

第5章 ゲインスケジュール制御

ゲインスケジュール制御とは：

制御器の係数を状態の変化と共に変えることによって、常に最善の制御性能を実現する手法。

内容：

リアプノフ安定論

2次安定性

パラメータベクトルのポリトープ (多面体) 表現

ポリトープ系の2次安定化

非線形システムのLPV(線形パラメータ変動)システムへの等価変換

ゲインスケジュール制御

事例と実習：電力過渡安定化

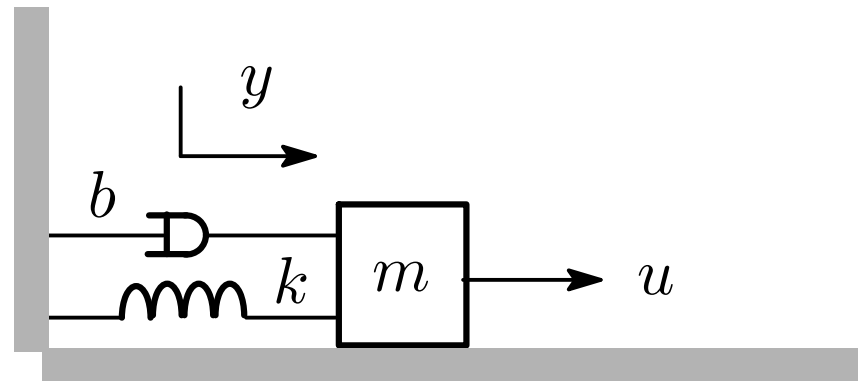
1 パラメータ変動の扱い

例：マス・バネ系

$y(t)$ ：変位， m ：マスの質量， b ：ダンパーの粘性摩擦係数， k ：バネ係数、 $u(t)$ ：外力

状態方程式

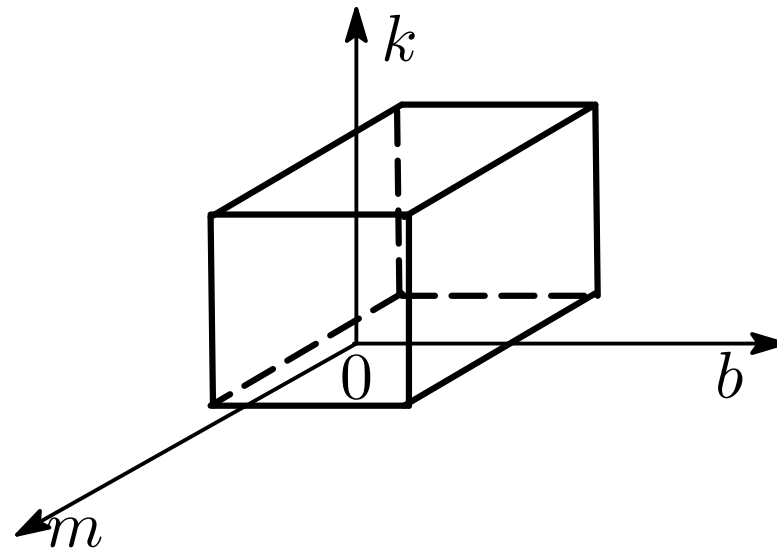
$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u, \quad x = \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \end{bmatrix} \quad (1)$$



パラメータ空間

$$m_1 \leq m \leq m_2, \quad b_1 \leq b \leq b_2, \quad k_1 \leq k \leq k_2 \quad (2)$$

$[m \ b \ k]$ が 3次元空間で 8つの頂点を持つ 6面体 (立方体) をなす



おのおのの変動パラメータをノルム有界変動として捉えるとき、ロバスト性の条件 (小ゲイン条件) は非常に保守的になり、実用的でない。

新しい方法が必須：2次安定制御

2 リアプノフ安定論

基本思想：

システム

$$\dot{x} = Ax, \quad x(0) \neq 0 \quad (3)$$

の漸近安定性 ($x(t) \rightarrow 0$) をリアプノフ関数 (エネルギー関数) の収束性の立場から論ずる。

リアプノフ関数 $V(x)$

正定関数：

$$V(x) = x^T P x > 0 \quad \forall x \neq 0, \quad V(0) = 0 \quad (4)$$

正定行列：正定関数に対応する正方対称行列 $P^T = P$ を正定行列という

$$P > 0 \quad (5)$$

もし状態の解 $x(t)$ について

$$\dot{V}(x) < 0 \quad \forall x(t) \neq 0 \quad (6)$$

成り立つならば、 $V(x(t))$ が時間 t の増加と共に単調減少する。

$V(x) \geq 0$ より

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(x(t)) = x(\infty)^T P x(\infty) = 0 \Rightarrow x(\infty) = 0 \quad (7)$$

従って、システムの漸近安定性が言える。

3 状態漸近収束の条件

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &= \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x}, \quad \dot{x} = Ax \\ &= (Ax)^T P x + x^T P (Ax) \\ &= x^T (A^T P + P A) x < 0 \quad \forall x \neq 0\end{aligned}\tag{8}$$

$$\Leftrightarrow A^T P + P A < 0\tag{9}$$

よって、この行列不等式を満たす正定解 $P > 0$ が存在すれば、システムの漸近安定性は保証される。

4 状態収束率の条件

$$A^T P + PA + 2\sigma P < 0 \quad (10)$$

が正定解 $P > 0$ を持てば、

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= x^T (A^T P + PA)x < x^T (-2\sigma P)x = -2\sigma V(x) \\ \Rightarrow V(x(t)) &< e^{-2\sigma t} V(x(0)) \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x^T(x) P x(t) &< e^{-2\sigma t} x^T(0) P x(0) \\ \Rightarrow \|x(t)\| &< c e^{-\sigma t} \|x(0)\| \end{aligned} \quad (12)$$

すなわち、状態 $x(t)$ が収束率 σ で零に収束する。

5 2次安定性

システム集合

$$\dot{x} = A(\theta)x, \quad \theta : \text{不確かパラメータのベクトル} \quad (13)$$

例：マス・バネ系 ($u = 0$)

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} x = A(m, b, k)x, \quad \theta = [m \quad b \quad k]$$

本来、システムが変化すると、リアプノフ関数も変わるが、それを見つけるのが困難。そこで、プラント集合に含まれるすべてのシステムを一つの2次リアプノフ関数 $V = x^T P x$ でその安定性を保証する。これが可能な場合、プラント集合が2次安定であるという。

$$V(x) = x^T P x > 0 \quad \forall x \neq 0, \quad \dot{V}(x, \theta) < 0 \quad \forall x \neq 0, \theta \quad (14)$$

2次安定性はかなり厳しい要求であるが、実用上きわめて有用である。

6 2次安定性の条件

$\dot{V}(x, \theta) = x^T (A^T(\theta)P + PA(\theta))x$ より、2次安定の条件は

$$\exists P > 0 \Rightarrow A^T(\theta)P + PA(\theta) < 0 \quad \forall \theta \quad (15)$$

例：1次系を考える。

$$\dot{x} = -(2 + \theta)x, \quad -1 \leq \theta \leq 1$$

このとき

$$A^T(\theta)P + PA(\theta) = -(2 + \theta)P - P(2 + \theta) = -2(2 + \theta)P$$

$$P = 1 \Rightarrow A^T(\theta)P + PA(\theta) = -2(2 + \theta) < 0 \quad \forall \theta$$

通常の漸近安定性と同等である。

問題：不等式

$$A^T(\theta)P + PA(\theta) < 0 \quad \forall \theta$$

の解 $P > 0$ を如何に求めるか？

不確かなパラメータベクトル θ に依存するので、一般的な場合は困難である。

$A(\theta)$ が θ に関して特殊な構造を持つとき、可能。

7 パラメータベクトルのポリトープ集合

一つのパラメータの場合

$m \in [m_1, m_2]$ はその頂点 m_1, m_2 を用いて、以下のように表せる。

$$m = \lambda m_1 + (1 - \lambda)m_2 = m_2 - \lambda(m_2 - m_1), \lambda \in [0, 1] \Leftrightarrow \quad (16)$$

$$m = \alpha_1 m_1 + \alpha_2 m_2, \alpha_1 = \lambda, \alpha_2 = 1 - \lambda \Rightarrow \alpha_1 + \alpha_2 = 1, \alpha_i \geq 0 \quad (17)$$

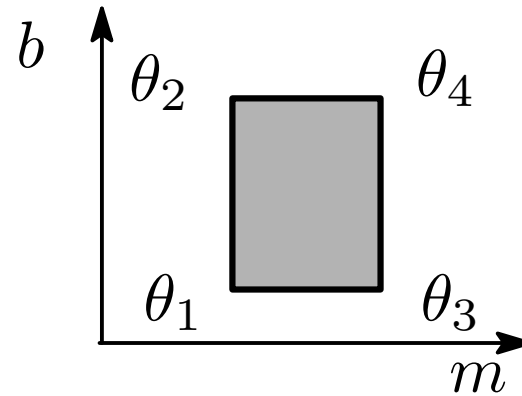
二つのパラメータの場合

$m \in [m_1, m_2]$ 、 $b \in [b_1, b_2]$ はそれぞれ

$$m = \alpha_1 m_1 + \alpha_2 m_2, \alpha_1 + \alpha_2 = 1, \alpha_i \geq 0 \quad (18)$$

$$b = \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2, \beta_1 + \beta_2 = 1, \beta_i \geq 0 \quad (19)$$

で表せる。ベクトル $[m \ b]$ が4つの頂点を持つ長方形である。



$$\theta_1 = \begin{bmatrix} m_1 \\ b_1 \end{bmatrix}, \theta_2 = \begin{bmatrix} m_1 \\ b_2 \end{bmatrix}, \theta_3 = \begin{bmatrix} m_2 \\ b_1 \end{bmatrix}, \theta_4 = \begin{bmatrix} m_2 \\ b_2 \end{bmatrix} \quad (20)$$

すると

$$\theta = \begin{bmatrix} m \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\beta_1 + \beta_2)(\alpha_1 m_1 + \alpha_2 m_2) \\ (\alpha_1 + \alpha_2)(\beta_1 b_1 + \beta_2 b_2) \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$= \alpha_1 \beta_1 \begin{bmatrix} m_1 \\ b_1 \end{bmatrix} + \alpha_1 \beta_2 \begin{bmatrix} m_1 \\ b_2 \end{bmatrix} + \alpha_2 \beta_1 \begin{bmatrix} m_2 \\ b_1 \end{bmatrix} + \alpha_2 \beta_2 \begin{bmatrix} m_2 \\ b_2 \end{bmatrix} \quad (22)$$

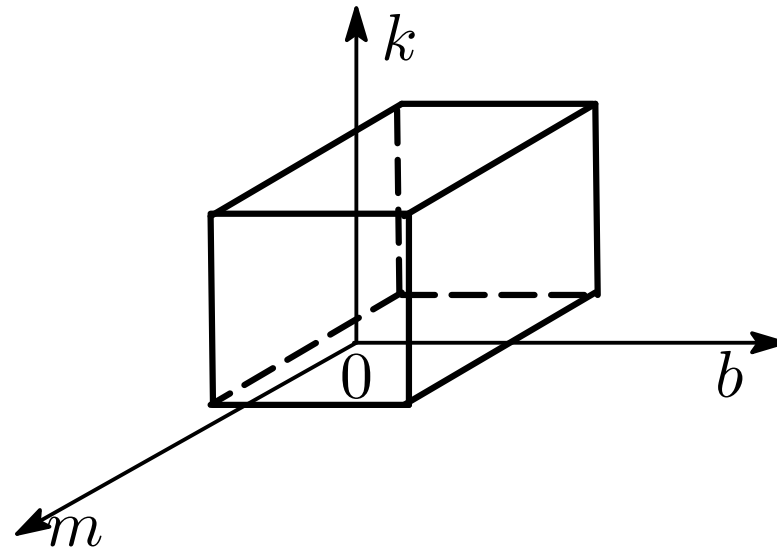
$$\lambda_1 = \alpha_1\beta_1, \lambda_2 = \alpha_1\beta_2, \lambda_3 = \alpha_2\beta_1, \lambda_4 = \alpha_2\beta_2 \Rightarrow \lambda_i \geq 0$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = \alpha_1(\beta_1 + \beta_2) + \alpha_2(\beta_1 + \beta_2) = \alpha_1 + \alpha_2 = 1$$

$$\Rightarrow \theta = \lambda_1\theta_1 + \lambda_2\theta_2 + \lambda_3\theta_3 + \lambda_4\theta_4$$

よって、ベクトルがポリトープ頂点の凸結合で表せる。

3つのパラメータの場合 (6面体)



パラメータ集合は8つの頂点持つ6面体となる。パラメータベクトルは頂点の凸結合で書ける。

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} m \\ b \\ k \end{bmatrix} &= \lambda_1 \begin{bmatrix} m_1 \\ b_1 \\ k_1 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} m_1 \\ b_1 \\ k_2 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} m_1 \\ b_2 \\ k_1 \end{bmatrix} + \lambda_4 \begin{bmatrix} m_1 \\ b_2 \\ k_2 \end{bmatrix} \\ &+ \lambda_5 \begin{bmatrix} m_2 \\ b_1 \\ k_1 \end{bmatrix} + \lambda_6 \begin{bmatrix} m_2 \\ b_1 \\ k_2 \end{bmatrix} + \lambda_7 \begin{bmatrix} m_2 \\ b_2 \\ k_1 \end{bmatrix} + \lambda_8 \begin{bmatrix} m_2 \\ b_2 \\ k_2 \end{bmatrix} \quad (23) \end{aligned}$$

$$\lambda_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^8 \lambda_i = 1$$

8 行列ポリトープ

例：マス・バネ系

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u, \quad x = \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \end{bmatrix} \quad (24)$$

質量 m だけが変化する場合

$$\frac{1}{m} = \alpha_1 \frac{1}{m_1} + \alpha_2 \frac{1}{m_2}$$

を代入すれば、各行列もポリトープで表現される。 $(\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ より)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m_1} & -\frac{b}{m_1} \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m_2} & -\frac{b}{m_2} \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m_1} \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m_2} \end{bmatrix}$$

質問： m, b 両方が変化する場合、変動パラメータの積 b/m が凸表現で
きるか？

$$\begin{aligned}\frac{b}{m} &= \left(\alpha_1 \frac{1}{m_1} + \alpha_2 \frac{1}{m_2}\right) (\beta_1 b_1 + \beta_2 b_2) \\ &= \alpha_1 \beta_1 \frac{b_1}{m_1} + \alpha_1 \beta_2 \frac{b_2}{m_1} + \alpha_2 \beta_1 \frac{b_1}{m_2} + \alpha_2 \beta_2 \frac{b_2}{m_2} \\ &= \lambda_1 \frac{b_1}{m_1} + \lambda_2 \frac{b_2}{m_1} + \lambda_3 \frac{b_1}{m_2} + \lambda_4 \frac{b_2}{m_2}\end{aligned}$$

やはり頂点の凸結合となる。

このとき、係数行列もポリトープ表現される。

$$A(m, b) = \lambda_1 A(b_1, m_1) + \lambda_2 A(b_2, m_1) + \lambda_3 A(b_1, m_2) + \lambda_4 A(b_2, m_2)$$

$$B = \lambda_1 B(m_1) + \lambda_2 B(m_1) + \lambda_3 B(m_2) + \lambda_4 B(m_2)$$

結論：パラメータの積もポリトープ頂点の凸結合で表せる！（2乗など自分自身との積も含む）

9 ポリトープ系の2次安定条件

ポリトープシステム

$$\dot{x} = \left(\sum_{i=1}^N \lambda_i A_i \right) x, \quad x(0) \neq 0, \quad \lambda_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^N \lambda_i = 1 \quad (25)$$

2次安定条件

$$\left(\sum_{i=1}^N \lambda_i A_i \right)^T P + P \left(\sum_{i=1}^N \lambda_i A_i \right) < 0 \quad \forall \lambda_i \quad (26)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^N \lambda_i (A_i^T P + P A_i) < 0 \quad \forall \lambda_i \quad (27)$$

を満たす正定行列 P が存在すること

等価な頂点条件

まず、 $\lambda_i = 1 \Rightarrow \lambda_j = 0 (j \neq i)$ のとき式 (27) が次式になる。

$$A_i^T P + P A_i < 0 \quad (28)$$

よって、本式がすべての i (すなわち、すべての頂点) について成立。

逆に、式 (28) がすべての i について成り立つとき、少なくとも一つの λ_i が零でないから

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i (A_i^T P + P A_i) < 0 \quad \forall \lambda_i$$

も成立。よって、各頂点における条件

$$A_i^T P + P A_i < 0 \quad \forall i \quad (29)$$

が等価な 2 次安定条件となる。

条件 (29) は数値解法で解くことができる。

実習問題

モータと負荷を軸でつないだ2慣性系の状態モデル

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & -k/J_M & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & k/J_L & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1/J_M \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$
$$y = [1 \quad 0 \quad 0]x$$

J_M, J_L, k はモータの慣性モーメント, 負荷の慣性モーメントと軸のバネ定数を表し、それぞれ以下の範囲内で変化する。

$$J_1 \leq J_L \leq J_2, \quad k_1 \leq k \leq k_2$$

本システムのポリトープ表現を求めよ。

10 状態フィードバックによる2次安定化

ポリトープシステム

$$\dot{x} = \left(\sum_{i=1}^N \lambda_i A_i \right) x + \left(\sum_{i=1}^N \lambda_i B_i \right) u, \quad \lambda_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^N \lambda_i = 1 \quad (30)$$

に定数状態フィードバックを施す。

$$u = Fx \quad (31)$$

閉ループ系

$$\dot{x} = \left(\sum_{i=1}^N \lambda_i A_i + \sum_{i=1}^N \lambda_i B_i F \right) x = \sum_{i=1}^N \lambda_i (A_i + B_i F) x \quad (32)$$

$$\lambda_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^N \lambda_i = 1$$

2 次安定条件

$\exists F, P > 0$ s.t.

$$(A_i + B_i F)^T P + P(A_i + B_i F) < 0 \quad \forall i \quad (33)$$

$$\Leftrightarrow A_i^T P + P A_i + (B_i F)^T P + P B_i F < 0 \quad \forall i \quad (34)$$

本不等式に変数行列の積 $(B_i F)^T P, P B_i F$ があり、LMI ではなく BMI(双線形行列不等式) であるため、そのままでは解けない。

BMI から LMI への変換：変数変換によるアプローチ

$$Q = P^{-1}, \quad X = FQ \Leftrightarrow F = XQ^{-1} \quad (35)$$

の変数変換により、2 次安定条件は次のようになる。

$$Q(A_i + B_i F)^T + (A_i + B_i F)Q < 0 \quad \forall i \quad (36)$$

$$\Leftrightarrow Q A_i^T + A_i Q + X^T B_i^T + B_i X < 0 \quad \forall i \quad (37)$$

これは変数 Q, X に関する LMI であり、解ける。

11 非線形システムの LPV 表現

LPV(線形パラメータ変動) システム

$$\dot{x} = A(p(t))x + B(p(t))u \quad (38)$$

$$y = C(p(t))x \quad (39)$$

$p(t)$ が時変のパラメータベクトル、各行列が $p(t)$ に関して線形である。

例： $p(t) = [p_1(t) \ p_2(t)]$ の場合

$$A(p(t)) = A_0 + p_1(t)A_1 + p_2(t)A_2, \quad B(p(t)) = B_0 + p_1(t)B_1 + p_2(t)B_2$$

$$C(p(t)) = C_0 + p_1(t)C_1 + p_2(t)C_2$$

非線形システムの LPV システムへの変換

多くの非線形システムは、非線形項を状態依存のパラメータを持つ線形項として捉えれば、LPV システムに等価変換可能である。

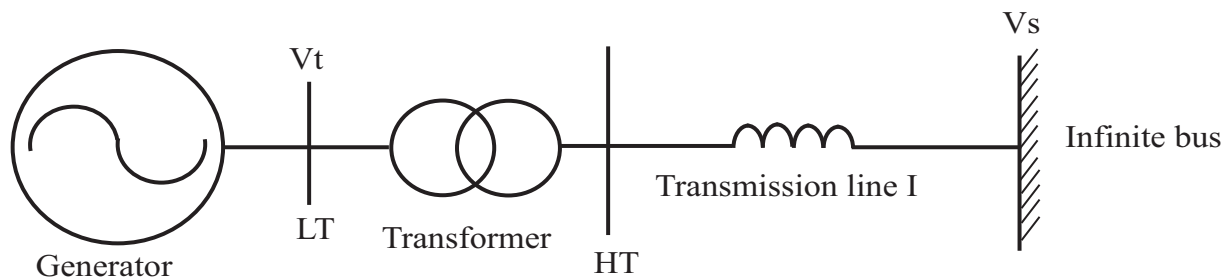
12 電力システムの事例

$$\dot{\delta} = \omega - \omega_0$$

$$\dot{\omega} = \frac{\omega_0}{M} P_M - \frac{\omega_0}{M} P_e - \frac{D}{M} (\omega - \omega_0)$$

$$\dot{E}'_q = -\frac{1}{T'_d} E'_q + \frac{x_d - x'_d}{T_{d0} x'_{d\Sigma}} V_s \cos \delta + \frac{1}{T_{d0}} V_f \quad (40)$$

$$P_e = \frac{E'_q V_s \sin \delta}{x'_{d\Sigma}} \quad (41)$$



動態安定化問題

大きい擾乱を受けるときや事故が起きた後、状態をすばやく平衡点に戻すこと \Leftrightarrow 偏差状態の安定化

状態偏差ベクトル

平衡点： $(\delta_0, \omega_0, E'_{q0}, V_{f0})$

状態と入力の偏差：

$$x_1 = \delta - \delta_0, \quad x_2 = \omega - \omega_0, \quad x_3 = E'_q - E'_{q0}, \quad u = V_f - V_{f0}$$

偏差状態 x の状態方程式

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = d_1 \sin \delta x_3 + d_1 E'_{q0} (\sin \delta - \sin \delta_0) + d_2 x_2$$

$$\dot{x}_3 = d_3 x_3 + d_4 (\cos \delta - \cos \delta_0) + d_5 u \quad (42)$$

$(\sin \delta - \sin \delta_0)/(\delta - \delta_0)$ と $(\cos \delta - \cos \delta_0)/(\delta - \delta_0)$ が有界であることに着目すれば、非線形項を

$$\begin{aligned}\sin \delta - \sin \delta_0 &= \frac{\sin \delta - \sin \delta_0}{\delta - \delta_0} x_1 \\ \cos \delta - \cos \delta_0 &= \frac{\cos \delta - \cos \delta_0}{\delta - \delta_0} x_1\end{aligned}\quad (43)$$

のように状態依存の係数を持つ線形項に書き換えられる。

相差点 δ に依存するパラメータ

$$\begin{aligned}w_1(\delta) &= \frac{\sin \delta - \sin \delta_0}{\delta - \delta_0} \\ w_2(\delta) &= \sin \delta \\ w_3(\delta) &= \frac{\cos \delta - \cos \delta_0}{\delta - \delta_0}\end{aligned}\quad (44)$$

$\delta(t)$ をオンラインで測れば、時変係数 $w(t)$ を計算できる。

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= d_1 w_2(\delta) x_3 + d_1 E'_{q0} w_1(\delta) x_1 + d_2 x_2 \\ \dot{x}_3 &= d_3 x_3 + d_4 w_3(\delta) x_1 + d_5 u\end{aligned}$$

LPV モデル

$$\dot{x} = A(w)x + bu \quad (45)$$

$$A(w) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ d_1 E'_{q0} w_1(\delta) & d_2 & d_1 w_2(\delta) \\ d_4 w_3(\delta) & 0 & d_3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d_5 \end{bmatrix}^T$$

$$A(w) = A_0 + w_1 A_1 + w_2 A_2 + w_3 A_3 \quad (46)$$

13 ゲインスケジュール制御

LPV 制御対象モデル

$$\dot{x} = A(p(t))x + B(p(t))u \quad (47)$$

$$y = C(p(t))x \quad (48)$$

に対して、固定ゲインの制御器で制御する場合、性能が上がらない。そこで、 $p(t)$ がオンラインで計測されることに着目し、制御器のゲインを $p(t)$ の値に応じて変えれば、よりよい性能の達成が期待できる。

ゲインスケジュール制御器

$$\dot{x}_K = A_K(p(t))x_K + B_K(p(t))y \quad (49)$$

$$u = C_K(p(t))x_K + D_K(p(t))y \quad (50)$$

ただし、各係数行列は時変パラメータ $p(t)$ に関して線形である。

14 設計事例：電力システムの安定化

ゲインスケジュール状態フィードバック

$$u = F(w)x \quad (51)$$

$$F(w) = F_0 + w_1 F_1 + w_2 F_2 + w_3 F_3 \quad (52)$$

閉ループ系

$$\dot{x} = A_{cl}(w)x \quad (53)$$

$$A_{cl}(w) = (A_0 + bF_0) + w_1(A_1 + bF_1) + w_2(A_2 + bF_2) + w_3(A_3 + bF_3)$$

設計仕様

状態の収束率を σ 以上にする。

$$A_{cl}(w)^T P + P A_{cl}(w) + 2\sigma P < 0, \quad P > 0 \quad (54)$$

入力飽和の考慮

励磁電圧 $V_f(\rightarrow u)$ が飽和特性を有する。飽和を避けるために、フィードバックゲイン $F(w)$ の大きさ $\|F(w)X^{\frac{1}{2}}\|$ を最小化する。すなわち

$$\|F(w)X^{\frac{1}{2}}\|^2 < \gamma, \quad X = P^{-1} \quad (55)$$

を満たす γ を最小化する。

等価条件

$$\begin{aligned} \|G(w)X^{-\frac{1}{2}}\|^2 < \gamma &\Leftrightarrow G(w)X^{-1}G^T(w) < \gamma \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \gamma I & G(w) \\ G^T(w) & X \end{pmatrix} > 0 \end{aligned} \quad (56)$$

$$: G(w) = G_0 + w_1 G_1 + w_2 G_2 + w_3 G_3 \quad (57)$$

パラメータベクトル w をポリトープで表せば、これらの不等式を頂点条件に置き換えられ、LMI ツールボックスで解ける。

15 設計例

$$\delta_0 = 0.1962, w_0 = 1, E'_{q0} = 1.23, V_{f0} = 2.37$$

$V_s = 1.0$	母線電圧 [p.u]
$D = 0.15$	減衰係数 [p.u]
$M = 12.922$	慣性係数 [sec.]
$T_{do} = 6.55$	フィールド回路時定数 [sec.]
$x_d = 0.8258$	d 軸同期リアクタンス [p.u]
$x_s = 0.0558$	外部リアクタンス [p.u]
$x_q = 0.535$	q 軸リアクタンス [p.u]
$x'_d = 0.1045$	d 軸過渡リアクタンス [p.u]

状態収束率 $\sigma = 1.44$ 、 δ の変動範囲 $[1^\circ, 90^\circ]$

シミュレーション設定

送電線中間部分に短絡事故が起き、事故が 0.05 秒続いた後に回復する。

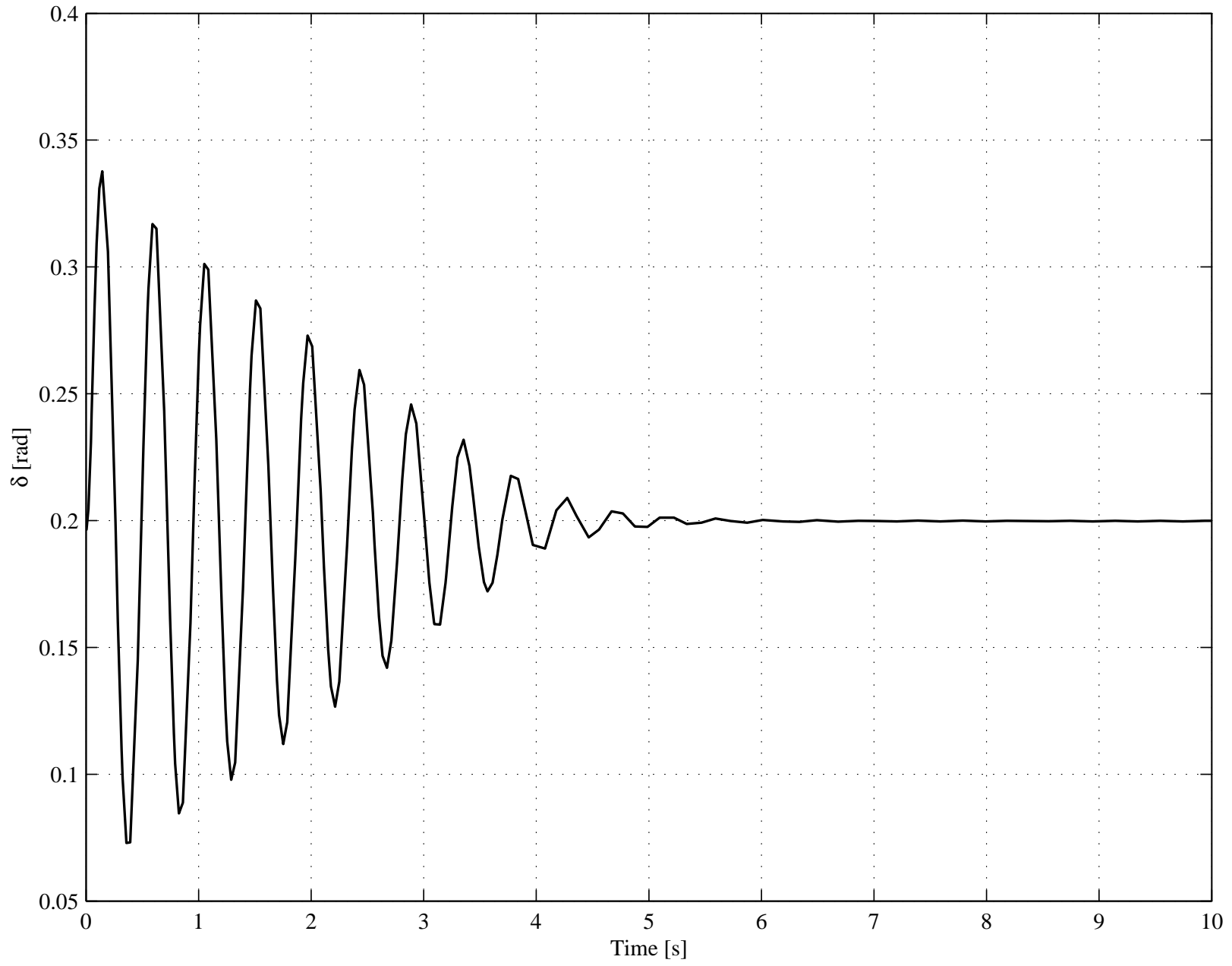


図 1 相差角

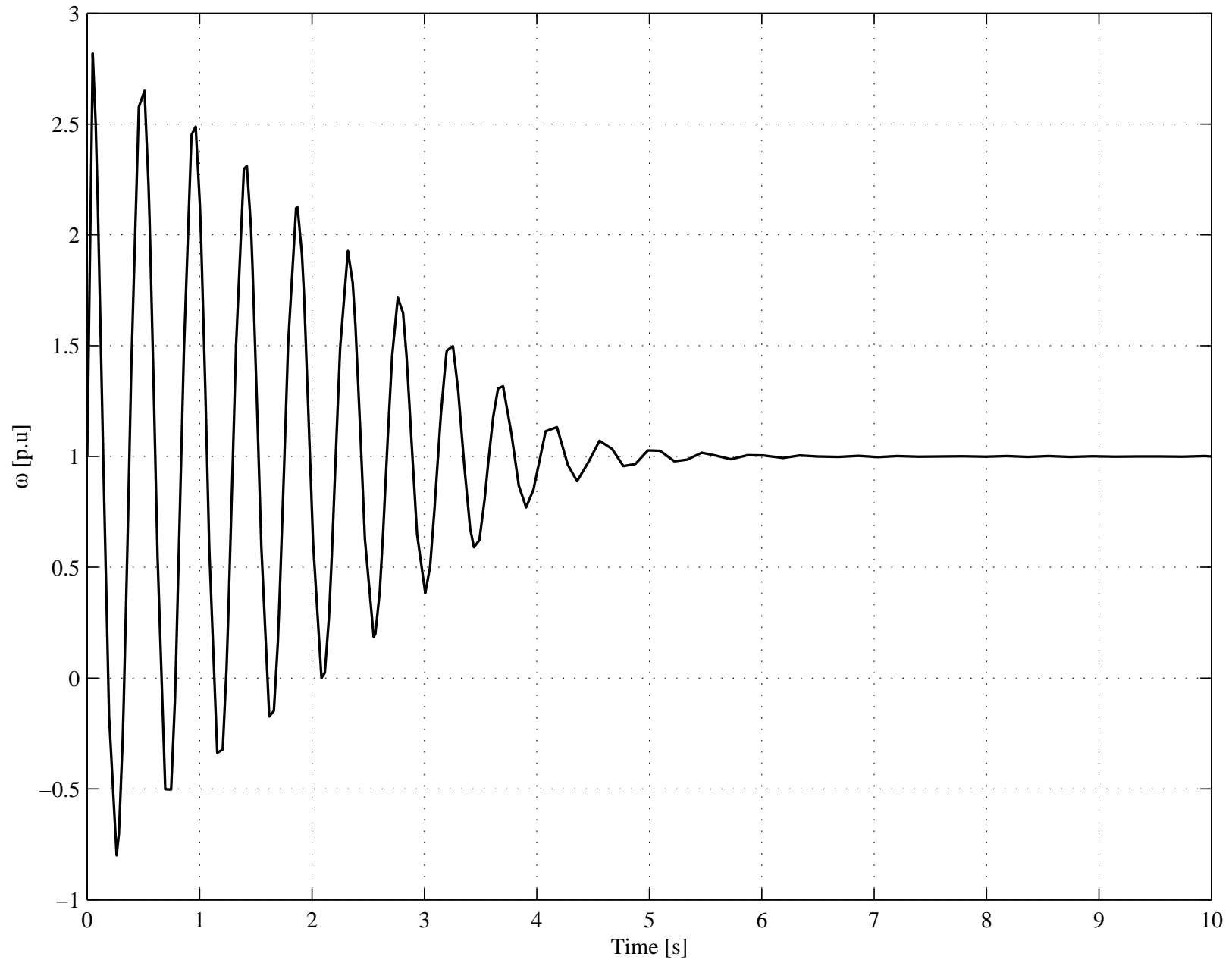


図2 角速度

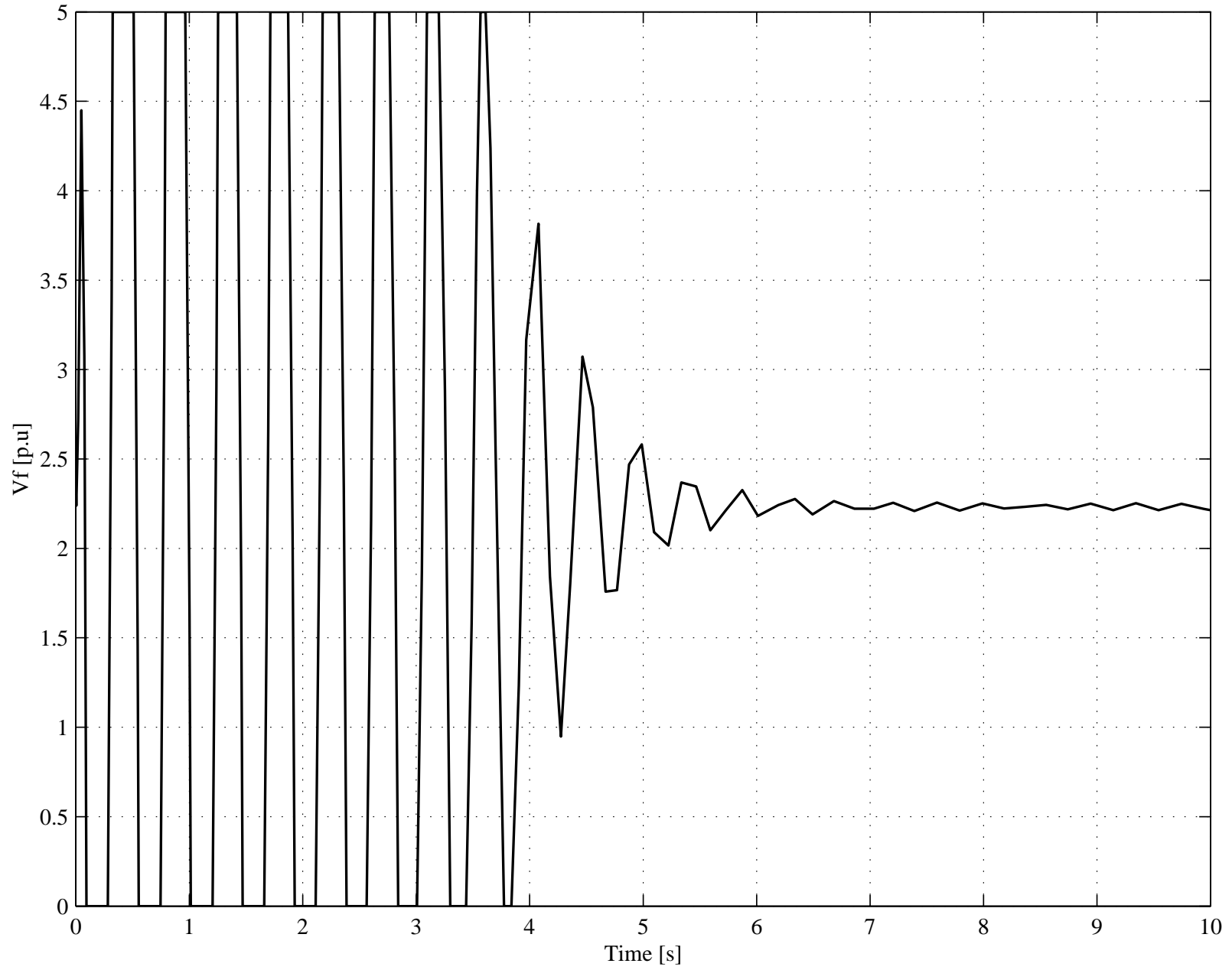


図 3 励磁電圧 V_f

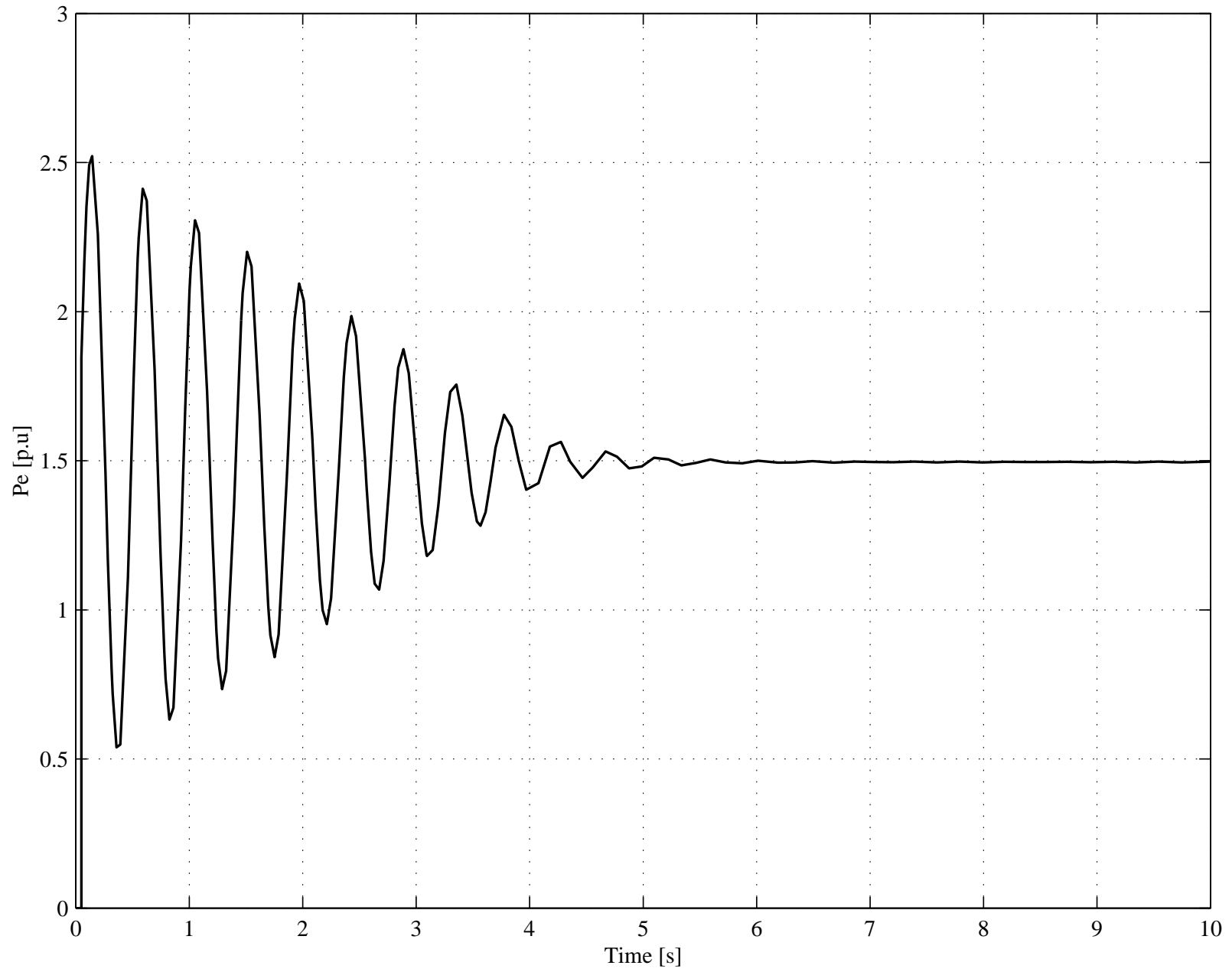


図 4 有効電力 P_e