} \begin{bmatrix} A-sI & B & 0 \\ C & 0 & -sI \end{bmatrix} = \text{rank}[A-sI \ B] + \text{rank}(-sI) = 2n$$
- となり, 行フルランク. よって, $\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix}$ が行フルランクであれば十分である.

【3章】

- 3.1 (a) $y(t) = \frac{1}{\omega} \sin(\omega t)$ ($t \geq 0$). (b) $y(t) = \frac{1}{2} t \sin(\omega t)$ ($t \geq 0$). 入力有界であるにも拘らず, (b) の場合出力が発散する. 理由は $G(s)$ が虚軸上に極をもつからである.
- 3.2 (a) 特性多項式 $p(s) = s^3 + (a + b_1)s^2 + (b_0 - b_1 - 4)s - (b_0 + 4a)$ を指定された多項式に一致させるには
- $$\begin{cases} a + b_1 = \lambda_2 \\ b_0 - b_1 - 4 = \lambda_1 \\ -(b_0 + 4a) = \lambda_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b_0 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_2 \\ \lambda_1 + 4 \\ -\lambda_0 \end{bmatrix}$$
- が解をもつ必要がある. この線形方程式の係数行列が正則なので, 一意解をもつ.
- (b) 与えられた極に対応する特性多項式は $p(s) = s^3 + 4s^2 + 6s + 4$ である. これを上の方程式に代入して解を求めると $a = -6, b_0 = 20, b_1 = 10$. (c) $r \mapsto y$ の伝達関数を $H_{yr}(s)$ とすると, 最終値の定理より $y(\infty) = H_{yr}(0)$. $k = 1$ のとき, $y(\infty) = -5 \neq 1$ で目標値追従ができていない. (d) $y(\infty) = -5k \times r$ である. これを r に一致させるには $k = -1/5$ とおけばよい.
- 3.3 $s = 2$ で不安定極零相殺が起きるため, 内部安定化不可能.
- 3.4 不可制御モード/不可観測モードは安定な $\lambda = -1$ なので, 問題2.9のシステムは可安定かつ可観測で, 問題2.10のシステムは可制御かつ可検出である.
- 3.5 (a) $K > 1/3$. (b) $K > 2$.
- 3.6 特性多項式は $(s+2)(s-1)$ で不安定固有値 $p = 1$ をもつ. よって不安定である.
- 3.7 閉ループ系の特性多項式: $p(s) = s^2 + (K-p)s + K$, 安定範囲: $K > b$.
- 3.8 閉ループ系の特性多項式: $p(s) = M(s^2 + \frac{4}{M}s + \frac{4}{M})$, 安定条件: $\Delta > -1$.
- 3.9 $\int_0^\infty y^T(t)y(t)dt = \int_0^\infty x^T(t)C^T Cx(t)dt = -\int_0^\infty x^T(t)(A^T X + XA)x(t)dt = -\int_0^\infty (\dot{x}^T(t)Xx(t) + x^T(t)X\dot{x}(t))dt = -\int_0^\infty \frac{d(x^T X x)}{dt} dt = x^T(0)Xx(0)$ ($x(\infty) = 0$ より)

【4章】

- 4.1 (a) Routh-Hurwitz 安定判別法より安定条件: $-4 < k < 0$. (b) 最終値定理を用いると $\hat{y}(s) = \frac{P}{1+PK} \hat{d}(s) = \frac{2}{p(s)} \Rightarrow y(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \hat{y}(s) = 0$. (c) 同様に $\hat{e}(s) = \frac{1}{1+PK} \hat{r}(s) = \frac{2(s+1)}{p(s)} \Rightarrow e(\infty) = 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = r(t) = \sin 2t$. 制御器 K に内部モデルがあるため, 漸近追従と外乱除去両方ができる.
- 4.2 (a) 安定条件 $k > 0$. (b) $e(\infty) = 0$. (c) $y(\infty) = \frac{1}{k} \neq 0$. ループゲイン $L = PK$ に積分器があるためステップ信号に漸近追従できる. 一方, 制御器 K に積分器がないためステップ外乱を完全に除去できない.

- 4.3 (a) 安定条件 $k > 0$. (b) $e(\infty) = 0$. (c) $y(\infty) = 0$, 制御器 K に積分器があるためステップ信号に漸近追従できるし, ステップ外乱を完全に除去できる.
- 4.4 (a) 安定範囲 $k > 0$. (b) $e(\infty) = -\frac{1}{k}$ より $|e(\infty)| = \frac{1}{k} < 0.05 \Rightarrow k > 20$.
- 4.5 システムの伝達関数を実験的に求める方法: (1) 周波数集合 $\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N\}$ を用意. (2) 正弦波入力 $u_i(t) = \cos \omega_i t$ を印加し, 定常出力を測定: $y_i(t) = A_i \cos(\omega_i t + \phi_i) \Rightarrow |G(j\omega_i)| = A_i, \angle G(j\omega_i) = \phi_i$. (3) $\{|G(j\omega_i)|, \angle G(j\omega_i)\}$ に合わせるように有理関数 $G(s)$ を求める.
- 4.6 標準的な古典制御の教科書を参照
- 4.7 単位ステップ目標値に関する追従誤差は $\hat{e}(s) = \frac{1}{1+L} \frac{1}{s}$ であり, L の正の実極を p とすると $\hat{e}(p) = 0 = \int_0^\infty e(t)e^{-pt} dt$ が成立. 十分に小さい $t > 0$ について $e(t)e^{-pt} > 0$ なので, $e(t)e^{-pt} < 0 \Rightarrow e(t) < 0$ を満たす時間帯が必ず存在. つまり, 行き過ぎが起きる.
- 4.8 正の実零点をもつと必ず逆振れが生じる. 一方, 奇数個の正の実零点をもつ場合必ず A 型の逆振れとなるから, 正の実零点が偶数個の場合逆振れは B 型となる.
- 4.9 省略
- 4.10 (a) $g(t) = e^{-t} - e^{-5t}$ ($t \geq 0$) より $\|g\|_1 = \int_0^\infty |g(t)| dt = \frac{4}{5}$, $\|g\|_2^2 = \int_0^\infty g^2(t) dt = \frac{4}{15} \Rightarrow \|g\|_2 = \frac{2}{\sqrt{15}}$. 一方, 最大値は停留点 $\dot{g}(t) = 0$ でとることから $\dot{g}(t^*) = 0 \Rightarrow e^{-t^*} = 5^{-1/4} \Rightarrow \|g\|_\infty = |g(t^*)| = \frac{4}{5} 5^{-1/4}$. (b) $G(s)$ が低域通過特性をもつから $\|G\|_\infty = |G(j0)| = 4$. 他方, $\|G\|_2 = \|g\|_2 = \frac{2}{\sqrt{15}}$, $\|G\|_1 = \|g\|_1 = \frac{4}{5}$.

【5章】

- 5.1 状態フィードバックゲイン $f = -[9 \ 3]$.
- 5.2 (a) 状態フィードバックゲイン $f = -[0 \ 3]$. (b) 設計した入力 $u = fx = -3 \times [0 \ 1]x = -3y$ なので, 出力フィードバックで実現できる.
- 5.3 (a) 制御対象の極は $p_1 = p_2 = 2, p_3 = -1$ である. $\text{rank}[A - p_3 I \ b] = 2 < 3$ より極 p_3 が不可制御であり, フィードバックで移動できない. 一方, 指定された閉ループ極に $p_3 = -1$ を含まない. よって, 設定できない. (b) 指定した閉ループ極に不可制御極 -1 が含まれるので, 設定できる. $f = -[6 \ 6 \ 0]$. (c) この場合, 制御対象は可制御なので閉ループ極を任意に設定できる. $f = -\frac{1}{3}[120 \ 62 \ 1]$.
- 5.4 (a) 極 $\lambda = 5, -1$ より不安定. (b) 可制御かつ可観測. (c) 状態フィードバックゲイン $f = [11 \ -7]$. (d) オブザーバゲイン $l = [-11 \ 29]^T$.
- 5.5 $u = ky = kcx$ を $\dot{x} = Ax + bu$ に代入すると $\dot{x} = (A + kbc)x$. 本システムにおいて $|sI - (A + kbc)| = s^2 - ks - (k+1) \Rightarrow k < -1$ ならば安定.
- 5.6 (a) 状態フィードバックゲイン $f = -[2 \ 3]$. (b) オブザーバゲイン $l = -[9 \ 20]^T$.
- 5.7 (a) 状態方程式を展開すると, $\dot{x}_{12} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} x_{12} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$, $\dot{x}_3 = -x_3, y = x_3$ と書ける. y に x_{12} の情報を一切もたないからオブザーバは設計できない. (b) オブザーバゲインは $l = -[34/3 \ 34 \ 2/3]^T$ である.

5.8 (a) $y(t) \equiv 0 \Leftrightarrow 0 \equiv \hat{y}(s) = C(sI - A - BF)^{-1}D\hat{u}(s) \Leftrightarrow C(sI - A - BF)^{-1}D \equiv 0$. 本式を展開すると, $C(sI - A - BF)^{-1}D = CD/s + C(A + BF)D/s^2 + C(A + BF)^2D/s^3 + \dots \equiv 0 \Leftrightarrow C(A + BF)^k D = 0$ ($\forall k = 0, 1, 2, \dots$). Cayley-Hamilton の定理を使えば結論を得る. 次数差が r の 1 入出力系では $cb = cAb = \dots = cA^{r-2}b = 0, cA^{r-1}b \neq 0$ が成立. すると, $cd = 0, 0 = c(A + bf)d = cAd, 0 = c(A + bf)^2d = cA(A + bf)d = cA^2d, \dots, 0 = c(A + bf)^{r-1}d = cA^{r-2}(A + bf)d = cA^{r-1}d$ が成立たなければならない. これが成り立つとき, $f = -(cA^{r-1}b)^{-1}cA^r \Rightarrow c(A + bf)^r = 0 \Rightarrow c(A + bf)^k = 0$ ($\forall k > r$), よって外乱遮断の条件が成立.

5.9 $CS^{-1} = [I \ 0]$ に注目し, 定理 2.2(3) を使えば分かる.

【6章】

6.1 $e(\infty) = 0 \Leftrightarrow Q(0) = 1/P(0) = 2$ でなければならない. $Q(s) = 2 \Rightarrow K(s) = 2(s+2)/s$, または $Q(s) = P^{-1}(s)/(\epsilon s + 1) \Rightarrow K(s) = (s+2)/\epsilon s$.

6.2 $e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s\hat{e}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(1-PQ)}{s} = -\lim_{s \rightarrow 0} \frac{d}{ds}(PQ) = -\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\epsilon}{(\epsilon s + 1)^2} = -\epsilon$ であり (ド・ロピタルの法則), $|e(\infty)| \leq 0.05 \Rightarrow \epsilon \leq 0.05$. よって, $K(s) = 20(s+2)/s$.

6.3 $e(\infty) = 0 \Leftrightarrow \hat{e}(s) = (1-PQ)/s^2 = \frac{s^2+(3-a)s+(2-b)}{s^2(s+1)(s+2)}$ が安定 $\Leftrightarrow 3-a = 2-b = 0$ より $a = 3, b = 2$. すると, $K(s) = (3s+2)(s+2)/s^2$.

6.4 (a) 省略. (b) $\hat{e}(s) = (1-PQ)/s$. (c) $e(\infty) = 0 \Leftrightarrow \hat{e}(s) = (as+b-1)/s(as+b)$ が安定 $\Leftrightarrow b = 1$. (d) $e(t) = e^{-t/a}$ ($\forall t \geq 0$) なので, $\|e\|_2^2 = \int_0^\infty e^{-2t/a} = a/2 \leq 0.1^2 \Rightarrow 0 < a \leq 0.02$. (e) $a = 0.02$ のとき制御器は $K(s) = 10(s+5)/s$ となる.

6.5 (a) ブロック線図を (P, K) で構成される単位フィードバック系に書き換えると $K = Q/(1-P_0Q) = Q/(1-PQ)$ となり安定化制御器となるため, 閉ループ系が安定. (b) $\hat{e}(s) = (1-PQ)\hat{r}(s) \rightarrow 0$ のために $PQ \rightarrow 1$ となる必要がある. P の次数差 $r > 0$ を考えると $PQ = 1/(\epsilon s + 1)^r \Rightarrow Q = P^{-1}/(\epsilon s + 1)^r$ のみ が実現可能. $\epsilon \ll 1$ とすれば帯域 $0 < \omega < 1/\epsilon$ にわたって追従性能が向上する. (c) P と P_0 が並列しているため, 共通の不安定極をもつと不可制御モードとなり安定化できない.

6.6 (a) $y(\infty) = 0 \Leftrightarrow \hat{y}(s) = P/(1+PK)\hat{d} = P(1-Pq)/s$ が安定 $\Rightarrow 1-P(0)q = 0 \Rightarrow q = 1/P(0)$ でなければならない. (b) $q = 2 \Rightarrow K(s) = 2(s+2)/s$.

6.7 $H_{yw} = \frac{P}{(1+PK)} \frac{1}{s} = P(1-PQ) \frac{1}{s}$ が安定 $\Rightarrow Q(0) = 1/P(0) \Rightarrow b = 1$. よって $H_{yw} = a/(s+1)(as+1)$. 低域通過なので $\|H_{yw}\|_\infty = |H_{yw}(j0)| = a < 1$. 条件: $a < 1, b = 1$.

6.8 $D^{-1} = (A, B_2, -F, I), \tilde{D}^{-1} = (A, L, -C_2, I)$ より

$$ND^{-1} = \left[\begin{array}{cc|c} A+B_2F & -B_2F & B_2 \\ 0 & A & B_2 \\ \hline C_2 & 0 & 0 \end{array} \right], \tilde{D}^{-1}\tilde{N} = \left[\begin{array}{cc|c} A & LC_2 & 0 \\ 0 & A+LC_2 & B_2 \\ \hline -C_2 & C_2 & 0 \end{array} \right]$$

$\begin{bmatrix} I & I \\ 0 & I \end{bmatrix}$ で相似変換すると, $A + B_2F$ が不可制御, $A + LC_2$ が不可観測であることが分かる. これらを消去すると結果が得られる. D^{-1} と \tilde{D}^{-1} の式から $D(s)$, $\tilde{D}(s)$ の零点が $G_{22}(s)$ の極に一致する. また, $N(s)$, $\tilde{N}(s)$ の零点が $G_{22}(s)$ の零点に一致することは $\begin{bmatrix} A + B_2F - sI & B_2 \\ C_2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - sI & B_2 \\ C_2 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I & F \\ 0 & I \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} A + LC_2 - sI & B_2 \\ C_2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & L \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A - sI & B_2 \\ C_2 & 0 \end{bmatrix}$ より分かる.

【7章】

- 7.1 $A(s) = \frac{s^2 - 5s + 6}{s^2 + 5s + 6}$, $G_m(s) = \frac{s(s^2 + 5s + 6)}{(s+5)^2(s^2 + 2s + 5)}$
- 7.2 条件(1): 積分の線形性より示せる. 条件(2): $\hat{f}^*(j\omega)\hat{g}(j\omega) = \overline{\hat{g}^*(j\omega)\hat{f}(j\omega)}$ より. 条件(3): $\langle \hat{f}, \hat{f} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \|f(j\omega)\|^2 d\omega = 0 \Leftrightarrow f(j\omega) \equiv 0 \Leftrightarrow f(s) = 0$.
- 7.3 命題(1), (2) は明らか. 命題(3): $(H^* \hat{f})^* \hat{g} = \hat{f}^*(H\hat{g})$ より. 命題(4): 虚軸上で $A^*A = |A|^2 = 1$ なので, $\|A\hat{f}\|^2 = \langle A\hat{f}, A\hat{f} \rangle = \langle A^*A\hat{f}, \hat{f} \rangle = \langle \hat{f}, \hat{f} \rangle = \|\hat{f}\|^2$.
- 7.4 $\langle \frac{1}{\lambda - s}, \frac{1}{\eta - s} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{(\lambda + j\omega)(\eta - j\omega)} = \frac{1}{2\pi j} \oint \frac{ds}{(\lambda + s)(\eta - s)} = \text{Res}_{s=-\lambda} \frac{1}{(\lambda + s)(\eta - s)} = \frac{1}{\eta + \lambda}$
- 7.5 $c(sI - A - bf)^{-1}b = c(sI - A)^{-1}b \times [1 - f(sI - A)^{-1}b]^{-1}$ で, $[1 - f(sI - A)^{-1}b]^{-1}$ の次数差が零だから.
- 7.6 $\|G\|_2 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{7}{11}}$
- 7.7 $P(s) = (1, 1, 1, 0)$ より $G_{22} = -P = (1, 1, -1, 0)$. $f = -2, l = 2$ と選べば $A_f = A_l = -1$. すると $\begin{bmatrix} D & -Y \\ N & -X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s-1}{s+1} & \frac{4}{s+3} \\ -\frac{1}{s+1} & \frac{s+3}{s+1} \end{bmatrix}$ となる. また, プラントに不安定零点がないので, 準最適な自由パラメータは $Q(s, \epsilon) = N^{-1}X/(1 + \epsilon s) = (s+3)/(1 + \epsilon s)$ で与えられる. よって $K(s) = (Y - NQ)(X - DQ)^{-1} = \frac{4(1 + \epsilon s)}{\epsilon s(s+3)} + \frac{s-1}{\epsilon s}$.

【8章】

- 8.1 リヤプノフ関数 $V(x) = \frac{1}{2}x^T Px$ を解軌道に沿って微分し, 条件(8.58)を用いると $\dot{V} \leq -\frac{1}{2}\{x^T Qx - |f(x)|^2\}$ となる. したがって, 定理9.2より漸近安定である.
- 8.2 運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの和 $V(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}\dot{\theta}M(\theta)\theta + P(\theta) > 0$ を考える. Lagrange 方程式において $\tau = 0$ とし, 特性(a), (b)に注意して V を微分すると $\dot{V} \leq 0(\forall \theta, \dot{\theta})$ が得られる. よって, 系は安定である.
- 8.3 $(x_{e1}, 0, x_{e3})$ が $u = u_0$ に対して平衡点となるには, $bx_{e3} \sin x_{e1} = p, c_2x_{e3} - c_1 \cos x_{e1} = u_0$ を満たす必要がある. 任意の $0 < x_{e1} < \frac{\pi}{2}$ に対して $x_{e3} = \frac{p}{\sin x_{e1}}$ が上式を満たす. よって, 入力を $u_0 = c_2x_{e3} - c_1 \cos x_{e1}$ とおけばよい. さらに, $u = u_0$ として V の微分を求めると,

$$\dot{V} = -dx_2^2 - bc_1(\cos x_1 - \cos x_{e1})^2 - \frac{bc_2^2}{c_1}(x_3 - x_{e3})^2$$

が得られる. すなわち, $\tilde{x}_1 = x_1 - x_{e1}, \tilde{x}_2 = x_2, \tilde{x}_3 = x_3 - x_{e3}$ とおくと, $u = c_2x_{e3} - c_1 \cos x_{e1}$ としたときの閉ループ系は

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_1 = \tilde{x}_2 \\ \dot{\tilde{x}}_2 = -d\tilde{x}_2 - b(\tilde{x}_3 + x_{e3})\sin(\tilde{x}_1 + x_{e1}) + p \\ \dot{\tilde{x}}_3 = c_1 \cos(\tilde{x}_1 + x_{e1}) - c_2(\tilde{x}_3 + x_{e3}) + c_2x_{e3} - c_1 \cos x_{e1} \end{cases}$$

となる。このとき、解軌道に沿って次式が成り立つ。

$$\dot{V} = -d\tilde{x}_2^2 - bc_1(\cos(\tilde{x}_1 + x_{e1}) - \cos x_{e1})^2 - \frac{bc_2^2}{c_1}\tilde{x}_3^2$$

故に、定理 9.2 によって $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3) = (0, 0, 0)$ における漸近安定性が示される。

【9章】

9.1 定義に沿って計算すればよい。

9.2 まず、 $L_g h(x) = 0$ のとき $L_{ad_f g} h(x) = -L_g L_f h(x)$ が容易に示されるので、 $L_g L_f h(x) = 0$ と $L_{ad_f g} h(x) = 0$ は等価である。次に $L_g h(x) = L_g L_f h(x) = 0$ のとき、 $L_{ad_f^2 g} h(x) = -L_g L_f^2 h(x)$ が示されるので、 $L_{ad_f g} h(x) = 0$ と $L_g L_f^2 h(x) = 0$ が等価である。このように繰り返し計算することによって示される。

9.3 (a) 定義に従って計算してもよいが、ここでは直接出力の微分を計算することによって調べる。 $\dot{y} = \rho x_1 x_3 - dx_3, \dot{y} = \rho x_3 u - a\rho x_1 x_3 + (\rho x_1 - d)^2 x_3$ より $x_3 \neq 0$ の領域でこの系は相対次数 2 をもつ。(b) $z = x_2$ とすると、座標変換 $z = x_2, y_1 = x_3, y_2 = \rho x_1 x_3 - dx_3$ は $x_3 \neq 0$ の領域において微分同相である。よって、正準形は $\dot{z} = -bz - c(y_2 + dy_1), \dot{y}_1 = y_2, \dot{y}_2 = \frac{y_2^2}{y_1} - 2a(y_2 + dy_1) + \rho y_1 u$ で与えられる。(c) 正準形から明らかに、 $x_3 = y_1 \neq 0$ の領域において、状態フィードバック $u = \frac{1}{\rho y_1} v - \frac{y_2^2}{\rho y_1^2} + \frac{2a(y_2 + dy_1)}{\rho y_1}$ によって、 $\dot{z} = -bz - c(y_2 + dy_1), \dot{y}_1 = y_2, \dot{y}_2 = v, y = y_1$ のように入力-出力線形化が求まる。さらに、 $y = 0 (\forall t \geq 0)$ のとき、ゼロダイナミクスは $\dot{z} = -bz$ となる。 $b > 0$ なので、ゼロダイナミクスは漸近安定であり、この系はゼロ状態可検出である。

【付録 A】

- A.1 $\det \begin{bmatrix} I_n & B \\ -C & I_m \end{bmatrix} = \det(I_m) \det(I_n + B \cdot I_m^{-1} \cdot C) = \det(I_n) \det(I_m + C \cdot I_n^{-1} \cdot B)$ より導かれる。 cb がスカラーになるから $\det(1 + cb) = 1 + cb$ 。
- A.2 $x, y \in \mathbf{R}^n$ で $a, b \in \mathbf{R}$ ならば、(b) より $ax, by \in \mathbf{R}^n$ 。すると、(a) より $ax + by \in \mathbf{R}^n$ も成立。逆に、任意の $x, y \in \mathbf{R}^n$ と $a, b \in \mathbf{R}$ に対し $ax + by \in \mathbf{R}^n$ であるならば、 $a = b = 1$ とおくと (a) が、 $b = 0$ とすれば (b) が成り立つ。
- A.3 定義より $y_1, y_2 \in \text{Im}A$ のとき、 $\exists x_1, x_2 \in \mathbf{F}^n \Rightarrow y_1 = Ax_1, y_2 = Ax_2$ 。 $\alpha, \beta \in \mathbf{F}$ に対して $\alpha x_1 + \beta x_2 \in \mathbf{F}^n$ であるので $\alpha y_1 + \beta y_2 = \alpha Ax_1 + \beta Ax_2 = A(\alpha x_1 + \beta x_2) \in \text{Im}A$ 。つまり $\text{Im}A \subset \mathbf{F}^m$ が部分空間である。
同様に、 $x_1, x_2 \in \text{Ker}A \Rightarrow Ax_1 = Ax_2 = 0 \Rightarrow A(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha Ax_1 + \beta Ax_2 = 0 \Rightarrow \alpha x_1 + \beta x_2 \in \text{Ker}A$ より $\text{Ker}A \subset \mathbf{F}^n$ も部分空間である。
- A.4 条件 (1)-(3) は明らか。条件 (4) を示すとき、Cauchy-Schwarz の不等式 $x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 \leq \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}$ を用いればよい。
- A.5 $\text{rank}A = 2$ 、 $\text{Im}A$ の基底は $[1 \ 0]^T, [0 \ 1]^T$ 、 $\text{Ker}A$ の基底は $[0 \ 1 \ 0]^T$ である。

- A.6 $b \in \text{Im}A$ なので方程式が一意解をもつ. $b = [1 \ 1 \ 1]^T$ になったとき, $\text{rank}[A \ b] = 3 > \text{rank}(A) = 2$ となるので方程式は解をもたない.
- A.7 $x = [x_3 - 1 \ -2x_3 \ x_3 \ 1]^T$ で x_3 が任意. すなわち一つのパラメータをもつ.
- A.8 $\text{rank}[b \ Ab \ \cdots \ A^{n-1}b] = n$ が必要十分条件である. 方程式を未知数ベクトルについてまとめれば分かる.
- A.9 固有値は $-3, 1$, 固有ベクトルはそれぞれ $[1 \ -3]^T, [1 \ 1]^T$ である.
- A.10 固有値は $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 0$ である. 固有ベクトルは $u_1 = [1 \ 0 \ 0]^T, u_3 = [1 \ -1 \ 0]^T$, 一般化固有ベクトルは $u_2 = [0 \ 1 \ 1]^T$ である. $T = [u_1 \ u_2 \ u_3] \Rightarrow T^{-1}AT = \begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, J_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. $\text{diag}(J_1^k, 0) = (T^{-1}AT)^k = T^{-1}A^kT$ を利用して計算すると
- $$J_1^k = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^k = T \cdot \text{diag}(J_1^k, 0) \cdot T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & k-1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
- A.11 (a) 定理 A.6(3) より q_1, \dots, q_n が線形独立, 故に Q が正則. (b) $AQ = Q \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \Rightarrow PA = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)P \Rightarrow p_i A = \lambda_i p_i$.
- A.12 $Ax = \lambda x \Rightarrow x^* A^* = x^* A = \bar{\lambda} x^*$ より $x^* Ax = \lambda x^* x = \bar{\lambda} x^* x \Rightarrow \bar{\lambda} = \lambda$ が成り立ち, $\lambda \in \mathbf{R}$ となる.
- A.13 (a) $Au_1 = \lambda_1 u_1$ より $AU_1 = U_1 \begin{bmatrix} \lambda_1 & A_{12} \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \Rightarrow U_1^* AU_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & A_{12} \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$ がエルミート. よって $A_{12} = 0, A_2^* = A_2$. (b) 以下同文.
- A.14 定理 A.9(1) より $AT_1 = A_{11}T_1$ を満たす A_1, T_1 がある. λ を A_{11} の固有値, $u \neq 0$ をその固有ベクトルとすると $A_{11}u = \lambda u \Rightarrow AT_1 u = \lambda T_1 u$ が成立. T_1 が列フルランクなので, $x = T_1 u \neq 0 \in S$ が A の固有ベクトルとなる.
- A.15 問題 A.12 より $Ax_i = \lambda_i x_i$ において固有値 λ_i が実数である. すると $A^* Ax_i = \lambda A^* x_i = \lambda_i Ax_i = \lambda_i^2 x_i$ より特異値 σ_i が $\sigma_i = |\lambda_i|$ の関係を満たす.
- A.16 $A^{-1}(t)A(t) = I$ の両辺を微分し整理すればよい.
- A.17 各スカラー関数を展開してから定義に従って計算すればよい.

索引

- \mathcal{F}_u , 50
- \mathcal{F}_ℓ , 50
- A型逆振れ, 91
- Bode の位相公式, 161
- B型逆振れ, 91
- Cauchy-Schwarz 不等式, 215
- Cayley-Hamilton 定理, 225
- Frobenius 定理, 196
- Hurwitz 多項式, 64
- IMC, 147
- Jordan 標準形, 223
- Kalman の正準形式, 35
- Lagrange 系, 186
- Lagrange 方程式, 186
- LaSalle 不変性原理, 182
- LFT, 51
- LFT の係数行列, 51
- LFT 結合, 48
- Lie 積, 195
- Lie 微分, 188
- Lipschitz, 178
- Lipschitz 条件, 174
- Lyapunov, 177
- Lyapunov 安定, 186
- Lyapunov 間接法, 185
- Lyapunov 関数, 180, 182, 185, 186
- Lyapunov 直接法, 185
- Lyapunov 方程式, 71
- Nyquist 軌跡, 69
- Sylvester の不等式, 218
 - 1 自由度制御系, 134
 - 2 自由度制御系, 134
- むだ時間, 10
- ゼロ・ダイナミックス, 201, 202
- ゼロ状態可検出, 203
- アフィン非線形システム, 172
- テスト信号, 76
- ディストリビューション, 196
- エルミート行列, 206, 230, 236
- オブザーバ, 120
- オブザーバゲイン, 120
- オブザーバ極, 120
- クラス \mathcal{K} 関数, 182
- バンド幅, 94
- パラメータ化, 136
- ゲイン, 69, 161
- フィードバック結合, 48
- フィードバック等価, 194
- フルランク, 218
 - 行, 218
 - 列, 218
- ブロック行列
 - 逆行列公式, 206
- システム, 2
- システム行列, 44
- プラント, 3
- プロパー, 10
- ステップ信号, 76
- モード, 36, 55, 86
- モデル, 2, 3
- モデル化, 3
- ヤコビ行列, 188
- ユニタリ行列, 231
- ランク, 218
- ランプ信号, 76
- 安定, 58, 176
- 安定行列, 60
- 安定多項式, 64
- 位相, 161
- 位相角, 69
- 一般化プラント, 131
- 因果関係, 2
- 運動方程式, 4
- 隠れモード, 65
- 右固有ベクトル, 235
- 右零点状態方向, 45

- 右零点入力方向, 45
- 右零点方向, 43
- 可安定, 61
- 可安定性, 61
- 可観測, 30
 - 行列, 31
- 可観測正準形, 112
- 可検出, 61
- 可検出性, 61
- 可制御, 24
 - 行列, 25
- 可制御性, 24
- 可制御正準形, 111
- 回転運動, 4
- 外乱, 75, 132
- 完全不安定, 58
- 基準 2 次系, 87
- 基底, 212, 213
- 幾何学的重複度, 224
- 既約分解, 64, 141
- 逆システム, 48
- 逆行列公式, 206
- 逆振れ, 90, 91
- 共役転置, 206
- 局所的に微分同相, 188
- 局所的解, 174
- 極, 11, 38
- 極配置, 108
- 極零相殺, 30, 33
- 厳密にプロパー, 10
- 厳密線形化, 194, 195
- 減衰係数, 88
- 固有ベクトル, 221
 - 一般化固有ベクトル, 224
- 固有周波数, 88
- 固有値, 221
- 行列
 - 平方根, 231
- 行列式, 206
- 行列表現, 208, 216, 227
- 左固有ベクトル, 236
- 左零点出力方向, 45
- 左零点状態方向, 45
- 左零点方向, 43
- 座標, 212
- 座標変換, 187
- 最小位相, 95
- 最小位相系, 203
- 最小位相伝達関数, 151
- 最小次元オブザーバ, 122
- 最小実現, 33
 - 仕様, 86
- 指数安定, 177, 181, 185
- 持続外乱, 77
- 持続信号, 78
- 時間遅れ, 10
- 次元, 13, 206
- 次数, 10
- 次数差, 11, 46
- 自由システム, 172, 173
 - 実現, 33
 - 最小, 33
- 主要極, 86
- 周波数応答, 69
- 出力, 4
- 出力方程式, 13
- 状態フィードバック, 107
- 状態フィードバックゲイン, 107
- 状態フィードバック系, 107
- 状態フィードバック線形化, 193
- 状態ベクトル, 12
- 状態変換, 34
- 状態方程式, 12, 13
- 制御器, 4
- 制御対象, 3
- 制御入力, 132
- 性能限界, 149
- 正規ランク, 42
- 正弦波信号, 76
- 正準形, 109, 190, 192
- 正則行列, 218
- 正定関数, 230

- 正定行列, 230
- 正定性, 183
- 静的システム, 3
- 線形ベクトル空間, 210
- 線形結合, 210
- 線形写像, 216
- 線形独立, 210
- 線形分数変換, 51
- 双対システム, 24
- 前置補償器, 99
- 漸近安定, 176
- 漸近追従, 80
- 全域通過伝達関数, 151
- 相似変換, 34, 223
- 相対次数, 46, 189
- 相補感度関数, 149
- 像, 216
- 測定出力, 132
- 代数的重複度, 224
- 大域的に指数安定, 177
- 大域的に漸近安定, 177
- 大域的に微分同相, 188
- 大域的解, 174
- 単位ステップ信号, 77
- 張られる空間, 212
- 直交, 215
- 直列, 48
- 定常応答, 78
- 伝達関数, 9
- 伝達行列, 9
- 伝達零点, 42
- 動的システム, 2
- 同一次元オブザーバ, 120
- 特異ベクトル, 233
- 特異値, 233
- 特性多項式, 221
- 内積, 214
- 内部モデル原理, 81
- 内部モデル制御, 147
- 内部安定, 63
- 入出力安定性, 56
- 入力, 4
- 入力 - 出力線形化, 198, 199
- 半正定関数, 230
- 半正定行列, 230
- 非最小位相伝達関数, 152
- 非線形システム, 172
- 非線形系, 172
- 非線形状態方程式, 172
- 微分同相, 188
- 評価出力, 132
- 不安定, 58
- 不可観測, 30
- 不可観測モード, 32
- 不可制御, 24
- 不可制御モード, 25
- 不変集合, 183
- 不変部分空間, 225
- 不変零点, 44
- 部分空間, 212
- 物理モデル, 4
- 分離原理, 127
- 併合系, 126
- 平衡状態, 176
- 平衡点, 16, 176
- 並進運動, 4
- 並列, 48
- 変換行列, 34
- 目標値, 75
- 目標値追従, 75
- 有限次元システム, 10
- 誘導ノルム, 215, 232
- 零空間, 216
- 零状態応答, 22
- 零点, 11, 40
 - ブロッキング, 42
 - 伝達, 42
 - 不変, 44
- 零入力応答, 22
- 劣乗法性質, 233