

# 講義の内容

状態方程式をベースにした現代制御について講義する

1. フィードバック制御の基本事項
2. モデル化  
物理系から数式モデルへ
3. 構造解析  
システムの特徴を知る
4. 安定性とその条件
5. システムの性能  
目標値追従, 外乱抑制
6. システムの安定化
7. 制御器のパラメータ化  
すべての制御器の公式



# 第1章 フィードバック制御の基本事項

- 制御精度の向上とフィードバック
  - ◆ 演算増幅器の例
- フィードバック制御系の構成
- 制御系設計の流れ

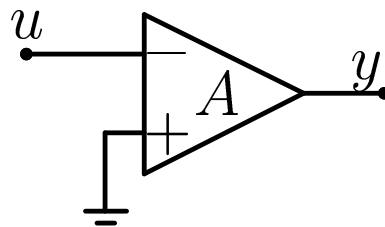


# 制御精度の向上とフィードバック： 演算増幅器の例

- 演算増幅器は非線形特性を持ち，入力の振幅が異なるとそのゲインが変化する．
- 一例として，演算増幅器のゲインが  $10^3 \sim 10^4$  の間で値を取るとする．
- 相対誤差

$$\frac{|y_{\max}| - |y_{\min}|}{|y_{\min}|} = \frac{10^4 u - 10^3 u}{10^3 u} = 900\% \quad (1)$$

つまり，出力の誤差が9倍にも及ぶ．



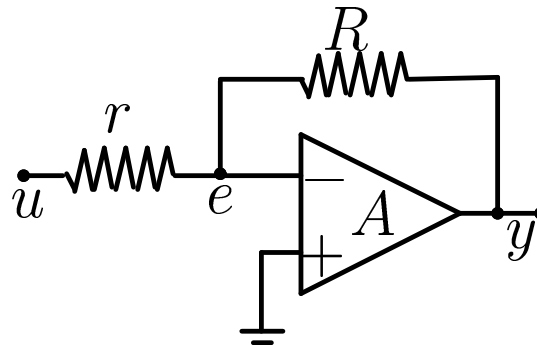
# 演算増幅器の例：フィードバックの導入

- 下図のように抵抗  $R$  と  $r$  を接続する場合，演算増幅器に流れる電流はほぼ零となる．すると，抵抗  $R$  と  $r$  を流れる電流は等しい

$$\frac{u - e}{r} = \frac{e - y}{R} \Rightarrow \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{R} \right) e = \frac{u}{r} + \frac{y}{R} \Rightarrow e = \frac{rR}{r + R} \left( \frac{u}{r} + \frac{y}{R} \right) \quad (2)$$

- 演算増幅器入出力電圧の関係

$$y = -Ae \quad (3)$$



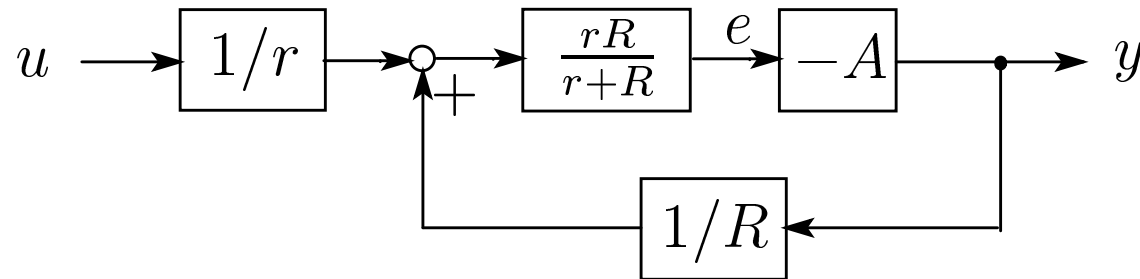
# 演算増幅器の例

- ブロック線図で表すと，下図になる．さらに，入出力間のゲイン

$$\frac{y}{u} = -\frac{R}{r + \frac{r+R}{A}} \quad (4)$$

- $R = 10r$  とすれば，ゲインは次のようになる．

$$\frac{y}{u} = -\frac{10}{1 + \frac{11}{A}} = -9.881 \sim -9.989$$



# 演算増幅器の例

- 相対誤差

$$\frac{9.989 - 9.881}{9.881} \approx 1.09\%$$

大幅に低減される！

- $10^3$  の増幅ゲインを実現したいならば、演算増幅器を3段直列すればよい。この場合の相対誤差

$$\frac{9.989^3 - 9.881^3}{9.881^3} \approx 2.9\% \quad (5)$$

やはり十分に低い。

- 従って、フィードバック制御を行うことにより、安定した増幅ゲインを得ることができるようになる。つまり、フィードバック制御はモデル不確かさに強い(ロバストという)。
- ただし、その代償として一つの演算増幅器と同等の増幅ゲインを実現するのに三つの演算増幅器を使う必要がある。



# フィードバック制御系の基本要素と構成

**制御対象  $P$**  制御しようとする物理系，センサ，アクチュエータをまとめたもの

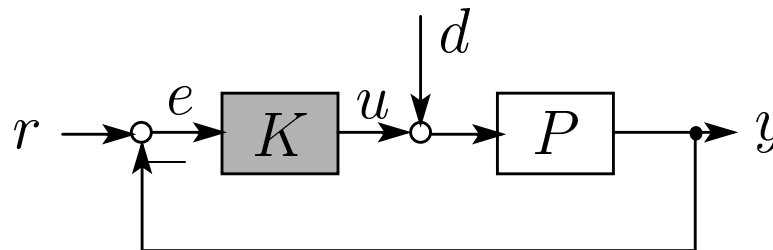
**制御器 (補償器)  $K$**  アクチュエータへ指令 (入力) を出す機構 (アルゴリズム)

**出力  $y$**  センサで測った物理量

**入力  $u$**  アクチュエータへの指令

**目標値  $r$**  目標とする出力

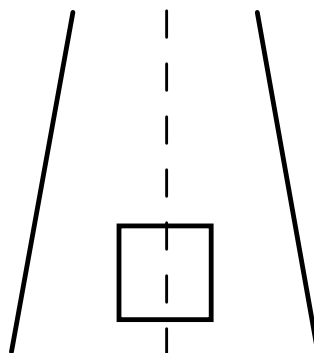
**外乱  $d$**  環境からの影響



# 例：自動車の運転

目的：ドライバのハンドル操作で自動車を車線に保つ (Lane Keeping)

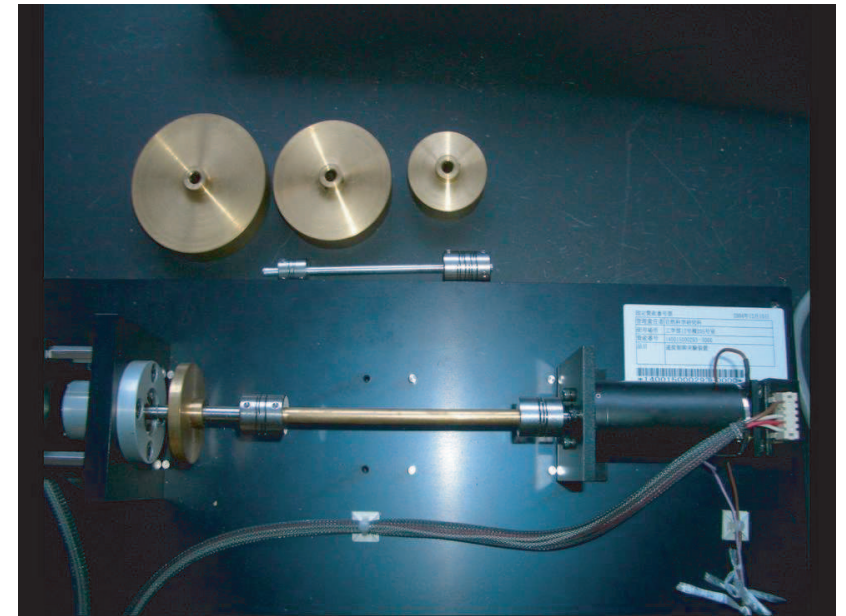
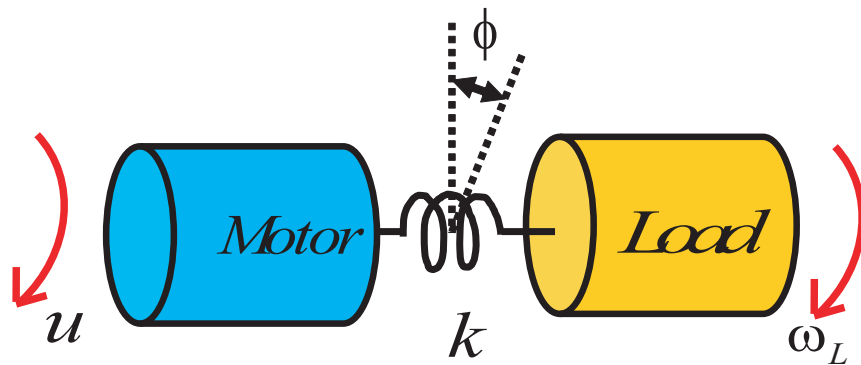
- アクチュエータ:手と腕
- センサ：目
- 制御器：ドライバの脳
- 出力：自動車の位置と方向角
- 入力：ドライバの力
- 目標値：車線の中心線
- 外乱：カーブ、路面の傾斜、ハンドルのアンバランス





## 2 慣性系の例

- アクチュエータ: モータ
- センサ: エンコーダ
- 出力: 負荷回転速度  $\omega_L$
- 入力: トルク  $u$
- 目標値: 要求された回転速度
- 外乱: 負荷の変化、摩擦



# 制御系設計の流れ

- 制御仕様の決定 (4) 章
- センサとアクチュエータの選択
- 制御対象の数式化(モデル化) (1) 章
- 数式モデル性質の解析 (2, 3) 章
- 制御器の設計 (5, 6) 章
- シミュレーションによる性能確認
- 実験による性能検証



# 第1章 モデル化：物理系から数式モデルへ

- 本章では、線形システムの数学表現，すなわちモデルについて解説する。
- 制御対象の振る舞いを解析し，制御系を設計するためには，制御対象の動特性を数式モデルで表現する必要がある。
- 物理モデルの立て方を述べてから，制御工学で用いるモデルの二つの表現方法，つまり伝達関数と状態方程式について詳しく説明する。
- 記号  $\dot{x}(t)$ ， $\ddot{x}(t)$  で時間に関する1階微分，2階微分を表すことにする。

$$\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}, \quad \ddot{x}(t) = \frac{d^2x}{dt^2}$$

また，時間関数  $x(t)$  の Laplace 変換を  $\hat{x}(s)$  で表すことにする。

$$\hat{x}(s) = \mathcal{L}[x(t)]$$



# 第 1 章の内容

1. 物理法則に基づく運動方程式
  - 機械系
  - 電気系
  - メカトロ系
2. 運動方程式から状態方程式へ
  - 状態と状態方程式
  - 状態の選び方
3. 運動方程式から伝達関数へ
  - ラプラス変換の復習
  - 伝達関数
4. 伝達関数と状態方程式の関係
5. 非線形システムの線形近似



# 例：クルーズ制御

自動車の速度を一定値に保つ制御はクルーズ制御と呼ばれる。そのモデルを導こう。ここでは，エンジンの動特性を省略し，駆動力を直接操作できると仮定する。

- $v(t)$ ：車速， $M$ ：自動車の質量， $D$ ：路面の粘性摩擦係数， $f(t)$ ：駆動力
- ニュートンの第2の法則より ( $\dot{v}(t) = \frac{dv(t)}{dt}$ )

$$M\dot{v}(t) = f(t) - Dv(t)$$

$$\Rightarrow M\dot{v}(t) + Dv(t) = f(t)$$

これは車速に関する運動方程式であり，車速制御のモデルである。

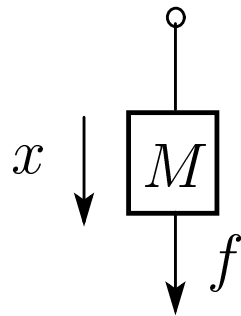
- 速度  $v$ ：制御したい物理量で**出力**という
- 駆動力  $f$ ：出力  $v$  を動かすためのもので**入力**という。
- **運動方程式とは：**  
システムの出力と入力の間成立つ因果関係を表す微分方程式



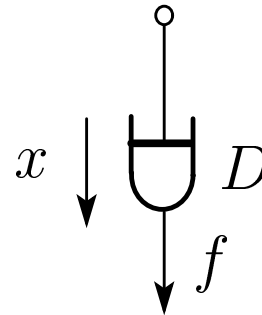
# 機械系の基本要素と物理法則

- $x(t)$  は変位,  $f(t)$  は外部から加わる力を表すとする.
- 進運動の基本要素 :

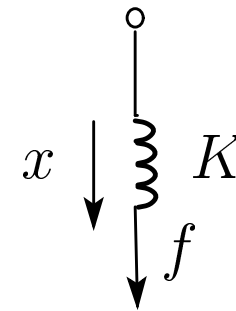
マス  $M$   
 $f(t) = M\ddot{x}(t)$



ダンパ  $D$   
 $f(t) = D\dot{x}(t)$



バネ  $K$   
 $f(t) = Kx(t)$



# 機械系運動方程式の立て方

- マス，バネとダンパの関係を支配する基本法則：ニュートンの法則
- これらを組み合わせた機械系の運動方程式を立てる手順：
  1. マスを仮想的に切り離してそれに働く力を図で解析する。  
この解析に際し，速度と加速度は変位と同じ方向にあるベクトルであることに注意する。
  2. ニュートンの法則をマスに適用すれば運動方程式が得られる。

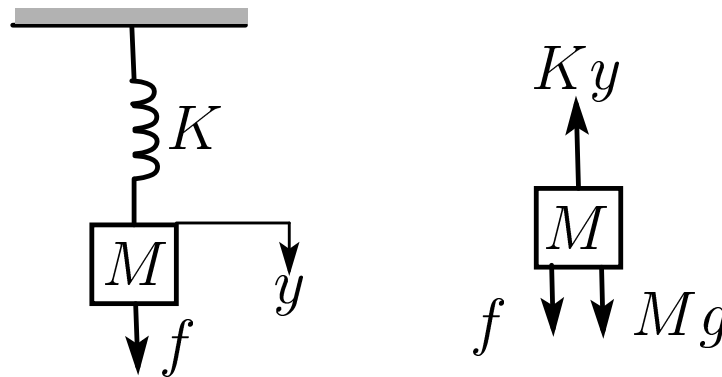


# 例：1自由度振動系の運動

- $M$ ：マスの質量， $K$ ：バネ定数， $f(t)$ ：外力， $y$ ：マスの変位
- 下向きを正の方向とする．
- マス  $M$  に働く力の総和は  $f + Mg - Ky$  となる． よって

$$M\ddot{y} = f(t) + Mg - Ky(t) \Rightarrow \ddot{y} + \frac{K}{M}y(t) = \frac{1}{M}f(t) + g \quad (6)$$

- この運動方程式は変位  $y(t)$  に関する2階微分方程式である．





# 1 自由度振動系の運動：定数項の排除

- **問題点**：上述の運動方程式に定数項  $g$  を含み、扱うには不便である。
- **質問**：この定数項をどうすれば運動方程式からなくせるか？
- **答え**：外力  $f = 0$  で、重力とバネの反発力が釣り合った状態からの変位  $\Delta y = y - y_0$  に関する運動方程式を立てればよい。
- 釣り合い状態での変位を  $y_0$  とすると、 $Mg = Ky_0$  が成立する。  $\Delta\ddot{y} = \ddot{y}$  が成立つので、方程式  $M\ddot{y} = f(t) + Mg - Ky(t)$  から

$$\begin{aligned} M\ddot{y} = f(t) + Ky_0 - Ky(t) &\Rightarrow M\Delta\ddot{y} = f(t) - K\Delta y \\ \Delta\ddot{y} + \frac{K}{M}\Delta y(t) &= \frac{1}{M}f(t) \end{aligned} \quad (7)$$

- **結論**：重力との釣り合い状態からの変位  $\Delta y$  を考えれば、重力を運動方程式から排除することができる。



# サスペンション制御モデル

## ■ 自動車サスペンション制御のための 1 / 4 モデル

$M_1$  : シャシーの質量

$M_2$  : 車体の質量

$K_s$  : サスペンションのバネ定数

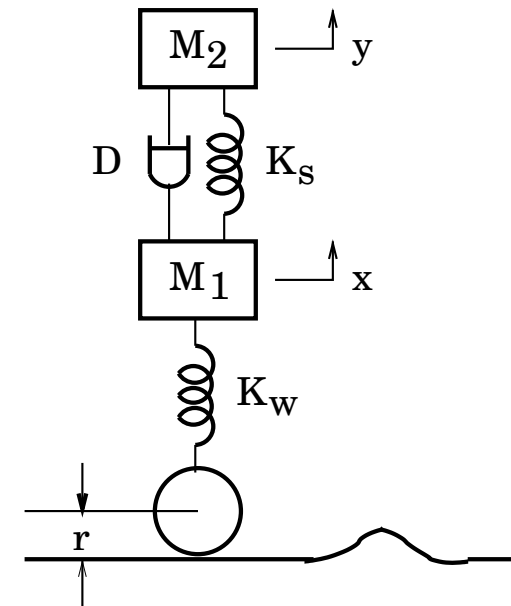
$D$  : 粘性摩擦定数

$K_w$  : 車輪のバネ定数

$y(t)$  : 車体の変位

$x(t)$  : シャシーの変位

$r(t)$  : 路面から車輪軸までの距離



路面に段差があると、タイヤの変形により  $r(t)$  が変化 (外乱)

- サスペンションの目的から制御したい出力を車体の変位  $y$  とし、また外乱入力  $r$  である。

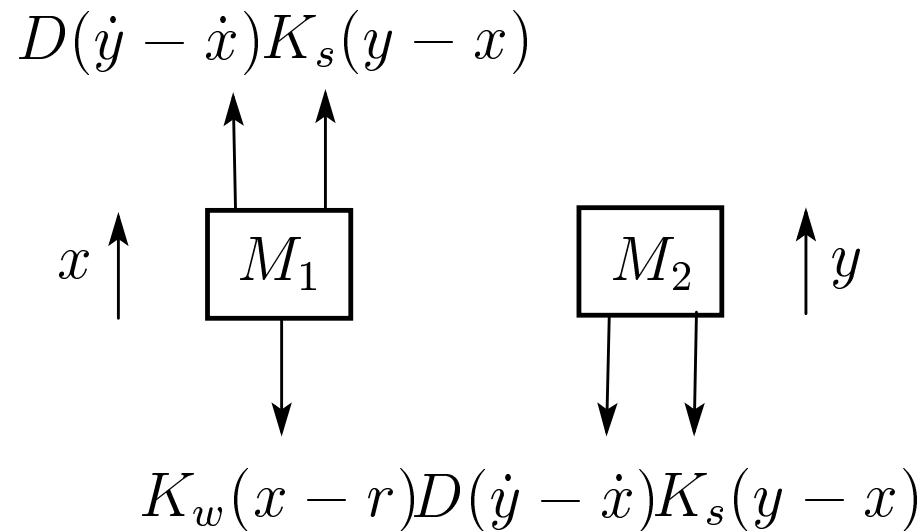


# サスペンション制御モデル

- $M_1$  と  $M_2$  に加わる力を図で解析する． 上向きを正とする．
- 力解析の際，作用と反作用の法則から  $M_1$ ，  $M_2$  間のバネとダンパが両者に加える力は大きさが同じで，方向が逆であることに注意

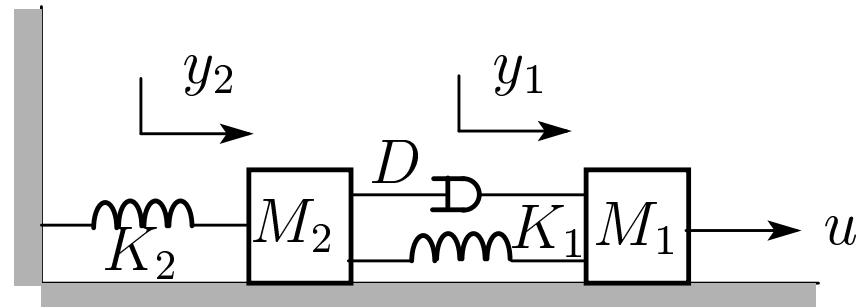
$$M_1\ddot{x} = D(\dot{y} - \dot{x}) + K_s(y - x) - K_w(x - r) \quad (8)$$

$$M_2\ddot{y} = -D(\dot{y} - \dot{x}) - K_s(y - x) \quad (9)$$



# 演習 1.3

下図の 2 自由度振動系について、その状態方程式を導け。ただし、 $M_1$  の変位を  $y_1$ 、 $M_2$  の変位を  $y_2$  とし、質量と地面の摩擦は無視する。



【解答】 各質量に作用する力の解析図より

$$M_1 \ddot{y}_1 = u - K_1(y_1 - y_2) - D(\dot{y}_1 - \dot{y}_2)$$

$$M_2 \ddot{y}_2 = K_1(y_1 - y_2) + D(\dot{y}_1 - \dot{y}_2) - K_2 y_2$$

が得られる。



# 回転運動の基本要素と物理法則

- 基本要素：慣性モーメント，ねじれバネ，ダンパ
- $\theta(t)$ ：回転角， $\tau$ ：外部から加わるトルク
- 物理法則

慣性モーメント  $J$ ：

$$\tau(t) = J\ddot{\theta}(t)$$

ねじれバネ  $K$ ：

$$\tau(t) = K\theta(t)$$

ダンパ  $D$ ：

$$\tau(t) = D\dot{\theta}(t)$$

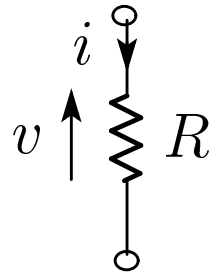


# 電気系の基本要素と物理法則

- 基本要素：抵抗  $R$ ，コンデンサ  $C$  とコイル  $L$

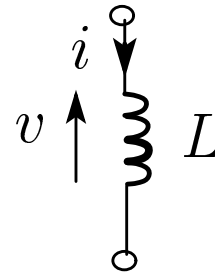
抵抗  $R$

$$v(t) = Ri(t)$$



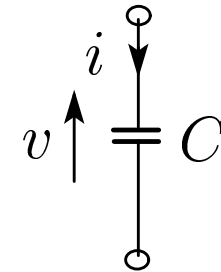
コイル  $L$

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$



コンデンサ  $C$

$$i(t) = C\dot{v}(t)$$



- 電気回路に関する法則：キルヒホッフの電流法則と電圧法則

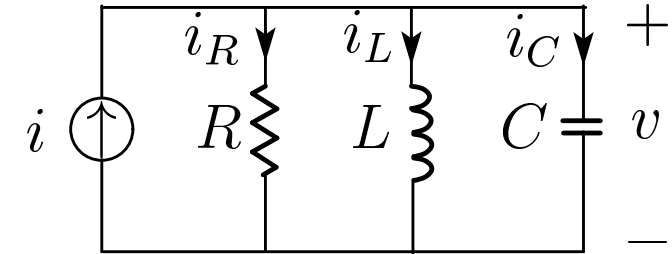


# 並列 LCR 回路の運動方程式

$$i_R(t) = \frac{1}{R}v(t)$$

$$i_C(t) = C\dot{v}(t)$$

$$i_L(t) = i_L(0) + \frac{1}{L} \int_0^t v(\tau) d\tau$$



- キルヒホッフの電流法則を用いると,

$$i(t) = i_R(t) + i_C(t) + i_L(t) = \frac{1}{R}v(t) + C\dot{v}(t) + \frac{1}{L} \int_0^t v(\tau) d\tau$$

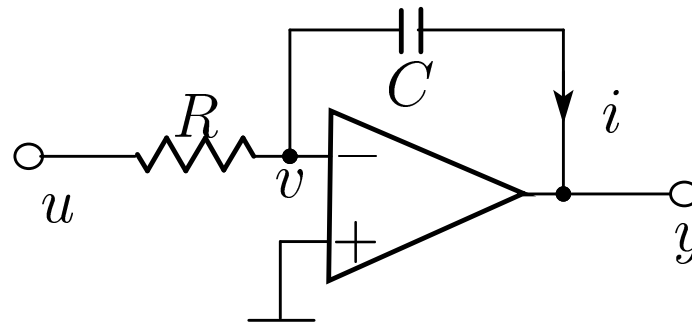
- 上式の両辺を微分して整理すると, 最終的に次の 2 階微分方程式を得る.

$$\ddot{v}(t) + \frac{1}{RC}\dot{v}(t) + \frac{1}{LC}v(t) = \frac{1}{C} \frac{di(t)}{dt} \quad (10)$$



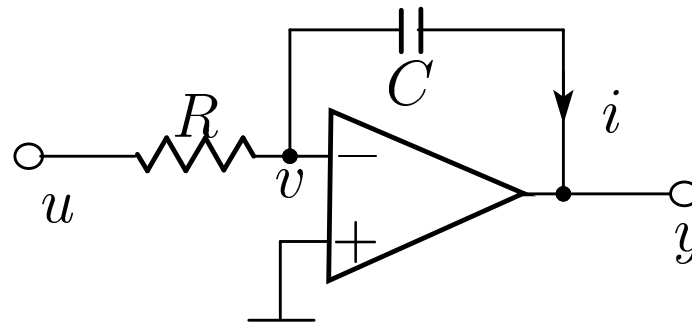
# 演習 1.2

下図に示す演算増幅器回路において、増幅倍数と内部抵抗が十分に大きい  
ため、演算増幅器内部を流れる電流及び電圧  $v$  はすべて 0 と考えてよい。  
出力  $y$  を演算増幅器の出力電圧とする。その状態方程式を求め、この回路  
が積分器の役割を果たすことを示せ。





# 演習 1.1 の解答



回路図より

$$u = Ri \Rightarrow i = \frac{u}{R}$$

$$C \frac{d}{dt}(0 - y) = i \Rightarrow \dot{y} = -\frac{1}{C}i$$

が成立つ. よって

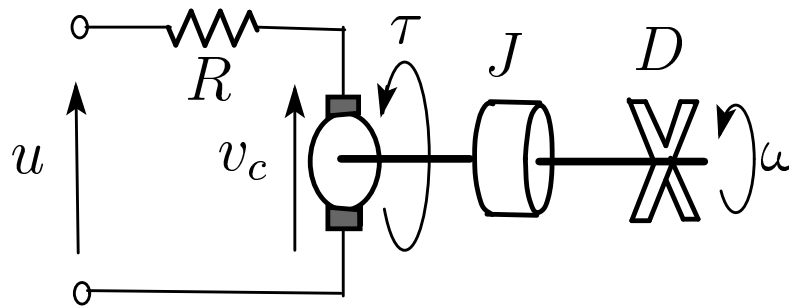
$$\dot{y} = -\frac{1}{RC}u \Rightarrow y(t) = y(0) - \frac{1}{RC} \int_0^t u(\tau) d\tau$$



# メカトロ系 (モータの例)

- メカトロ (電子機械) 系の場合, 電子的な駆動部 (アクチュエータ) と機械的な機能部から構成される. 多くの制御対象はこの範疇に属する. その典型はモータと負荷からなる 2 慣性系である.

例: 無負荷 DC サーボモータ



$R$ : 抵抗,  $J$ : モータ軸慣性モーメント,  $D$  粘性摩擦係数

$u$ : 入力電圧,  $v_c$ : モータ逆起電力,  $i$ : 電流

$\omega$ : モータ回転角速度,  $\tau$ : モータトルク,  $K$ : モータ定数

# 無負荷直流モータ

- 電気回路：モータ回転の反作用として逆起電力  $v_c$  を受ける

$$v_c(t) = K\omega(t) \Rightarrow i(t) = \frac{u(t) - v_c(t)}{R} = \frac{u(t) - K\omega(t)}{R} \quad (11)$$

- 機械部分:モータが回転軸に加えるトルク

$$\tau(t) = Ki(t)$$

- よって

$$\tau(t) = J\dot{\omega} + D\omega(t) = Ki(t) \quad (12)$$

- 式(11)を(12)に代入することによって1階微分方程式を得る

$$\dot{\omega} + \frac{K^2 + RD}{JR}\omega(t) = \frac{K}{JR}u(t) \quad (13)$$



# 運動方程式から状態方程式へ

- 1 自由度振動系の運動方程式：

$$\ddot{y} + \frac{K}{M}y(t) = \frac{1}{M}f(t) \quad (14)$$

- この 2 階微分方程式を 1 階微分方程式に等価変換する
- このために、中間変数  $\dot{y}(t)$ (速度) を導入し、 $x_1 = y$ ,  $x_2 = \dot{y}$  とおく。
- すると、まず  $x_2 = \dot{y} = \dot{x}_1$  より

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

次に、 $\dot{x}_2 = \ddot{y}$  及び運動方程式から 1 階の微分方程式が得られる。

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{K}{M}x_1(t) + \frac{1}{M}f(t)$$

- 導入された新しい変数  $x_1$ ,  $x_2$  はシステムの**状態**という。



# 1 自由度振動系の例

- これらの状態をベクトルにまとめて

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

と書くと、上述の二つの連立 1 階微分方程式は

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{M} & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} f(t) \quad (15)$$

のようにベクトルに関する 1 階微分方程式と書ける。

- このような式は**状態方程式**といい、 $x(t)$  は**状態ベクトル**という。



# 状態方程式

- 状態  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ , 入力  $u(t) \in \mathbb{R}^m$ , 出力  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  を持つ線形系

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (16)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (17)$$

ただし,  $(A, B, C, D)$  は適切な次元を持つ係数行列である.

- 状態の数  $n$  はシステムの**次元**と呼ぶ.
- 次のようにより簡潔な表現にまとめることもできる.

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} \quad (18)$$

- どんなに複雑な有限次元線形システムでも, 適切に状態ベクトルを選べば, 式(16)で表現できる



# 状態方程式の利点

- スカラ系と同じ形式で，極めて簡単
- それゆえ，新しい視点・展開が可能
- 制御設計において数値計算が容易
- デジタル実装に向く
- 非線形システムも表現できる
- 最適化，モデル予測制御などへの発展

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}$$



# 状態の選び方

- 状態方程式を立てるとき，まず状態を適切に選ぶ必要がある。
  - 状態とは，システムの運動特性を1階の連立微分方程式で表するのに必要最小限の変数である。
  - 物理法則に基づいて状態方程式を立てるとき
    - ◆ 機械系の並進運動：各質量の変位と速度
    - ◆ 機械系の回転運動：各慣性モーメントの角度と角速度
    - ◆ 電気系：コンデンサの電圧とコイルの電流
- を状態として選ぶ。
- 後で示すように，状態の選択は唯一ではなく，無数にある。これらはすべて状態変換によって結ばれ，入出力伝達関係が等しい意味で等価である。





# サスペンション制御系の状態方程式

- 状態ベクトルを次のように選ぶ：

$$z = [z_1 \ z_2 \ z_3 \ z_4]^T = [x \ \dot{x} \ y \ \dot{y}]^T$$
$$\Rightarrow \dot{z}_1 = z_2, \ \dot{z}_3 = z_4, \ \dot{z}_2 = \ddot{x}, \ \dot{z}_4 = \ddot{y}$$

- 運動方程式より

$$\begin{aligned} \dot{z}_2 &= -\frac{K_s + K_w}{M_1}x - \frac{D}{M_1}\dot{x} + \frac{K_s}{M_1}y + \frac{D}{M_1}\dot{y} + \frac{K_w}{M_1}r \\ &= -\frac{K_s + K_w}{M_1}z_1 - \frac{D}{M_1}z_2 + \frac{K_s}{M_1}z_3 + \frac{D}{M_1}z_4 + \frac{K_w}{M_1}r \\ \dot{z}_4 &= \frac{K_s}{M_2}x + \frac{D}{M_2}\dot{x} - \frac{K_s}{M_2}y - \frac{D}{M_2}\dot{y} \\ &= \frac{K_s}{M_2}z_1 + \frac{D}{M_2}z_2 - \frac{K_s}{M_2}z_3 - \frac{D}{M_2}z_4 \end{aligned}$$



# サスペンション制御系の状態方程式

- 最後に、これらを一つのベクトル方程式にまとめると、状態方程式

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{K_s+K_w}{M_1} & -\frac{D}{M_1} & \frac{K_s}{M_1} & \frac{D}{M_1}x_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{K_s}{M_2} & \frac{D}{M_2} & -\frac{K_s}{M_2} & -\frac{D}{M_2} \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K_w}{M_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} r \quad (19)$$

が得られる。

- 出力である車体の変位  $y(t)$  は

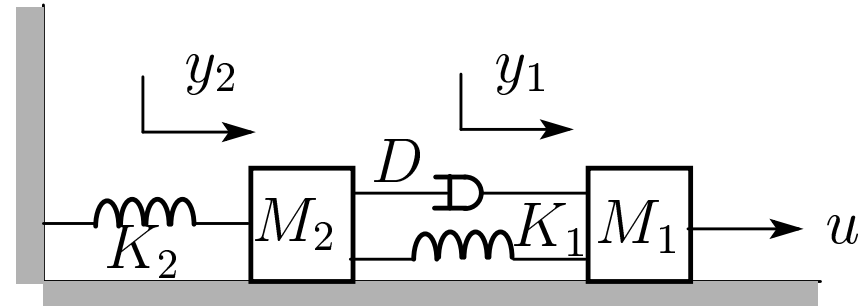
$$y = [0 \ 0 \ 1 \ 0]z \quad (20)$$

と書ける。



# 演習 1.3

2 自由度振動系の状態方程式を導け.



ただし，運動方程式は

$$M_1 \ddot{y}_1 = u - K_1(y_1 - y_2) - D(\dot{y}_1 - \dot{y}_2)$$

$$M_2 \ddot{y}_2 = K_1(y_1 - y_2) + D(\dot{y}_1 - \dot{y}_2) - K_2 y_2$$

で与えられる.



# 演習 1.3 の解答

導出した運動方程式

$$\begin{aligned}M_1 \ddot{y}_1 &= u - K_1(y_1 - y_2) - D(\dot{y}_1 - \dot{y}_2) \\M_2 \ddot{y}_2 &= K_1(y_1 - y_2) + D(\dot{y}_1 - \dot{y}_2) - K_2 y_2\end{aligned}$$

を整理すると

$$\begin{aligned}\ddot{y}_1 &= -\frac{K_1}{M_1}y_1 + \frac{K_1}{M_1}y_2 - \frac{D}{M_1}\dot{y}_1 + \frac{D}{M_1}\dot{y}_2 + \frac{1}{M_1}u \\ \ddot{y}_2 &= \frac{K_1}{M_2}y_1 - \frac{K_1 + K_2}{M_2}y_2 + \frac{D}{M_2}\dot{y}_1 - \frac{D}{M_2}\dot{y}_2\end{aligned}$$

状態変数を

$$x_1 = y_1, \quad x_2 = y_2, \quad x_3 = \dot{y}_1, \quad x_4 = \dot{y}_2$$

とおくと



# 演習 1.3 の解答

$$\dot{x}_1 = \dot{y}_1 = x_3$$

$$\dot{x}_2 = \dot{y}_2 = x_4$$

$$\dot{x}_3 = \ddot{y}_1 = -\frac{K_1}{M_1}x_1 + \frac{K_1}{M_1}x_2 - \frac{D}{M_1}x_3 + \frac{D}{M_1}x_4 + \frac{1}{M_1}u$$

$$\dot{x}_4 = \ddot{y}_2 = \frac{K_1}{M_2}x_1 - \frac{K_1 + K_2}{M_2}x_2 + \frac{D}{M_2}x_3 - \frac{D}{M_2}x_4$$

ベクトル形式

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{K_1}{M_1} & \frac{K_1}{M_1} & -\frac{D}{M_1} & \frac{D}{M_1} \\ \frac{K_1}{M_2} & -\frac{K_1+K_2}{M_2} & \frac{D}{M_2} & -\frac{D}{M_2} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{M_1} \\ 0 \end{bmatrix} u$$



# 運動方程式から伝達関数へ

## ■ ラプラス変換

$$\hat{x}(s) = \mathcal{L}[x(t)] = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt \quad (21)$$

## ■ ラプラス変換の基本公式

$$\mathcal{L}[1(t)] = \frac{1}{s}$$

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = 1$$

$$\mathcal{L}[e^{-at}] = \frac{1}{s + a}$$

$$\mathcal{L}[\sin \omega t] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

$$\mathcal{L}[\cos \omega t] = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$



# ラプラス変換の性質

- $X(s) = \mathcal{L}[x(t)]$  とするとき

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t x(\tau)d\tau\right] = \frac{1}{s}\hat{x}(s) \quad (22)$$

$$\mathcal{L}[\dot{x}(t)] = s\hat{x}(s) - x(0) \quad (23)$$

$$\mathcal{L}[\ddot{x}(t)] = s^2\hat{x}(s) - sx(0) - \dot{x}(0) \quad (24)$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^k x(t)}{dt^k}\right] = s^k\hat{x}(s) - s^{k-1}x(0) - s^2\dot{x}(0) - \dots - x^{k-1}(0) \quad (25)$$

$$\mathcal{L}[tx(t)] = -\frac{dX(s)}{ds} \quad (26)$$

$$\mathcal{L}[e^{-at}x(t)] = X(s+a) \quad (27)$$



# 伝達関数

- クルーズ制御において駆動力と車速間の関係だけに注目したい
- 初期速度を  $v(0) = 0$  とおき，次式をラプラス変換する

$$\begin{aligned} M\dot{v}(t) + Dv(t) &= f(t) \\ \Rightarrow (Ms + D)\hat{v}(s) &= \hat{f}(s) \end{aligned}$$

- 伝達関数：出力と入力のラプラス変換の比

$$G(s) = \frac{\hat{v}(s)}{\hat{f}(s)} = \frac{1}{Ms + D} \quad (28)$$

- 微分方程式で表された入出力関係が Laplace 変換により代数関係に簡略され，扱いは遥かに容易になる。
- 伝達関数は入出力に依存せず，システム自身の性質で決まる．このことは**線形システムの特徴**である。





# 伝達関数

- 一般に，入力  $u(t)$ ，出力  $y(t)$  のシステムの**伝達関数**は

$$G(s) = \frac{\hat{y}(s)}{\hat{u}(s)} \quad (29)$$

で与えられる．

- 多入出力系の場合，**伝達行列**は

$$\hat{y}(s) = G(s)\hat{u}(s) \quad (30)$$

を満たす関数行列  $G(s)$  で定義される．

- 伝達関数 (行列) の定義から分るように，伝達関数は入力と出力の関係だけを表しており，システム内部状態の初期値と出力の関係は表現していない．従って，伝達関数表現では陰に初期状態を零と仮定している．このことに注意されたい．



# DC モータの伝達関数

- DC モータの運動方程式

$$\dot{\omega}(t) + \frac{K^2 + RD}{JR} \omega(t) = \frac{K}{JR} u(t)$$

- 零初期条件の下で上式の両辺を Laplace 変換すると

$$s\hat{\omega}(s) + \frac{K^2 + RD}{JR} \hat{\omega}(s) = \frac{K}{JR} \hat{u}(s)$$

- 整理すると、電圧入力から角速度出力までの伝達関数は

$$\frac{\hat{\omega}(s)}{\hat{u}(s)} = \frac{K/JR}{s + (K^2 + RD)/JR} \quad (31)$$

となる。



# 並列 LCR 回路の伝達関数

- LCR 回路に関する微分方程式

$$\ddot{v}(t) + \frac{1}{RC}\dot{v}(t) + \frac{1}{LC}v(t) = \frac{1}{C}\frac{di(t)}{dt}$$

- 両辺について Laplace 変換を行う

$$s^2\hat{v}(s) + \frac{1}{RC}s\hat{v}(s) + \frac{1}{LC}\hat{v}(s) = \frac{1}{C}si(s)$$

- 整理すると伝達関数

$$P(s) = \frac{\hat{v}(s)}{\hat{i}(s)} = \frac{s/C}{s^2 + s/RC + 1/LC} \quad (32)$$

を得る.



# 伝達関数と状態方程式の関係

- 初期状態  $x(0) = 0$  のもとで状態方程式を Laplace 変換する

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$s\hat{x}(s) = A\hat{x}(s) + B\hat{u}(s)$$

$$\Rightarrow (sI - A)\hat{x}(s) = B\hat{u}(s)$$

$$\Rightarrow \hat{x}(s) = (sI - A)^{-1}B\hat{u}(s)$$

- さらに、本式を  $\hat{y}(s) = C\hat{x}(s) + D\hat{u}(s)$  に代入する

$$\hat{y}(s) = [C(sI - A)^{-1}B + D]\hat{u}(s)$$

- 入出力間の伝達行列

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \quad (33)$$



# 伝達関数と状態方程式の関係

- すなわち，システムの状態方程式が与えられれば，その伝達行列は次式で計算できる．

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = C \frac{\text{adj}(sI - A)}{\det(sI - A)} B + D$$

- 逆に，伝達行列が与えられる場合，対応する状態方程式を求めることも可能である．このことは**実現**という．
- 状態空間実現を求める手法の一つ：第5章の可制御／可観測正準系を用いる
- モデル変換の MATLAB コマンド

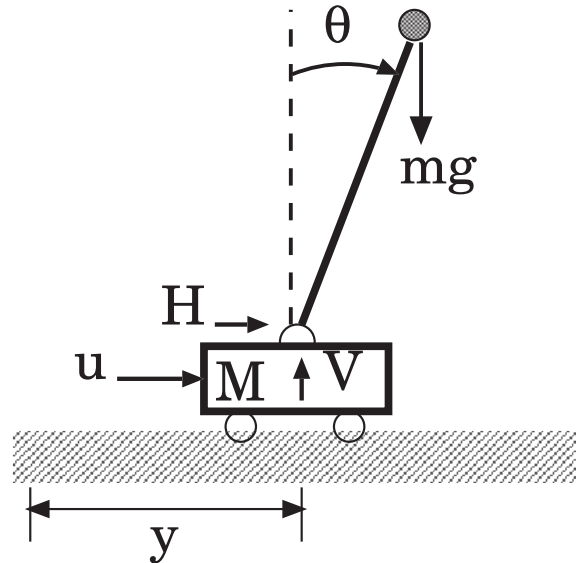
`[a,b,c,d]=tf2ss(num,den)` 伝達関数から状態方程式へ

`[num,den]=ss2tf(a,b,c,d,iu)` 状態方程式から伝達関数へ



# 非線形システムの線形近似

- 物理モデルは一般に非線形の微分方程式で与えられる。
- 倒立振り子：  
目的は、台車に適切な力入力  $u$  を加えることによって振り子の姿勢角  $\theta$  と台車の位置  $y$  を制御すること



- $H, V$  : 台車が振り子に働く水平方向と鉛直方向の力

# 倒立振り子：並進運動

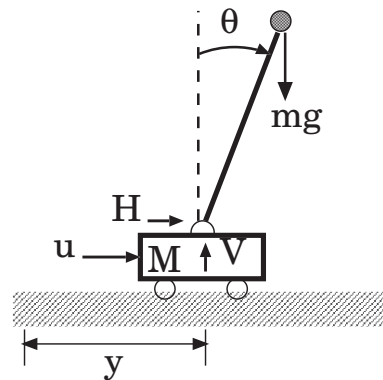
- 振り子先端質量の横変位は  $y + l \sin \theta$ ，縦変位は  $l \cos \theta$  である． よって，

$$H = m \frac{d^2}{dt^2} (y + l \sin \theta) = m \ddot{y} + ml \ddot{\theta} \cos \theta - ml (\dot{\theta})^2 \sin \theta \quad (34)$$

$$V - mg = m \frac{d^2}{dt^2} (l \cos \theta) = ml [-\ddot{\theta} \sin \theta - (\dot{\theta})^2 \cos \theta] \quad (35)$$

- 台車に関する運動方程式

$$M \ddot{y} = u - H \Rightarrow M \ddot{y} + m \ddot{y} + ml \ddot{\theta} \cos \theta - ml (\dot{\theta})^2 \sin \theta = u \quad (36)$$

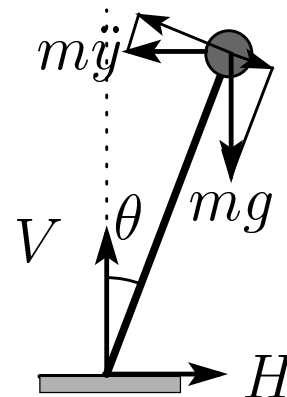


# 倒立振り子：ジョイント回りの回転運動

- ニュートンの法則が加速度零の慣性座標系においてのみ成立つ
- ニュートンの法則を使えるようにするためには，台車と質量  $m$  の並進運動を仮想力  $-M\ddot{y}$  と  $-m\ddot{y}$  で止めておく必要がある．
- すると，質量  $m$  に働く回転トルクは  $(mg \sin \theta - m\ddot{y} \cos \theta)l$  になる．振り子の慣性モーメントが  $ml^2$  であるので，回転運動の方程式は

$$ml^2\ddot{\theta} = (mg \sin \theta - m\ddot{y} \cos \theta)l \quad (37)$$

になる．これらは変数  $\theta$  の非線形関数を含む非線形の微分方程式である．





# 平衡点

- 非線形系の平衡点とは，すべての微分値が零である状態

$$M\ddot{y} + m\ddot{y} + ml\ddot{\theta} \cos \theta - ml(\dot{\theta})^2 \sin \theta = u$$

$$ml^2\ddot{\theta} = (mg \sin \theta - m\ddot{y} \cos \theta)l$$

$$V - mg = ml[-\ddot{\theta} \sin \theta - (\dot{\theta})^2 \cos \theta]$$

$\dot{\theta}_0 = \dot{y}_0 = 0, \ddot{\theta}_0 = \ddot{y}_0 = 0$  より  $y_0, \theta_0$  と入力  $u_0$  を計算すると

$$u_0 = 0, \quad y_0 \text{ arbitrary}, \quad 0 = mg \sin \theta_0 l \Rightarrow \theta_0 = 0, \pi$$

が求まる。

- 状態  $\theta$  に関して平衡点が二つあり，一意でない。
- 物理的には，外力を加えない条件下で振子が真上あるいは真下に静止することを意味する。



# 線形近似

- 倒立振り子において制御目的は振り子を真上に立てることで、平衡点は  $\dot{y}_0 = y_0 = \dot{\theta}_0 = \theta_0 = 0, u_0 = 0$  となる。
- その近傍において変位 (角度) と (角) 速度が十分に小さい
- $\sin \theta \approx \theta, \cos \theta \approx 1$  より, 2次以上の項  $(\dot{\theta})^2, \theta(\dot{\theta})^2$  や  $\ddot{\theta}\theta$  は無視できる。
- 線形近似のプロセス

$$V - mg = ml[-\ddot{\theta} \sin \theta - (\dot{\theta})^2 \cos \theta] \Rightarrow V = mg$$

$$M\ddot{y} + m\ddot{y} + ml\ddot{\theta} \cos \theta - ml(\dot{\theta})^2 \sin \theta = u$$

$$ml^2\ddot{\theta} = (mg \sin \theta - m\ddot{y} \cos \theta)l$$

$$\Rightarrow M\ddot{y} = u - m\ddot{y} - ml\ddot{\theta}, \quad l\ddot{\theta} = g\theta - \ddot{y}$$

- 線形近似モデル

$$\ddot{y} = -\frac{mg}{M}\theta + \frac{1}{M}u, \quad \ddot{\theta} = \frac{(M+m)g}{Ml}\theta - \frac{1}{Ml}u$$



# 演習問題

線形近似した倒立振子の状態方程式を求めよ。ただし、状態変数を

$$x_1 = y, x_2 = \dot{y}, x_3 = \theta, x_4 = \dot{\theta}$$

とおく。

$$\begin{aligned}\ddot{y} &= -\frac{mg}{M}\theta + \frac{1}{M}u \\ \ddot{\theta} &= \frac{(M+m)g}{Ml}\theta - \frac{1}{Ml}u\end{aligned}$$



# 演習問題の解答

まず

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_3 = x_4$$

そして

$$\begin{aligned}\dot{x}_2 &= \ddot{y} = -\frac{mg}{M}\theta + \frac{1}{M}u = -\frac{mg}{M}x_3 + \frac{1}{M}u \\ \dot{x}_4 &= \ddot{\theta} = \frac{(M+m)g}{Ml}\theta - \frac{1}{Ml}u = \frac{(M+m)g}{Ml}x_3 - \frac{1}{Ml}u\end{aligned}$$

ベクトル形式

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{mg}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{(M+m)g}{Ml} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \\ 0 \\ -\frac{1}{Ml} \end{bmatrix} u$$



## 第2章 構造解析：システムの特徴を知る

- 本章では、線形システムの可制御性、可観測性や極、零点などの構造的性質について説明する。
- これらは状態空間表現をベースとする現代制御理論を理解するのに欠かせない基礎的なものである。
- $n$ 次元、 $m$ 入力、 $p$ 出力の状態方程式

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} \quad (38)$$

あるいは等価的に、次数が  $n$  である  $p \times m$  の伝達行列

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

で与えられる有限次元線形系について考察する。



# 第2章の内容

1. 時間応答の計算
  - 行列指数関数
  - 積分する方法
  - ラプラス変換による方法
2. 可制御性  
状態を意のままに操る
3. 可観測性  
測定信号から状態を再現する
4. 極と零点
5. 時間応答収束の速さと極
6. 時間応答の質と零点



# 時間応答の計算

- スカラ微分方程式の例：

$$\frac{dx}{dt} = ax$$

変数分離法で解くと

$$\frac{dx}{x} = a dt \Rightarrow \int_0^t \frac{dx}{x} = \int_0^t a dt$$

$$\Rightarrow \ln x(t) - \ln x(0) = at \Rightarrow \ln \frac{x(t)}{x(0)} = at$$

$$\Rightarrow \frac{x(t)}{x(0)} = e^{at} \Rightarrow x(t) = e^{at} x(0)$$

- 解は指数関数となっている！



# 指数関数行列

- ベクトルの状態方程式の解も指数関数に関係するはず！
- $e^{at}$  のテーラ展開：

$$e^{at} = 1 + at + \frac{1}{2!}(at)^2 + \cdots + \frac{1}{k!}(at)^k + \cdots \quad (39)$$

- 行列への拡張：

$$e^{At} = I + At + \frac{1}{2!}(At)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}(At)^n + \cdots \quad (40)$$

- 行列指数関数の性質：

- (1)  $e^{A \cdot 0} = I$
- (2)  $e^{A(t+s)} = e^{At} e^{As}$
- (3)  $(e^{At})^{-1} = e^{-At}$
- (4)  $\frac{de^{At}}{dt} = Ae^{At} = e^{At} A$





# 指数関数行列の求め方

- $e^{At}$  の定義式の両辺を Laplace 変換すると

$$\mathcal{L}[e^{At}] = \frac{1}{s}I + \frac{1}{s^2}A + \frac{1}{s^3}A^2 + \dots \quad (41)$$

- 恒等式

$$(sI - A)\left(\frac{1}{s}I + \frac{1}{s^2}A + \frac{1}{s^3}A^2 + \dots\right) = I \quad (42)$$

を用いると,  $\mathcal{L}[e^{At}] = (sI - A)^{-1}$  と書ける.

- よって, 行列指数関数は次式に等しい

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1} [(sI - A)^{-1}] \quad (43)$$

- すなわち, 行列指数関数は逆 Laplace 変換で求めることができる.



# 零入力応答 ( $u(t) \equiv 0$ )

- 状態方程式

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \quad (44)$$

- 行列指数関数の性質 (4) により,  $x(t) = e^{At}v$  がこの式の一般解である.  
確認

$$\dot{x}(t) = \frac{de^{At}}{dt}v = Ae^{At}v = Ax(t)$$

- 初期状態  $x(0)$  のもとで  $v = e^{A0}v = x(0)$  となるので, 状態方程式の解

$$x(t) = e^{At}x(0) \quad (45)$$



# 一般解 ( $u(t) \neq 0$ )

- 一般解は定数変化法で導出できる。つまり，入力の影響で零入力応答の係数が  $x(0)$  から  $x(0) + w(t)$  に変化すると考え，状態方程式 (38) の解を

$$x(t) = e^{At}(x(0) + w(t)) \Rightarrow w(0) = 0 \quad (46)$$

とおく。

- これを状態方程式  $\dot{x} = Ax + Bu$  に代入することによって  $w(t)$  を求める。

$$Ae^{At}(x(0) + w(t)) + e^{At}\dot{w}(t) = Ae^{At}(x(0) + w(t)) + Bu(t)$$

$$\Rightarrow \dot{w}(t) = e^{-At}Bu(t)$$

$$\Rightarrow w(t) = \int_0^t e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau$$

$$\Rightarrow x(t) = e^{At}x(0) + e^{At} \int_0^t e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau$$



# 一般解の特徴

- 状態方程式 (38) の一般解

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \quad (47)$$

- 特徴：初期状態による第1項と入力による第2項の和となっている。  
これは線形システムの特徴であり、重ね合わせの原理と呼ばれる。
- 初期状態が  $x(0) = 0$  の場合の応答を**零状態応答**という (上式第2項)



# 1 自由度振動系の応答

- 初期状態 :  $x(0) = [1 \ 0]^T$ , 入力 :  $u(t) = \delta(t)$ (単位インパルス)
- $\omega = \sqrt{K/M}$  とおくと, 状態方程式の係数行列は

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix}$$

と書ける.

- よって,

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ \omega^2 & s \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{s}{s^2 + \omega^2} & \frac{1}{s^2 + \omega^2} \\ -\frac{\omega^2}{s^2 + \omega^2} & \frac{s}{s^2 + \omega^2} \end{bmatrix}$$

- 逆 Laplace 変換をすると

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1} [(sI - A)^{-1}] = \begin{bmatrix} \cos \omega t & \frac{1}{\omega} \sin \omega t \\ -\omega \sin \omega t & \cos \omega t \end{bmatrix}$$



# 1 自由度振動系の応答

- これを式(47)に代入して計算すれば、状態の応答

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \quad (48)$$

$$\begin{aligned} &= \begin{bmatrix} \cos \omega t \\ -\omega \sin \omega t \end{bmatrix} + \frac{1}{M} \int_0^t \begin{bmatrix} \frac{1}{\omega} \sin \omega(t-\tau) \\ \cos \omega(t-\tau) \end{bmatrix} \delta(\tau)d\tau \\ &= \begin{bmatrix} \cos \omega t + \frac{1}{M\omega} \sin \omega t \\ \frac{1}{M} \cos \omega t - \omega \sin \omega t \end{bmatrix} \quad (49) \end{aligned}$$

が求まる。ただし、積分の計算にインパルス信号の性質

$$\int_0^t f(\tau)\delta(\tau)d\tau = f(0)$$

を使った。



## 演習 : 2.1

次の線形システムの解を求めよ.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x, \quad x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

また, MATLAB で初期状態  $x(0) = [0 \ 1]^T$  の応答を計算し, 解析解と比較せよ.



## 演習 2.1 の解答

まず

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 1 & s \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{s^2 + 1} \begin{bmatrix} s & 1 \\ -1 & s \end{bmatrix}$$

すると

$$\hat{x}(s) = (sI - A)^{-1}x(0) = \frac{1}{s^2 + 1} \begin{bmatrix} s & 1 \\ -1 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{s^2 + 1} \begin{bmatrix} 1 \\ s \end{bmatrix}$$

よって

$$x(t) = \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{bmatrix}, \quad t \geq 0$$

MATLAB プログラム : hm21.m

```
A=[0 1;-1 0]; %係数行列を入力
```

```
x0=[0;1]; %初期状態
```

```
initial(A,eye(2),eye(2),zeros(2,2),x0) %初期値応答を計算
```





# ラプラス変換による方法

- 公式(47)を用いることなく、状態の応答をすべて Laplace 変換だけで計算することもできる。実際、状態方程式(38)を Laplace 変換すると、

$$\begin{aligned} s\hat{x}(s) - x(0) &= A\hat{x}(s) + B\hat{u}(s) \\ \Rightarrow (sI - A)\hat{x}(s) &= x(0) + B\hat{u}(s) \\ \Rightarrow \hat{x}(s) &= (sI - A)^{-1}x(0) + (sI - A)^{-1}B\hat{u}(s) \end{aligned} \quad (50)$$

が導出される。

- これを逆 Laplace 変換することで状態の解  $x(t)$  が計算できる。
- 今の例では、 $\hat{u}(s) = \mathcal{L}[\delta(t)] = 1$  より

$$\hat{x}(s) = (sI - A)^{-1} \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \frac{s}{s^2 + \omega^2} + \frac{1}{M} \frac{1}{s^2 + \omega^2} \\ \frac{1}{M} \frac{s}{s^2 + \omega^2} - \frac{\omega^2}{s^2 + \omega^2} \end{bmatrix}$$

逆 Laplace 変換をすれば前と同じ解が求まる。



# 数値例

## 線形システム

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = [1 \ 2]x$$

の単位ステップ出力応答を求めよ。ただし、 $x(0) = 0$  である。

### ■ まず

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s + 2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} s + 2 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix}}{s^2 + 2s + 2}$$

### ■ 伝達関数

$$G(s) = c(sI - A)^{-1}b = [1 \ 2] \frac{\begin{bmatrix} s + 2 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix}}{s^2 + 2s + 2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{3s - 1}{(s + 1)^2 + 1}$$



# 数値例

- よって

$$\hat{y}(s) = G(s)\hat{u}(s) = \frac{3s - 1}{(s + 1)^2 + 1} \frac{1}{s}$$

- 部分分数展開

$$\hat{y}(s) = \frac{a}{s} + \frac{bs + c}{(s + 1)^2 + 1}$$

- 係数の計算

$$a = \lim_{s \rightarrow 0} s\hat{y}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{3s - 1}{(s + 1)^2 + 1} = -\frac{1}{2}$$

一方,  $(b, c) = (1/2, 4)$  は次式の係数比較により得られる.

$$\frac{3s - 1}{s(s^2 + 2s + 2)} = \frac{-1/2}{s} + \frac{bs + c}{s^2 + 2s + 2} = \frac{-(s^2 + 2s + 2)/2 + s(bs + c)}{s(s^2 + 2s + 2)}$$



# 数値例

- 従って

$$\hat{y}(s) = \frac{-1/2}{s} + \frac{(s+1)/2}{(s+1)^2 + 1} + \frac{7/2}{(s+1)^2 + 1}$$
$$\Rightarrow y(t) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-t} \cos t + \frac{7}{2}e^{-t} \sin t$$

演習問題 2.2 の応答 : hm22.m

```
A=[0 1;-2 -2];
```

```
B=[1 1]';
```

```
C=[1 2];
```

```
step(A,B,C,0) %ステップ応答を計算
```



## 演習 2.4(a)

次の線形システムに関する設問に答えよ.

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), \quad y(t) = [1 \quad 1]x(t)$$

- (a)  $x(0) = 0$ ,  $u(t) \equiv 1$ ,  $t \geq 0$  の場合, まず状態  $x(t)$  の応答を Laplace 変換で求め, それから出力  $y(t)$  の応答を求めなさい. また, この二つの応答の特徴を比較せよ.

**【解答】 (a)**

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ -1 & s \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{s^2 - 1} \begin{bmatrix} s & 1 \\ 1 & s \end{bmatrix}$$

より



## 演習 2.4(a)

$$\begin{aligned}\hat{x}(s) &= (sI - A)^{-1}b\hat{u} = \frac{1}{s^2 - 1} \begin{bmatrix} s & 1 \\ 1 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{1}{s} \\ &= \frac{1}{s(s^2 - 1)} \begin{bmatrix} 1 \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s(s-1)(s+1)} \\ \frac{1}{(s-1)(s+1)} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{-1}{s} + \frac{1/2}{s-1} + \frac{1/2}{s+1} \\ \frac{1/2}{s-1} + \frac{-1/2}{s+1} \end{bmatrix} \\ \Rightarrow x(t) &= \begin{bmatrix} -1 + \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{-t} \\ \frac{1}{2}e^t - \frac{1}{2}e^{-t} \end{bmatrix}, \quad t \geq 0\end{aligned}$$

よって、出力は

$$y(t) = x_1(t) + x_2(t) = -1 + e^t$$

になる。  $y$  に  $e^{-t}$  の項を含まない。

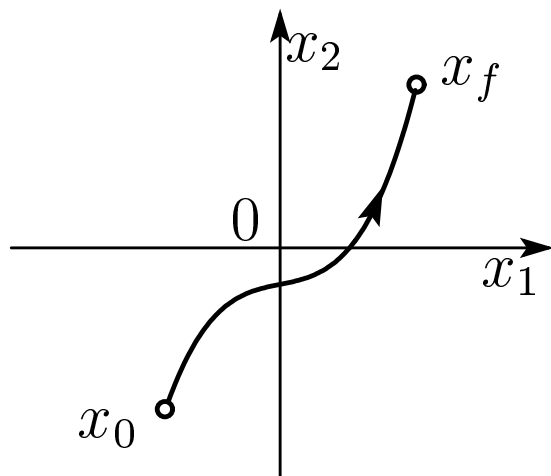
(hm24.m)



# 可制御性

- システムを制御する前提として，入力で制御したい信号を望まれるように動かせる必要がある．システム内部の信号はすべて状態によって生成されるから，まずシステムの状態を任意に制御できる必要がある．

**定義 1** 任意に与えられた初期状態  $x(0) = x_0$ ，有限時刻  $t_f > 0$  及び終端状態  $x_f$  に対し，式 (38) の解が  $x(t_f) = x_f$  を満たすようにする有界な入力  $u(t)$  が存在すれば，式 (38) のシステムあるいは  $(A, B)$  は**可制御**であるという．そうでない場合は**不可制御**であるという．



# 可制御の条件

**定理 1** 以下の命題は等価である.

- (1)  $(A, B)$  は可制御
- (2) 可制御行列  $C$  が行フルランク

$$C = [ B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B ] \quad (51)$$

- (3) 行列  $[A - \lambda I \quad B]$  が任意の  $\lambda \in \mathbb{C}$  に対して行フルランク
- (4)  $A$  のすべての固有値  $\lambda$  について行列  $[A - \lambda I \quad B]$  が行フルランク

- 可制御性は状態方程式の係数行列  $(A, B)$  だけに依存する
- 条件 (2) は低次のシステムに対して使いやすい. また, 条件 (3), (4) は  $A$  行列がブロック対角や三角などの特殊構造を持つシステムに関して利用しやすく, 理論展開でよく用いられる.





# 1 自由度振動系の例

1 自由度振動系について、可制御性を確認しよう。

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{M} & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix}$$

簡単な計算で次式を得る。

$$C = [b \quad Ab] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{M} \\ \frac{1}{M} & 0 \end{bmatrix}, \quad [A - \lambda I \quad B] = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -\frac{K}{M} & -\lambda & \frac{1}{M} \end{bmatrix}$$

- 可制御行列は明らかに行フルランクである。
- 後者については、二つの行が線形独立なので、やはり行フルランクとなっている。
- どの条件からも 1 自由度振動系の状態空間表現が可制御であることが分る。このことは物理的に考えると明らかである。



# 定理1の証明：準備

補題 1 任意の  $t > 0$  について、次の等価関係が成立する。

$$G_c(t) := \int_0^t e^{A\tau} B (e^{A\tau} B)^T d\tau > 0 \Leftrightarrow C \text{ が行フルランク}$$

補題 2  $\text{rank } C = k < n$  のとき、次式を満たす正則行列  $T$  が存在する。

$$A = T \begin{bmatrix} A_1 & A_{12} \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} T^{-1}, \quad B = T \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ただし、 $A_1 \in \mathbb{R}^{k \times k}$ 、 $A_2 \in \mathbb{R}^{(n-k) \times (n-k)}$  であり、 $(A_1, B_1)$  に関する可制御行列  $C_1 = [B_1 \ A_1 B_1 \ \cdots \ A_1^{k-1} B_1]$  は行フルランク  $k$  を持つ。



# 定理 1 の証明

- **ポイント** : 可制御性が状態を任意の初期値から任意の終端値へ自由に移動できることを要求している.

(2)  $\Rightarrow$  (1) : 命題 (2) が成立するとき, 補題 1 より  $G_c(t_f) > 0$  である.

$$u(\tau) = \left( e^{A(t_f - \tau)} B \right)^T G_c^{-1}(t_f) \left[ x_f - e^{At_f} x_0 \right]$$

とすると, 終端状態は

$$\begin{aligned} x(t_f) &= e^{At_f} x(t_0) + \int_0^{t_f} e^{A(t_f - \tau)} B u(\tau) d\tau & (52) \\ &= e^{At_f} x_0 + \int_0^{t_f} e^{A(t_f - \tau)} B \left( e^{A(t_f - \tau)} B \right)^T d\tau \times G_c^{-1}(t_f) \left[ x_f - e^{At_f} x_0 \right] \\ &= e^{At_f} x_0 + G_c(t_f) G_c^{-1}(t_f) \left[ x_f - e^{At_f} x_0 \right] \\ &= x_f \end{aligned}$$

となる. よって, 可制御である.



# 定理 1 の証明

(1) $\Rightarrow$ (2) : 逆に, 命題 (2) が成立たないとき,  $v^T e^{A(t_f - \tau)} B = 0$  を満たす  $v \neq 0$  がある. すると, 式 (52) に左から  $v^T$  をかけると

$$v^T x(t_f) = v^T e^{A(t_f - t_0)} x_0$$

となる.  $x_0 = 0$  のとき,  $x(t_f) = v$  は上式を満たさない. すなわち,  $x(t_f)$  が  $x_f = v$  に到達できない. よって, 不可制御となる. ♠



# 演習問題

システム

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = [1, 0]x$$

の可制御性を調べよ.

【解答】 可制御行列を計算すると

$$C = [b \quad Ab] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

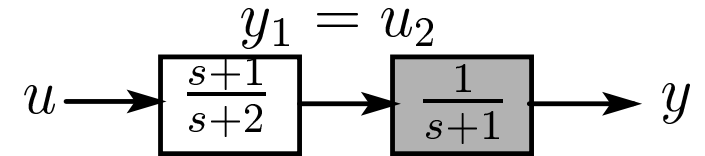
フルランクである. よって, 可制御である.



# 不可制御システムの例：極零点相殺

- 二つのシステムの直列結合

$$G_1(s) = \frac{s+1}{s+2}, \quad G_2(s) = \frac{1}{s+1}$$



- おのおのの状態方程式

$$G_1 : \dot{x}_1 = -2x_1 + u, \quad y_1 = -x_1 + u$$

$$G_2 : \dot{x}_2 = -x_2 + u_2, \quad y = x_2$$

- $u_2 = y_1 = -x_1 + u$  を  $\dot{x}_2$  に代入して整理すると、システム全体

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = x_2 \quad (53)$$



# 不可制御システムの例：極零点相殺

## ■ 可制御行列

$$C = [b \quad Ab] = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

のランクは  $1 < n = 2$  であるので、このシステムは不可制御である。

## ■ **本質**：状態 $x_2$ と $x_1$ の差 $z = x_2 - x_1$ は微分方程式

$$\dot{z} = -z \tag{54}$$

を満たしている。上式に入力やほかの状態は一切現れていないので、 $z$  を入力で制御できない。

## ■ **まとめ**

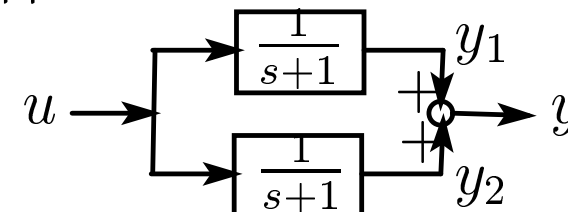
直列結合の場合、2番目のシステムの極に1番目のシステムの零点と同じものがあると極零点相殺が起き、システム全体は不可制御になる。



# 不可制御システムの例：並列

- 同じ動特性を有する二つのシステムの並列結合

$$G_1(s) = G_2(s) = \frac{1}{s+1}$$



- 全体の出力は  $y = y_1 + y_2$  で与えられ、おのおのの状態方程式

$$G_1 : \dot{x}_1 = -x_1 + u, \quad y_1 = x_1, \quad G_2 : \dot{x}_2 = -x_2 + u, \quad y_2 = x_2$$

- よって、システム全体の状態方程式

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = x_1 + x_2 \quad (55)$$





# 不可制御システムの例：並列

## ■ 可制御行列

$$C = [b \quad Ab] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

のランクは  $1 < n = 2$  であり，よってこのシステムも不可制御である．

## ■ 本質：状態 $x_2$ と $x_1$ の差 $z = x_2 - x_1$ は

$$\dot{z} = -z \tag{56}$$

を満たし，入力で制御できない．

## ■ まとめ

並列結合する二つのシステムに共通の極を持つ場合，全体として不可制御になる．

⇒ まったく同一の車 2 台を同じようなアクセル・ブレーキ操作で操縦するとき，速度の差を変えられない現象と一致する．



# 可観測性

- 状態を自由に制御するには初期状態に関する情報が不可欠  
可制御条件の証明で構成した入力

$$u(\tau) = \left( e^{A(t_f - \tau)} B \right)^T G_c^{-1}(t_f) \left[ x_f - e^{At_f} x_0 \right]$$

- しかし、実際に計測される信号は状態のすべてではなく、システムの入出力だけである。また、システムの入力も既知である。すると、既知の入出力情報から状態を算出する必要がある。

**定義 2** 任意の有限な  $t_1 > 0$  に対し、区間  $[0, t_1]$  における入力  $u(t)$  と出力  $y(t)$  から初期状態  $x(0) = x_0$  を一意に決定できるとき、システム (38), あるいは  $(C, A)$  が**可観測 (observable)** であるという。そうでない場合には、システムあるいは  $(C, A)$  が**不可観測 (unobservable)** であるという。



# 可観測の条件

定理 2 以下の命題は等価である.

- (1)  $(C, A)$  は可観測
- (2) 可観測行列  $\mathcal{O}$  は列フルランク

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (57)$$

- (3) すべての  $\lambda \in \mathbb{C}$  に対し, 行列  $\begin{bmatrix} A - \lambda I \\ C \end{bmatrix}$  は列フルランク
- (4)  $A$  のすべての固有値  $\lambda$  に対し, 行列  $\begin{bmatrix} A - \lambda I \\ C \end{bmatrix}$  は列フルランク
- (3)  $(A^T, C^T)$  は可制御



# 1 自由度振動系の例

測定出力を変位  $y$  とする. このとき,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{M} & 0 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 0]$$

より

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} c \\ cA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} A - \lambda I \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -\frac{K}{M} & -\lambda \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- 可観測行列は明らかに行フルランクである.
- 後者では1列目と2列目は線形独立なのでやはり列フルランクとなる.
- よって, いずれの条件からも可観測という結論を得る.



# 定理 2 の証明

$O$  が列フルランク  $\Leftrightarrow G_o(t) := \int_0^t (C e^{A\tau})^T C e^{A\tau} d\tau > 0 \quad (t > 0)$

(1)  $\Leftrightarrow$  (2) : ここで, 信号

$$w(t) := y(t) - Du(t) - C \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau \quad (58)$$

をおく.  $y$  と  $u$  は既知なので, この信号は既知のものとなる. 次に, 出力

$$\begin{aligned} y(t) &= C \left[ e^{At} x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau \right] + Du(t) \\ \Rightarrow w(t) &= C e^{At} x_0 \end{aligned}$$



# 定理 2 の証明

この式の両辺に左から  $(Ce^{At})^T$  をかけて積分すると

$$G_o(t_1)x_0 = \int_0^{t_1} (Ce^{At})^T w(t) dt \quad (59)$$

が得られる。命題 (2) が成立するとき、 $G_o(t_1)$  は正則となる。さらに、上式の右辺は既知であるから、 $x_0$  が一意に求まる。

(1)  $\Leftarrow$  (2) : 逆に、命題 (2) が成立たないとき、

$$Cv = 0, CAv = 0, \dots, CA^{n-1}v = 0$$

を満たす  $v \neq 0$  が存在する。本式と Cayley-Hamilton の定理より

$$Ce^{At}v = C[f_1(t)I + f_2(t)A + \dots + f_n(t)A^{n-1}]v = 0, \quad \forall t$$



# 定理 2 の証明

すると、初期状態  $x(0) = v$  に関して

$$\begin{aligned} y(t) &= C \left[ e^{At} v + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau \right] + D u(t) \\ &= C \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau + D u(t), \quad \forall t > 0 \end{aligned} \quad (60)$$

となる。  $x(0) = v$  が出力  $y$  に現れていないから、  $y$  から求めることができない。

- 不可観測状態の本質は、それが出力応答に現れないことにある。



# 演習問題

システム

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = [1, 0]x$$

の可観測性を調べよ.

【解答】 可観測行列を計算すると

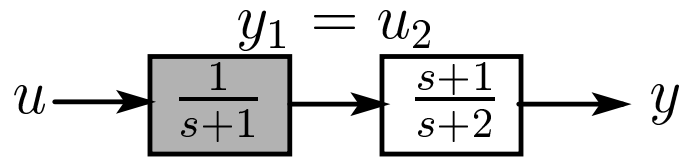
$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} c \\ cA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

フルランクである. よって, 可観測である.





# 不可観測システムの例：極零点相殺



- 上図は次の二つのシステムが直列結合したものである

$$G_1 : \quad \dot{x}_1 = -x_1 + u, \quad y_1 = x_1$$

$$G_2 : \quad \dot{x}_2 = -2x_2 + u_2, \quad y = -x_2 + u_2$$

- $x = [x_1 \ x_2]^T$  とおき,  $u_2 = y_1 = x_1$  の結合関係を用いると, システム全体の状態方程式

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u, \quad y = [1 \quad -1]x \quad (61)$$

が得られる.



# 不可観測システムの例：極零点相殺

## ■ 可観測行列

$$O = \begin{bmatrix} c \\ cA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

のランクは  $1 < n = 2$  であるので、このシステムが不可観測である。

## ■ 本質：新しい状態を $z_1 = x_1$ , $z_2 = x_1 - x_2$ に関する状態方程式

$$\dot{z}_1 = -z_1 + u, \quad \dot{z}_2 = -2z_2 + u, \quad y = z_2 \quad (62)$$

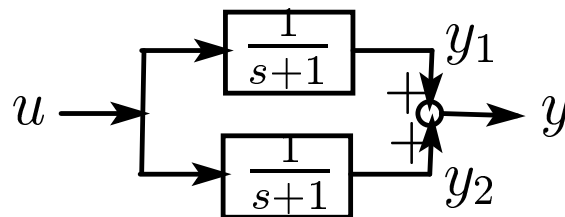
$z_1$  は  $z_2 = y$  と独立なので、 $z_1 = x_1$  は出力から観測できない。

## ■ まとめ

二つのシステムが直列に結合する場合、1番目のシステムの極が2番目のシステムの零点と極零点相殺するとき、システム全体は不可観測になる



# 不可観測システムの例：並列



- 並列システムの状態方程式 ( $x = [x_1 \ x_2]^T$ )

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = [1 \ 1]x \quad (63)$$

- 可観測行列

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} c \\ cA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

ランクは  $1 < n = 2$  である。よってこのシステムは不可観測である。



# 不可観測システムの例：並列

- 状態  $x_2$  と  $x_1$  の代わりにその和  $z_1 = x_1 + x_2$  と差  $z_2 = x_1 - x_2$  を新しい状態として用いることができる.
- 新しい状態方程式

$$\dot{z}_1 = -z_1 + 2u, \quad \dot{z}_2 = -z_2, \quad y = z_1 \quad (64)$$

- 出力に状態  $z_2$  が現れず, しかも  $z_2$  が  $z_1$  の動特性にまったく関与しないから,  $z_2$  に関する情報は直接的にも間接的にも出力に伝わらない. これがシステムの状態が観測できないわけである.
- **まとめ**  
並列結合する二つのシステムに共通の極を持つ場合, 全体として不可観測になる.



## 演習 2.4(b, c)

次の線形システムに関する設問に答えよ.

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), \quad y(t) = [1 \quad 1]x(t)$$

- (a)  $x(0) = 0$ ,  $u(t) \equiv 1$ ,  $t \geq 0$  の場合, まず状態  $x(t)$  の応答を Laplace 変換で求め, それから出力  $y(t)$  の応答を求めなさい. また, この二つの応答の特徴を比較せよ.
- (b) 可制御性と可観測性を判定せよ. そして, (a) 項の二つの応答の違いについてその理由を説明せよ.
- (c) 入力  $u$  から出力  $y$  までの伝達関数を求めよ.



## 演習 2.4(b, c) の解答

(b) 可制御行列と可観測行列を計算すると

$$C = [b \quad Ab] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{O} = \begin{bmatrix} c \\ cA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

よって、可制御であるが、可観測でない。  $y(t)$  の応答から極  $-1$  が不可観測であることが推測できる。このことは伝達関数からも見ることができる。

(c)

$$G(s) = c(sI - A)^{-1}b = [1 \quad 1] \frac{\begin{bmatrix} s & 1 \\ 1 & s \end{bmatrix}}{s^2 - 1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{s + 1}{s^2 - 1} = \frac{1}{s - 1}$$

極  $-1$  がなくなっている。



# 状態変換 (状態空間実現の非一意性)

- 状態  $x(t)$  を正則行列  $T$  で新しい状態  $z(t)$  に置き換える

$$z(t) = Tx(t) \quad (65)$$

- $z(t)$  に関する状態方程式

$$\begin{bmatrix} \dot{z} \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} TAT^{-1} & TB \\ CT^{-1} & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ u \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \bar{A} & \bar{B} \\ \bar{C} & \bar{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ u \end{bmatrix} \quad (66)$$

- 恒等式  $(XYZ)^{-1} = Z^{-1}Y^{-1}X^{-1}$  より

$$\begin{aligned} \bar{C}(sI - \bar{A})^{-1}\bar{B} + \bar{D} &= CT^{-1}(sI - TAT^{-1})^{-1}TB + D \\ &= CT^{-1}(T(sI - A)T^{-1})^{-1}TB + D = C(sI - A)^{-1}B + D \end{aligned}$$

ゆえに,  $(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D})$  も  $G(s)$  の実現となる.

- 式 (65) の座標変換は**状態変換**と呼ばれ,  $T$  は変換行列と呼ばれる.



# 可制御性・可観測性の不変性

並列システムの例における状態の置き換えは次の状態変換と対応

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1 + x_2 \\ z_2 &= x_1 - x_2 \end{aligned} \Rightarrow \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = Tx = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\left[ \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c} \bar{A} & \bar{B} \\ \hline \bar{C} & \bar{D} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c} TAT^{-1} & TB \\ \hline CT^{-1} & D \end{array} \right] \quad (67)$$

関係式  $(TAT^{-1})^i = TAT^{-1} \cdot TAT^{-1} \dots TAT^{-1} = TA^iT^{-1}$  から

$$\bar{C} = TC, \quad \bar{O} = OT^{-1} \quad (68)$$

**定理 3** システムの可制御性と可観測性は相似変換に対して不変である。





# システムの極

**定義 3**  $A$  の固有値を  $G(s)$  の実現  $(A, B, C, D)$  の極という. この実現が可制御かつ可観測のとき,  $A$  の固有値を伝達行列  $G(s)$  の極という.

- 伝達行列の極とその「実現の極」を区別していることに注意
- $A$  の固有値が実現の極と呼ばれる理由: 零入力応答による

$$\hat{x}(s) = (sI - A)^{-1}x(0) = \frac{\text{adj}(sI - A)}{\det(sI - A)}x(0) \quad (69)$$

- $A$  に制御できない/観測できない固有値があるとき, それが伝達行列に現れず, 実現の極と伝達行列の極は必ずしも一致しない.

例: 次のシステムでは,  $A$  の固有値の一つが伝達関数に現れていない

$$G(s) = \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 \end{array} \right] = \frac{2}{s-1}$$



# システムの極

## ■ 1 入出力系の場合

$$G(s) = \frac{n(s)}{d(s)} = \frac{b_{m+1}s^m + b_m s^{m-1} + \dots + b_2 s + b_1}{s^n + a_n s^{n-1} + \dots + a_2 s + a_1} \quad (70)$$

## ■ 分母多項式 $d(s)$ の根 $p_i$ ( $i = 1, \dots, n$ ) は伝達関数 $G(s)$ の極となる

$$d(p_i) = 0 \Rightarrow G(p_i) = \infty \quad (71)$$

例えば, 伝達関数

$$G(s) = \frac{5s + 3}{s^2 + 2s + 5} = \frac{5(s + 0.6)}{(s + 1)^2 + 4}$$

の極は  $p_1 = -1 - j2$ ,  $p_2 = -1 + j2$  である.



# 極と応答の収束

- 極はシステムの時間応答の収束性を決定づける

例えば、システム

$$G(s) = \left[ \begin{array}{cc|c} a & b & 1 \\ -b & a & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \end{array} \right] = \frac{s - a}{(s - a)^2 + b^2} \quad (72)$$

の極は  $a \pm jb$  であり、そのインパルス応答は  $e^{at} \cos bt$  である。



# 極と応答の収束

- 極の実部  $a$  が負のとき，インパルス応答は収束するが， $a$  が正になると発散する．また，収束の速さは実部の大きさで決まる．
- 極の虚部は応答の振動周波数であり，虚部が大きくなるにつれ，単位時間における振動の回数が増える． (pole\_resp.m)

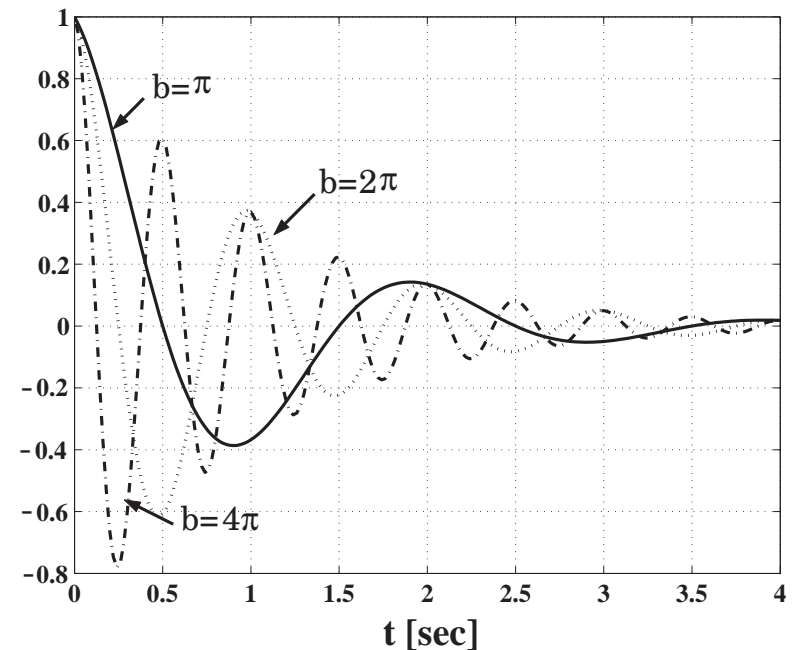
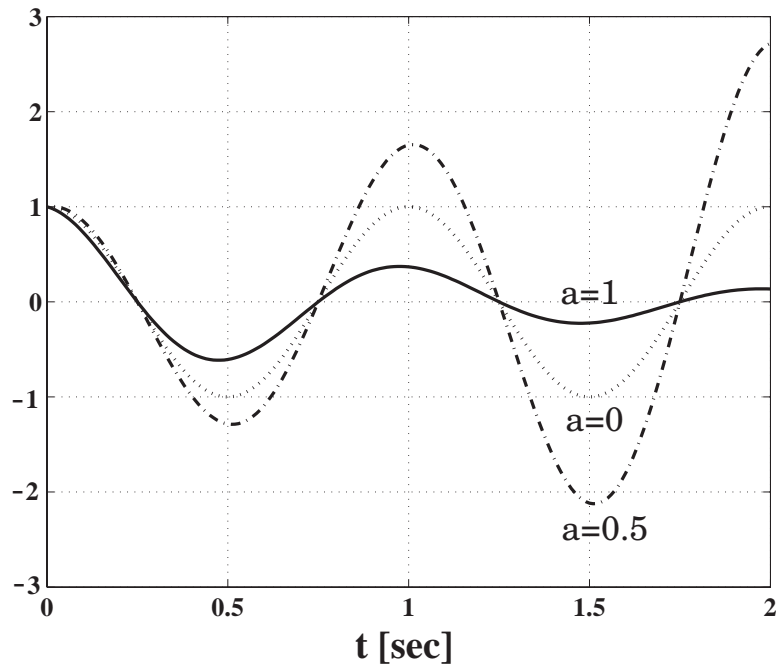


Figure 1: 極の位置と応答 (左 :  $b = 2\pi$ , 右 :  $a = -1$ )



# 一般的な場合

$$TAT^{-1} = J = \text{diag}(J_1 \ \cdots \ J_m), \quad J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix} \quad (73)$$

ただし、 $\lambda_i$  は行列  $A$  の固有値である。従って、零入力応答は

$$x(t) = e^{At}x(0) = T^{-1}e^{Jt}Tx(0), \quad e^{Jt} = \text{diag}(e^{J_1t} \ \cdots \ e^{J_mt}) \quad (74)$$

$$e^{J_it} = e^{\lambda_i t} \begin{bmatrix} 1 & t & \cdots & \frac{1}{(r_i-1)!}t^{r_i-1} \\ & 1 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & t \\ & & & 1 \end{bmatrix} \quad (75)$$

多項式よりも指数関数の方が収束／発散速度がはるかに速いことから、応答の収束性は極の実部によって決まることが言える。



# システムの零点

- 零点が極と同等に重要な概念であり、応答などにきわめて大きな影響を与えている。
- 1 入出力系

$$G(s) = \frac{n(s)}{d(s)} = \frac{b_{m+1}s^m + b_m s^{m-1} + \dots + b_2 s + b_1}{s^n + a_n s^{n-1} + \dots + a_2 s + a_1} \quad (76)$$

- 分子多項式  $n(s)$  の根  $z_j$  ( $j = 1, \dots, m$ ) は伝達関数  $G(s)$  の**零点**という

$$n(z_j) = 0 \Rightarrow G(z_j) = 0 \quad (77)$$

例えば、伝達関数

$$G(s) = \frac{5s + 3}{s^2 + 2s + 5} = \frac{5(s + 0.6)}{(s + 1)^2 + 4}$$

の零点は  $z = -0.6$  である。



# 零点の信号遮断性質

- 物理的には、零点は信号を遮断する性質を持つ。

例えば、

$$G(s) = \left[ \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & 0 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cc|c} a & b & 1 \\ -b & a & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \end{array} \right] = \frac{s - a}{(s - a)^2 + b^2} \quad (78)$$

において初期状態が  $x(0) = [0, -1/b]^T$  のとき、時刻  $t = 0$  から入力  $u(t) = e^{at}$  ( $\hat{u}(s) = 1/(s - a)$ ) が印加されると、出力は

$$\begin{aligned} \hat{y}(s) &= C(sI - A)^{-1}x(0) + C(sI - A)^{-1}B\hat{u}(s) \\ &= -\frac{1}{(s - a)^2 + b^2} + \frac{1}{(s - a)^2 + b^2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

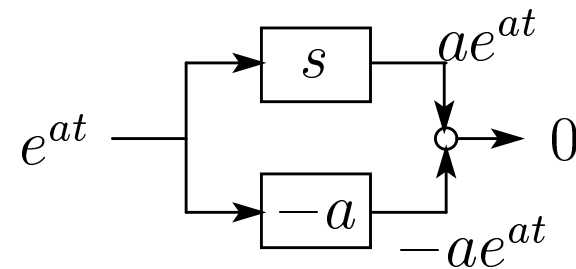
となり、入力は出力から完全に遮断される。



# 零点の信号遮断性質

零点  $z = a$  の働きの原理は次の図から理解できる。

$s - a$  は微分器  $s$  とゲイン  $-a$  の並列結合であり、 $e^{at}$  の入力信号を印加すると、両ブロックの出力の和がちょうど零となる。



- 入力信号  $e^{at}$  の指数が伝達関数の零点と同じである





# 次数差

## 1 入出力系の伝達関数

$$G(s) = \frac{b_{m+1}s^m + \cdots + b_2s + b_1}{s^n + a_ns^{n-1} + \cdots + a_2s + a_1}, \quad b_{m+1} \neq 0, \quad n \geq m \quad (79)$$

において、分母多項式と分子多項式の次数差  $r = n - m \geq 0$  は伝達関数の**次数差**と呼ばれる。

例えば、

$$G(s) = \frac{5s + 2}{s^3 + 2s^2 + 3s + 4}$$

の次数差は  $r = 3 - 1 = 2$  となる。このとき

$$s^2G(s) = s^2 \frac{5s + 2}{s^3 + 2s^2 + 3s + 4}$$

が非零の直達項  $\lim_{s \rightarrow \infty} s^2G(s) = 5$  を持つ。



# 次数差

- $s$  が微分器であるから、これは出力を次数差回微分してはじめて入力  
が直接現れることを意味する。
- 状態空間

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad y = cx \quad (80)$$
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & -3 & -2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c = [2 \ 5 \ 0]$$

出力の 1 階微分と 2 階微分はそれぞれ

$$\dot{y} = c\dot{x} = cAx + cbu \quad (81)$$

$$\ddot{y} = cA\dot{x} + cb\ddot{u} = cA^2x + cAbu + cb\ddot{u} \quad (82)$$

$cb = 0$ ,  $cAb = 5$  より出力  $y$  の 2 階微分に入力  $u$  がはじめて現れる。



# 無限零点

## ■ 状態空間実現

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad y = cx \quad (83)$$

を有する 1 入出力系においては，次数差は次式を満たす正数  $r$  と定義することができる．

$$cb = cAb = \dots = cA^{r-2}b = 0, \quad cA^{r-1}b \neq 0 \quad (84)$$

- 次数差が零でない伝達関数において  $s \rightarrow \infty$  とすると， $G(s) \rightarrow 0$  となる．この意味で  $s = \infty$  を  $G(s)$  の無限遠点における零点と理解することができる．
- そこで，**次数差  $r$  の伝達関数が  $r$  個の無限零点を持つ**と定義する．
- 有限零点の数は  $n - r$  なので，無限零点と有限零点の数の合計は極の数と一致する．前記の例では有限零点は一つ，無限零点は二つである．

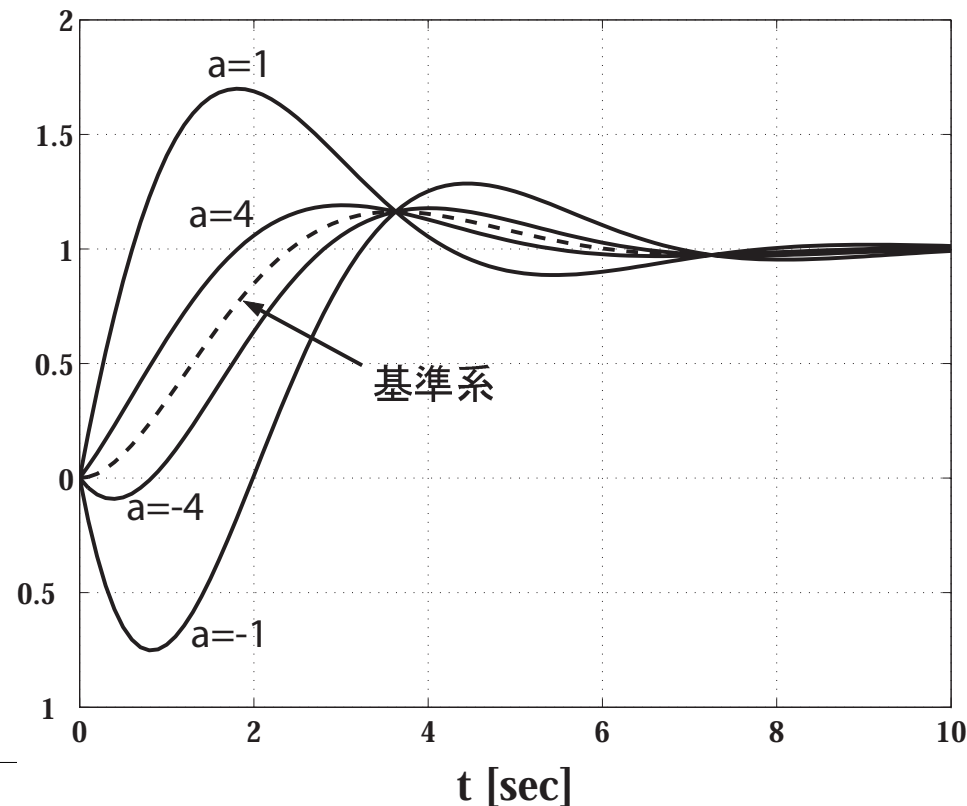


# 零点と応答の質

- 零点  $z = -a\zeta\omega_n$  を持つ伝達関数

$$H(s) = \frac{\omega_n^2 \left(1 + \frac{1}{a\zeta\omega_n} s\right)}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}, \quad a \in \mathbb{R} \quad (85)$$

- ステップ応答 ( $a = 1, 4, \infty, -1, -4$ )



# 零点と応答の質

## ■ 特徴

- ◆  $a > 0$  の場合,  $a$  が小さいほど行き過ぎ量が多い.
- ◆  $a < 0$  の場合,  $|a|$  を小さくすると初期段階で**逆振れ** (目標値とは逆の応答) が生じる.

## ■ 定性的説明: 変数 $s$ が微分器を表していることに注目する

$$H(s) = H_0(s) + \frac{1}{a\zeta\omega_n} \times s \times H_0(s), \quad H_0(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (86)$$

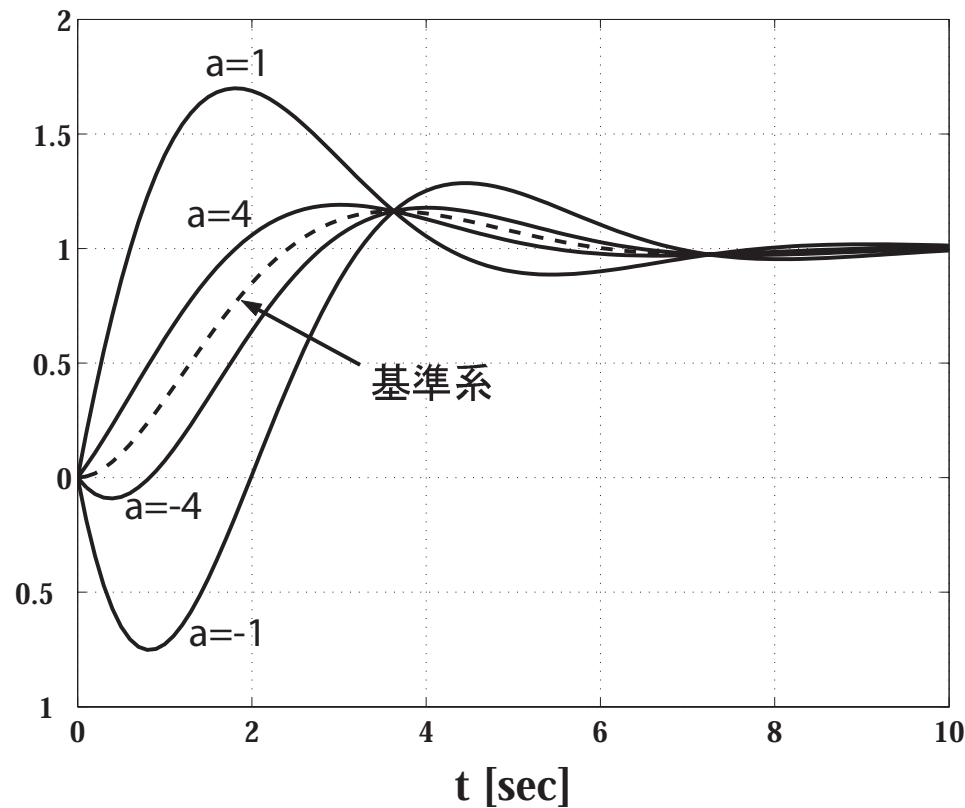
基準系  $H_0(s)$  のステップ応答を  $y_0(t)$  とすると,  $H(s)$  のステップ応答

$$y(t) = y_0(t) + \frac{1}{a\zeta\omega_n} \dot{y}_0(t) \quad (87)$$



# 零点と応答の質

- 定性的説明 (つづき) :  $y_0(t)$  が初期のころ速い速度で立ち上がり, その微分値は大きい. よって,  $|a|$  が十分に小さいとき  $a$  が正であれば大きな行き過ぎ量をもたらす, 負であれば逆振れをもたらす.



- 要するに, システムの応答は極だけで決まるものではなく, 零点も大きく影響している.



# 第3章 安定性とその条件

- 線形システムの安定性，すなわちシステム内部の信号の有界性や収束性について議論し，そのためのさまざまな条件を紹介する．
- 状態  $x(t)$ ，入力  $u(t)$ ，出力  $y(t)$  の状態方程式

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (88)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (89)$$

もしくは等価的に伝達行列

$$G(s) = (A, B, C, D) \quad (90)$$

で与えられる線形システムについて考える．



# 第3章の内容

- 安定性：応答の収束性を保証
  - ◆ 入出力安定性
  - ◆ 状態の安定性
- 安定性の条件
  - ◆ 極による条件
  - ◆ ラウス・フルビッツの安定判別法





# 入出力安定性

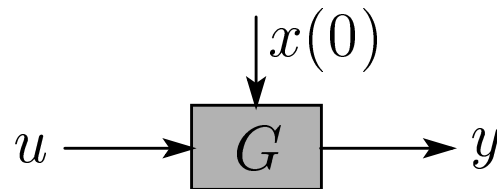
## ■ 入出力安定性

- ◆ システムに任意の有界入力を印加したとき，出力が発散しないこと
- ◆ 制御システムに対するもっとも基本的な仕様

■ つまり，零初期状態のもとで下図のシステムに任意の有界入力  $u$  を加えたとき，出力  $y$  も有界でなければならない。

## ■ 数学的定義

$$\text{If } |u(t)| \leq c < \infty \forall t, \quad \text{then } |y(t)| \leq M < \infty \forall t \quad (91)$$



# 入出力安定の条件

**定理 4** 1 入出力系  $G(s)$  が入出力安定となるための必要十分条件は

$$\int_0^{\infty} |g(t)| dt < \infty \quad (92)$$

で与えられる。ただし,

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)]$$

は単位インパルス応答行列を表す。

- 単位インパルス応答と絶対積分の計算が必要で、使いづらい



# 定理 4 の証明

出力  $y(t)$  は畳み込み積分で与えられる.

$$\hat{y}(s) = G(s)\hat{u}(s) \Rightarrow y(t) = \int_0^t g(\tau)u(t - \tau)d\tau \quad (93)$$

$|u(t)| \leq c \forall t$  ならば,

$$\begin{aligned} |y(t)| &= \left| \int_0^t g(\tau)u(t - \tau)d\tau \right| \leq \int_0^t |g(\tau)| \cdot |u(t - \tau)|d\tau \\ &\leq c \int_0^t |g(\tau)|d\tau \leq c \int_0^\infty |g(\tau)|d\tau \end{aligned} \quad (94)$$

従って,  $\int_0^\infty |g(t)|dt$  が有界ならば,  $y(t)$  も有界.



# 定理 4 の証明

逆に、入力を次の特別なものを選んだとき

$$u(\tau) = \frac{g(t - \tau)}{|g(t - \tau)|} \Rightarrow |u(\tau)| = \frac{|g(t - \tau)|}{|g(t - \tau)|} = 1 \quad (95)$$

その出力は

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t g(\tau) u(t - \tau) d\tau = \int_0^t g(\tau) \frac{g(\tau)}{|g(\tau)|} d\tau = \int_0^t |g(\tau)| d\tau \\ &\Rightarrow |y(t)| = \int_0^t |g(\tau)| d\tau \end{aligned} \quad (96)$$

となる。システムが安定であるとき、

$$|y(\infty)| < \infty \Rightarrow \int_0^{\infty} |g(t)| dt < \infty$$



# 伝達関数の安定性

## 定義 4

1. 伝達関数 (行列) $G(s)$  のすべての極が負の実部を持つとき、 $G(s)$  は**安定**であるという.
2.  $G(s)$  のすべての極が零以上の実部を持つとき、 $G(s)$  は**完全不安定**であるという.
3.  $G(s)$  に一つでも非負の実部を持つ極があるとき、**不安定**であるという.

- **注意** : 完全不安定な伝達関数は不安定であるが、不安定な伝達関数はすべて完全不安定になるわけではない.



# 数値例

## ■ 伝達関数

$$G_1(s) = \frac{1}{(s+2)(s+5)}$$

の極が  $p = -2, -5$  であり、安定である。

## ■ 伝達関数

$$G_2(s) = \frac{1}{(s-2)(s-5)}$$

の場合、極が  $p = 2, 5$  であるので、完全不安定である。

## ■ 伝達関数

$$G_3(s) = \frac{1}{(s+2)(s-5)}$$

は極が  $p = -2, 5$  であり、不安定である。しかし、完全不安定ではない。



# 極による安定条件

**定理 5** 線形系の入出力安定性はその伝達関数 (行列) の安定性と等価である

(略証) まず,  $G(s)$  の極が重複しない場合

$$G(s) = \sum \frac{c_i}{s - p_i} + d \Rightarrow g(t) = \sum c_i e^{p_i t} + d\delta(t), t \geq 0 \quad (97)$$

極は  $p_i = a_i + jb_i$  とおける.  $e^{p_i t} = e^{a_i t} e^{jb_i t}$  及び  $|e^{jb_i t}| \equiv 1$  を使うと

$$\int_0^{\infty} |g(t)| dt \leq \int_0^{\infty} \left[ \sum |c_i| e^{a_i t} + |d| \delta(t) \right] dt \quad (98)$$

( $|a + b| \leq |a| + |b|$  を用いた)  $a_i$  がすべて負のとき, 上式の右辺は

$$|d| + \sum \frac{|c_i|}{-a_i} < \infty$$



# 定理5の証明

逆に、例えば  $a_1 \geq 0$  のとき、 $e^{a_1 t}$  は発散するか定数になるので、その積分  $\int_0^\infty e^{a_1 t} dt$  が発散してしまう。

また、重複する極がある場合、例えば  $p = a + jb$  が2重極であるとき

$$G(s) = \frac{c_1}{(s-p)^2} + \frac{c_2}{s-p} + \text{rest} \Rightarrow g(t) = c_1 t e^{pt} + c_2 e^{pt} + \text{rest} \quad (99)$$

第1項の積分だけを調べればよい。  $a < 0$  とすると、

$$\int_0^\infty |t e^{pt}| dt = \int_0^\infty |t e^{at}| dt = \int_0^\infty t e^{at} dt = \frac{1}{a^2} < \infty$$

よって、重複する極がある場合でもインパルス応答の絶対積分が有界となり、入出力安定である。





# 数値例

- 安定システム  $G(s) = 1/(s + 1)^2$  の単位インパルス応答

$$g(t) = te^{-t}, t \geq 0$$

よって,

$$\int_0^{\infty} |g(t)| dt = \int_0^{\infty} te^{-t} dt = 1 < \infty$$

- 不安定伝達関数  $G(s) = 2/(s - 1)(s + 1)$  の単位インパルス応答

$$g(t) = e^t - e^{-t}, t \geq 0$$

明らかに積分

$$\int_0^T |g(t)| dt = e^T + e^{-T} - 2$$

が  $T \rightarrow \infty$  のときに発散する.



# 演習 3.1

システム  $G(s) = s/(s^2 + \omega^2)$  に以下の入力  $u$  を印加したときの出力  $y$  を求めよ. この結果から何が言えるか.

(a)  $u(t) = 1(t)$       (b)  $u(t) = \sin \omega t$

【解答】 (a)  $\hat{u} = 1/s$  より

$$\hat{y}(s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2} \hat{u}(s) = \frac{1}{s^2 + \omega^2} \Rightarrow y(t) = \frac{1}{\omega} \sin(\omega t), \quad t \geq 0$$

(b)  $\hat{u}(s) = \omega/(s^2 + \omega^2)$  及び  $\mathcal{L}[tf(t)] = -\frac{dF(s)}{ds}$  より

$$\begin{aligned} \hat{y}(s) &= \frac{s}{s^2 + \omega^2} \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} = \frac{\omega s}{(s^2 + \omega^2)^2} = -\frac{1}{2} \frac{d}{ds} \left[ \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \right] \\ \Rightarrow y(t) &= \frac{1}{2} t \sin(\omega t), \quad t \geq 0 \end{aligned}$$

入力が有界であるにも拘らず, 出力は発散する. 理由は  $G(s)$  が虚軸上に極を持つから. (hm31.mdl)



# 状態の安定性

- 自由システム：外部入力  $u(t) \equiv 0$  のときの線形システム

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad x(0) \neq 0 \quad (100)$$

- 任意の初期状態に関する状態の応答が原点に収束するとき、すなわち

$$x(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0 \quad (101)$$

のとき、状態  $x(t)$  が安定であるという。

- 状態の安定性は初期状態に対する応答の収束を保証するものである。



# 状態の安定条件

**定理 6** 自由システムの状態が安定となるための必要十分条件は、行列  $A$  のすべての固有値が負の実部を持つことである。

$$x(t) = T^{-1}e^{Jt}Tx(0), \quad t \geq 0 \quad (102)$$

$$e^{Jt} = \begin{bmatrix} e^{J_1 t} & & & \\ & \ddots & & \\ & & e^{J_m t} & \\ & & & \end{bmatrix}, \quad e^{J_i t} = e^{\lambda_i t} \begin{bmatrix} 1 & t & \cdots & \frac{1}{(r_i-1)!} t^{r_i-1} \\ & 1 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & t \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

- 一つでも実部が非負の固有値があると、状態を原点へ収束させないような初期状態は必ず存在するので、状態が安定でない。
- 逆に、 $\Re(\lambda_i) < 0$  ならば  $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\lambda_i t} = 0$  及び次式より状態が収束する

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^j e^{\lambda_i t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^j}{e^{-\lambda_i t}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{j t^{j-1}}{-\lambda_i e^{-\lambda_i t}} = \cdots = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{j!}{(-\lambda_i)^j} e^{\lambda_i t} = 0$$



# 1 自由度振動系の例

- 外力がないとき

$$\dot{x}(t) = Ax(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{M} & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

- $A$  行列の固有値 :

$$\det(sI - A) = \begin{vmatrix} s & -1 \\ \frac{K}{M} & s \end{vmatrix} = s^2 + \frac{K}{M} \Rightarrow \lambda = \pm j \sqrt{\frac{K}{M}}$$

- 固有値の実部が零なので、このシステムは不安定である。
- これはダンパ(摩擦)がないと、振動が止まらないという物理現象と一致する。



# 1 自由度振動系の例：つづき

- 減衰係数  $D > 0$  のダンパをつけるときの状態方程式

$$\dot{x}(t) = Ax(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{M} & -\frac{D}{M} \end{bmatrix} x(t)$$

- $A$  行列の特性多項式

$$|sI - A| = s^2 + \frac{D}{M}s + \frac{K}{M}$$

- 根は  $-\frac{D}{2M} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{D}{M}\right)^2 - 4\frac{K}{M}}$  である.
- $\left(\frac{D}{M}\right)^2 - 4\frac{K}{M} < 0$  のときは複素数になり，そうでないときは実数となる．いずれの場合においても実部がすべて負である．よって，安定である．



## 演習 3.6

次の自由システムについて極を求め、その安定性を調べよ。

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} x, \quad x(0) \neq 0$$

【解答】 特性多項式

$$\begin{vmatrix} s & -1 \\ -1 & s+1 \end{vmatrix} = s(s+1) - 1 = s^2 + s - 1$$

特性根

$$p_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

不安定極  $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$  を持ち、よって不安定である。

(hm36.m)



# Routh-Hurwitz の安定判別法

- 極による条件では，特性多項式を解いて極を求める必要があった．しかし，システムの次数が高い場合，手計算はできなくなる．
- また，数値計算に頼って求めることができるものの，特性多項式に未定のパラメータがある場合には対応できない．
- Routh-Hurwitz の方法：  
特性多項式の係数だけで根の安定性を判別

## 定理 7 多項式

$$p(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n \quad (103)$$

の根がすべて負の実部を持つための条件は以下のようになる．

**必要条件**  $a_1 > 0, a_2 > 0, \dots, a_n > 0$

**必要十分条件** Routh 表の 1 列目の要素がすべて正である．





# Routh 表

$$p(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n$$

$s^n$	1	$a_2$	$a_4$	$\dots$	$b_1 = -\frac{1}{a_1} \begin{vmatrix} 1 & a_2 \\ a_1 & a_3 \end{vmatrix}, b_2 = -\frac{1}{a_1} \begin{vmatrix} 1 & a_4 \\ a_1 & a_5 \end{vmatrix}$
$s^{n-1}$	$a_1$	$a_3$	$a_5$	$\dots$	$\dots$
$s^{n-2}$	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$\dots$	$\dots$
$s^{n-3}$	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$\dots$	$c_1 = -\frac{1}{b_1} \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}, c_2 = -\frac{1}{b_1} \begin{vmatrix} a_1 & a_5 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$s^2$	$p_1$	$p_2$			$\vdots$
$s^1$	$q_1$				$\vdots$
$s^0$	$r_1$				$r_1 = -\frac{1}{q_1} \begin{vmatrix} p_1 & p_2 \\ q_1 & 0 \end{vmatrix}$

- 第 1, 2 行 :  $p(s)$  の係数を次数の高い順に一つずつ交互に第 1 行, 第 2 行に入れ込むことで作られる.
- 第 3 行以下 :  $i$  行目の  $j$  番目の要素を計算するのに, その直前の二つの行から取り出した 1 列目と  $j+1$  列目で作った行列式を用いる.



# Routh 表 : つづき

- 計算に際し要素が不足するとき, 0 で補う.
- さらに, 次のことも知られている :

**Routh 表第 1 列の要素の符号変化回数 = 開右半面根の数**

- ただし, +, -, + のような符号の変化は 2 回として数える. つまり, 正から負は 1 回, 負から正も 1 回の符号変化として数える.
- Routh-Hurwitz 法による安定性判別の手順 :
  1. 必要条件をチェックし, 満たさなければ止める.
  2. Routh 表を作り, 必要十分条件をチェックする.



# 数値例

次の多項式の根の安定性を調べる

$$p(s) = s^4 + 9s^3 + 28s^2 + 38s + 24(= (s + 3)(s + 4)((s + 1)^2 + 1))$$

- 必要条件は明らかに満足されている
- Routh 表 :

$s^4$	1	28	24
$s^3$	9	38	0
$s^2$	23.78	24	
$s^1$	28.91	0	
$s^0$	24		

$$b_1 = -\frac{1}{9} \begin{vmatrix} 1 & 28 \\ 9 & 38 \end{vmatrix} = 23.78$$

$$b_2 = -\frac{1}{9} \begin{vmatrix} 1 & 24 \\ 9 & 0 \end{vmatrix} = 24$$

$$c_1 = -\frac{1}{23.78} \begin{vmatrix} 9 & 38 \\ 23.78 & 24 \end{vmatrix} = 28.91$$

$$d_1 = -\frac{1}{28.91} \begin{vmatrix} 23.78 & 24 \\ 28.91 & 0 \end{vmatrix} = 24$$

- 1 列目はすべて正なので, すべての根は開左半面にある.



# PI 補償器の設計例

- PI(比例積分) 制御系を考える. プラント  $P(s)$  と補償器  $K(s)$  :

$$P(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}, \quad K(s) = K_P + \frac{K_I}{s} = \frac{K_P s + K_I}{s} \quad (104)$$

- 閉ループ系の特性多項式 :

$$\begin{aligned} p(s) &= M_P(s)M_K(s) + N_P(s)N_K(s) = (s+1)(s+2)s + K_P s + K_I \\ &= s^3 + 3s^2 + (K_P + 2)s + K_I \end{aligned} \quad (105)$$

- Routh 表 :

$s^3$	1	$K_P + 2$
$s^2$	3	$K_I$
$s^1$	$K_P + 2 - K_I/3$	0
$s^0$	$K_I$	

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{3} \left| \begin{array}{cc|c} 1 & K_P + 2 & \\ 3 & K_I & \end{array} \right| \\ &= \frac{3(K_P + 2) - K_I}{3} \end{aligned}$$



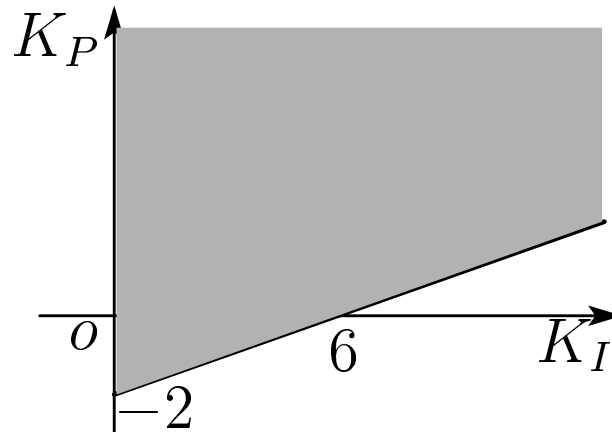
# PI 補償器の設計例：つづき

- よって、閉ループ系が安定となるための必要十分条件

$$K_I > 0, \quad K_P + 2 - \frac{K_I}{3} > 0$$

- パラメータの安定範囲

$$K_I > 0, \quad K_P > \frac{K_I}{3} - 2 \quad (106)$$



## 演習 3.5(a)

ラウス・フルビッツの安定判別法を用いて、次の多項式の根がすべて負の実部を持つために許される  $K$  の値の範囲を求めよ。

$$p(s) = s^3 + 3s^2 + Ks + 1$$

【解答】 必要条件より  $K > 0$ 。また、ラウス表は

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & K \\ s^2 & 3 & 1 \\ \hline s^1 & K - \frac{1}{3} & 0 \\ s^0 & 1 & \end{array} \quad -\frac{1}{3} \left| \begin{array}{cc|c} 1 & K & \\ 3 & 1 & \end{array} \right| = \frac{3K - 1}{3}$$

となる。よって、安定条件は

$$K > 0, \quad K - \frac{1}{3} > 0 \Rightarrow K > \frac{1}{3}$$

となる。



## 演習 3.3

極  $p$  が不確かな制御対象

$$P(s) = \frac{1}{s - p}, \quad a \leq p \leq b, \quad b > 0$$

のすべてを PI 補償器  $K(s) = K(1 + 1/s)$  で安定化したい. 閉ループ系の特性多項式を調べることによって, 比例ゲイン  $K$  ゲインに対する条件を導け.

**【解答】** 与えられた伝達関数

$$P(s) = \frac{1}{s - p}, \quad K(s) = K \frac{s + 1}{s}$$

より, 閉ループ系の特性多項式は

$$p(s) = s^2 + (K - p)s + K$$

となる.



## 演習 3.3

Routh-Hurwitz 安定判別則により，安定条件は

$$K > p, \quad K > 0$$

となり， $p$  の範囲を考慮すると安定範囲は

$$K > b$$

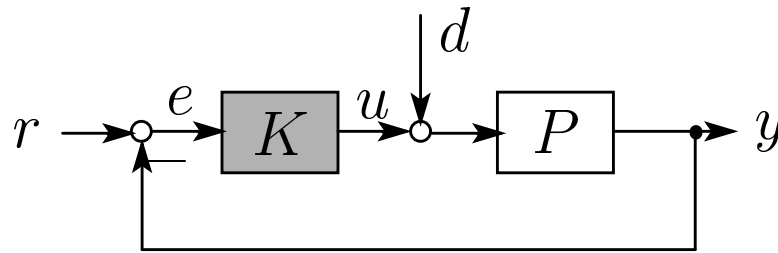
となる。





# 第4章 システムの性能

- フィードバック制御の究極の目的は目標値追従や外乱抑制を実現することである。
  - ◆ 目標値追従：物理系の物理量(出力)を目標値に一致させること
  - ◆ 外乱抑制：環境からの影響(外乱)を抑えること
- これらは性能と呼ばれる。
- 設計したシステムのよさはその時間応答で評価される。
- 時間応答はさらに過渡応答と定常応答に細分化できる。



# 第4章の内容

## 1. 定常応答

- 定常誤差の低減
- 定常誤差の漸近除去

## 2. 過渡応答

- 基本仕様
- 基準2次系
- 付加した零点／極の影響
- バンド幅と即応性

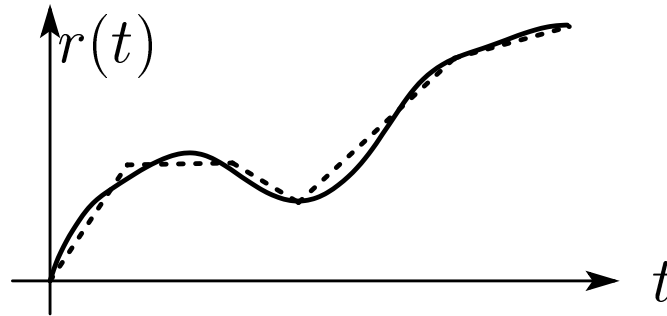
## 3. 開ループ制御と閉ループ制御の比較

- 目標値制御
- 外乱制御
- モデル不確かさに対するロバスト性

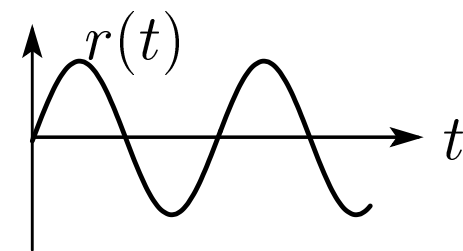
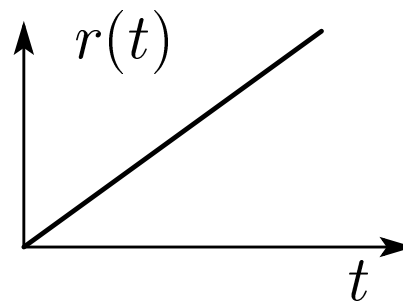
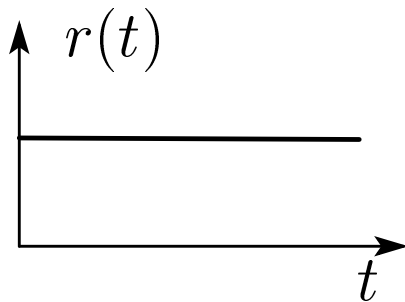


# 目標値とテスト信号

- 目標軌道の近似：



- テスト信号の代表例：



# 代表的なテスト信号

- ステップ信号

$$r(t) = k, t \geq 0$$

- ランプ信号

$$r(t) = kt, t \geq 0$$

- 正弦波信号

$$r(t) = k \sin \omega t, t \geq 0$$

- 単位ステップ信号  $1(t)$ :  $k = 1$  のときのステップ信号
- ランプ信号は  $kt \cdot 1(t)$ , 正弦波信号は  $k \sin \omega t \cdot 1(t)$  と書くことができる.



# 持続外乱

- 外乱抑制問題を扱うとき,
  - ◆ 勾配が一定である坂を登るときの重力のように値が一定であるものはステップ信号と考えることができる
  - ◆ 一定の加速度で加速するときの摩擦力や空気抵抗はランプ信号と考えることができる
  - ◆ 波のうねりのように一定振幅と周期で周期的に変化するものは正弦波として捉えることができる
- この種の外乱は、**持続外乱**と呼ばれる。

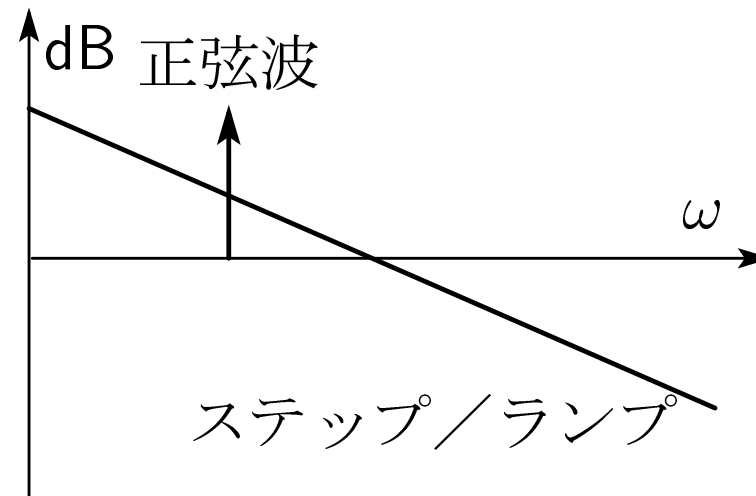


# テスト信号の性質

- 特徴：時間がいくら経っても零へ収束しない，**持続信号**
- Laplace 変換

$$\mathcal{L}[1(t)] = \frac{1}{s}, \quad \mathcal{L}[t \cdot 1(t)] = \frac{1}{s^2}, \quad \mathcal{L}[\sin \omega t \cdot 1(t)] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \quad (107)$$

- 任意の信号はその Laplace 変換のインパルス応答であるので，信号の Laplace 変換はそのモデルとして捉えることができる。
- この意味で，上記テスト信号のモデルはすべて**不安定**である。
- 周波数域における特徴：低周波ゲインが高く，低周波成分が多い。

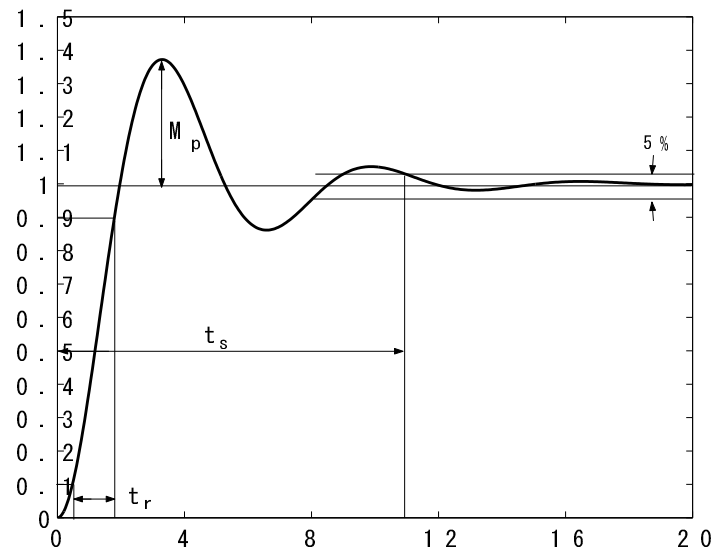


# 定常応答

- 時間が十分に経ったときのシステム出力応答

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$$

が定常応答と呼ばれる。



- よい定常応答とは何か，これを達成するにはどんな条件が要るかについて解析する。



# 定常出力と伝達関数ゲインの関係

**定理 8** 安定伝達関数  $G(s)$  の入力  $u(t) = \cos(\omega t)1(t)$  であるとき、 $t \rightarrow \infty$  のときの出力  $y(t)$  は次式で与えられる。

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = |G(j\omega)| \cos(\omega t + \angle G(j\omega)) \quad (108)$$

(証明)  $G(s)$  が安定なので、そのインパルス応答  $g(t)$  の Fourier 変換は  $\mathcal{F}[g(t)] = \int_0^\infty g(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau = G(j\omega)$  となる。また、 $G(j\omega)$  を極座標で表すと、 $|G(j\omega)|e^{j\angle G(j\omega)}$  と書ける。よって  $\cos(\omega t) = \Re(e^{j\omega t})$  及び  $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{j\omega t} = e^{j\omega t}$  を用いれば

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t g(\tau)u(t-\tau)d\tau = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t g(\tau)\Re(e^{j\omega(t-\tau)})d\tau \\ &= \Re \left( e^{j\omega t} \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t g(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau \right) = \Re (e^{j\omega t}G(j\omega)) \\ &= |G(j\omega)|\Re (e^{j(\omega t + \angle G(j\omega))}) = |G(j\omega)| \cos(\omega t + \angle G(j\omega)) \end{aligned}$$





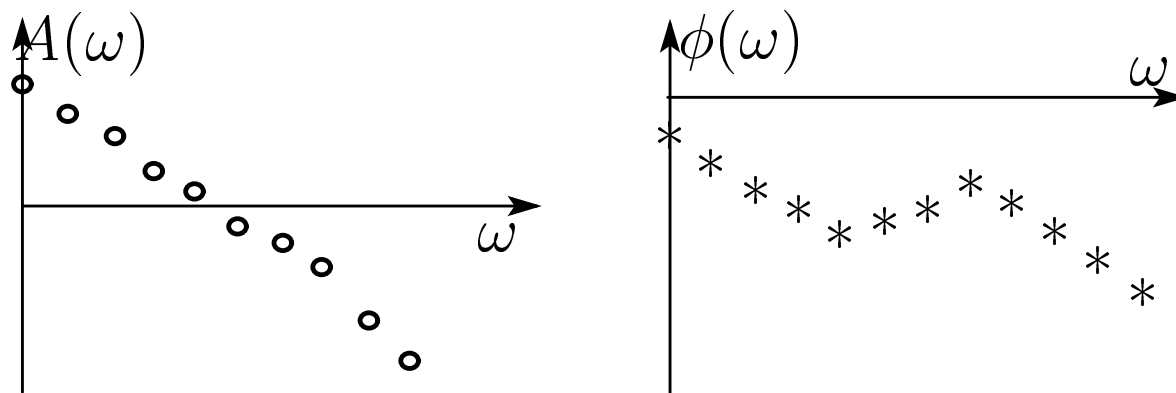
# 応用：伝達関数の同定

定理 8 を用いてシステムの伝達関数を実験的に求めることができる。

1. 周波数集合  $\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N\}$  を用意
2. 正弦波入力  $u_i(t) = \cos \omega_i t$  を印加し、定常出力を測定

$$y_i(t) = A_i \cos(\omega_i t + \phi_i) \Rightarrow |G(j\omega_i)| = A_i, \angle G(j\omega_i) = \phi_i$$

3.  $\{|G(j\omega_i)|, \angle G(j\omega_i)\}$  に合わせるように有理関数  $G(s)$  を求める



# 数値例

次のシステム

$$G(s) = \frac{10}{s + 10}, \quad u(t) = \cos(10t)$$

について，出力応答は以下のように求まる．

$$\begin{aligned} \hat{y}(s) &= \frac{10}{s + 10} \frac{s}{s^2 + 10^2} = -\frac{1}{2} \frac{1}{s + 10} + \frac{1}{2} \frac{s}{s^2 + 100} + \frac{1}{2} \frac{10}{s^2 + 100} \\ \Rightarrow y(t) &= -\frac{1}{2} e^{-10t} + \frac{1}{2} \cos(10t) + \frac{1}{2} \sin(10t) \\ &\rightarrow \frac{1}{2} [\cos(10t) + \sin(10t)] = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos\left(10t - \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

一方， $G(j\omega)$  の  $\omega = 10$  におけるゲインと位相は次のようになる．

$$G(j10) = \frac{10}{j10 + 10} = \frac{1}{\sqrt{2} e^{j \arctan 1}} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-j \frac{\pi}{4}}$$

よって，定理通りになっている．

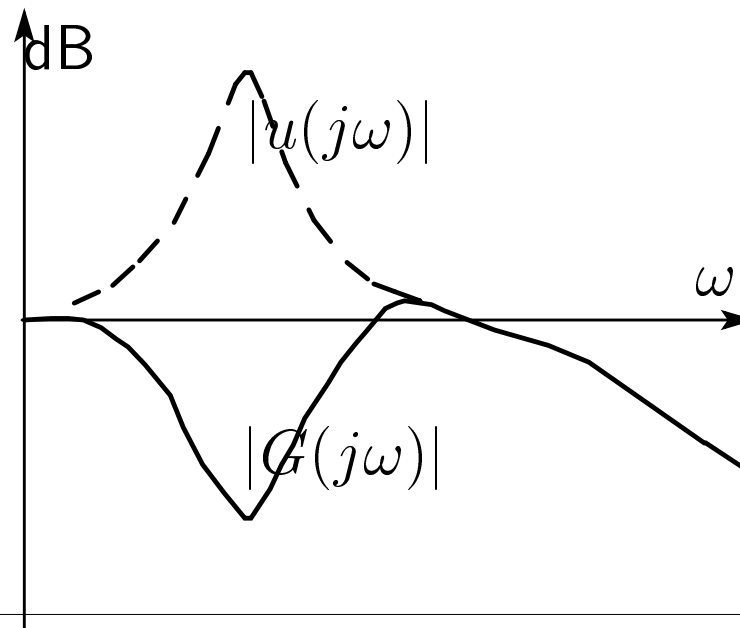


# 定常出力と伝達関数ゲインの関係

- $1(t) = \cos(0 \cdot t)1(t)$  が成り立つので、単位ステップ信号は  $\omega = 0$  の余弦波関数とみなせ、その定常ステップ応答は次のようになる。

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = |G(j0)| \cos \angle G(j0) \quad (109)$$

- 外乱  $u(t) = \cos(\omega t)1(t)$  が  $G(s)$  の定常出力に与える悪影響を低減するには、同じ周波数におけるゲイン  $|G(j\omega)|$  を下げること。
- ステップ外乱に対しては、低周波ゲイン  $|G(j0)|$  を下げること。



# 出力漸近収束の条件

**補題 3** 信号  $f(t)$  は  $t \geq 0$  で定義されたもので、その Laplace 変換  $\hat{f}(s)$  は有理関数であるとする。このとき、 $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0$  のための必要十分条件は  $\hat{f}(s)$  が安定になることである。

(証明) 十分性：最終値の定理より分る。

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \hat{f}(s) = 0$$

必要性： $\hat{f}(s)$  が有理関数なので、部分分数に展開できる。仮に  $\hat{f}(s)$  に虚軸を含む右半面に極を持つと、それに対応する部分分数の逆 Laplace 変換は指数部分の実部が零以上の指数関数となるので、決して零には収束できない。よって

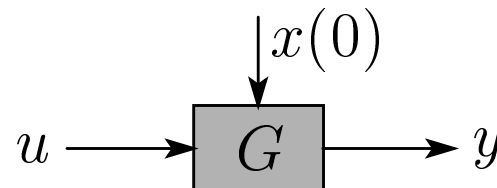
$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0 \Rightarrow \hat{f}(s) \text{ is stable}$$



# 伝達関数に対する条件

- ステップ入力  $u(t) = 1(t)$  の場合 :

$$\hat{u}(s) = \frac{1}{s}$$



であり, 原点極を一つ持つ.  $\hat{y}(s) = G(s)\hat{u}(s)$  を安定にするには,  $G(s)$  の零点で  $\hat{u}(s)$  の不安定極を消去しなければならない. よって,  $G(s)$  は

$$G(j0) = 0$$

を満たさなければならない.

- 正弦波入力  $u(t) = \sin(\omega t)1(t)$  の場合 :

$$G(j\omega) = 0$$

が成り立たなければならない.



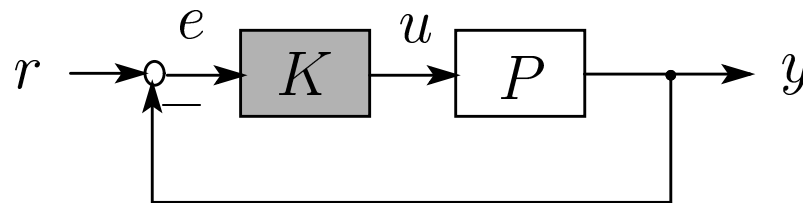
# 目標値追従

目標値： $r(t)$ ， 追従誤差： $e(t) = r(t) - y(t)$

$r \mapsto e$  の伝達関数を  $H_{er}(s)$ ， 目標値モデルを  $R(s)$  とすると

$$\hat{e}(s) = H_{er}(s)R(s) \quad (110)$$

- 物理系の信号は慣性を持つために滑らかにしか変化できない。このため、システムの出力は瞬時にテスト信号に追従することができない。過渡状態を経てはじめて追従することができる。
- しかし、少なくとも定常状態で誤差  $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t)$  を低減したい。
- 漸近追従：理想的には出力を目標値に完全に一致させたい



# 追従誤差と開ループゲインの関係

## ■ ループゲイン

$$L(s) = P(s)K(s) \quad (111)$$

## ■ 目標値から追従誤差までの閉ループ伝達関数

$$H_{er}(s) = \frac{1}{1 + L(s)} \quad (112)$$

## ■ ステップ状の目標値に対する追従誤差を低減できる条件

$$|H_{er}(j0)| = \left| \frac{1}{1 + L(j0)} \right| \ll 1 \Rightarrow |L(j0)| \gg 1 \quad (113)$$

すなわち、開ループは十分に高い低周波ゲインを持つ必要がある。

## ■ 角周波数 $\omega$ の正弦波目標値に対する追従誤差を低減できる条件

$$|L(j\omega)| \gg 1 \quad (114)$$



# 漸近追従の条件

ステップ信号に漸近追従するために  $H_{er}(j0) = 0$  が必要. よって

$$H_{er}(j0) = \frac{1}{1+L(j0)} = 0 \Leftrightarrow L(j0) = \infty \Leftrightarrow L(s) \text{ が } s = 0 \text{ に極を持つ}$$

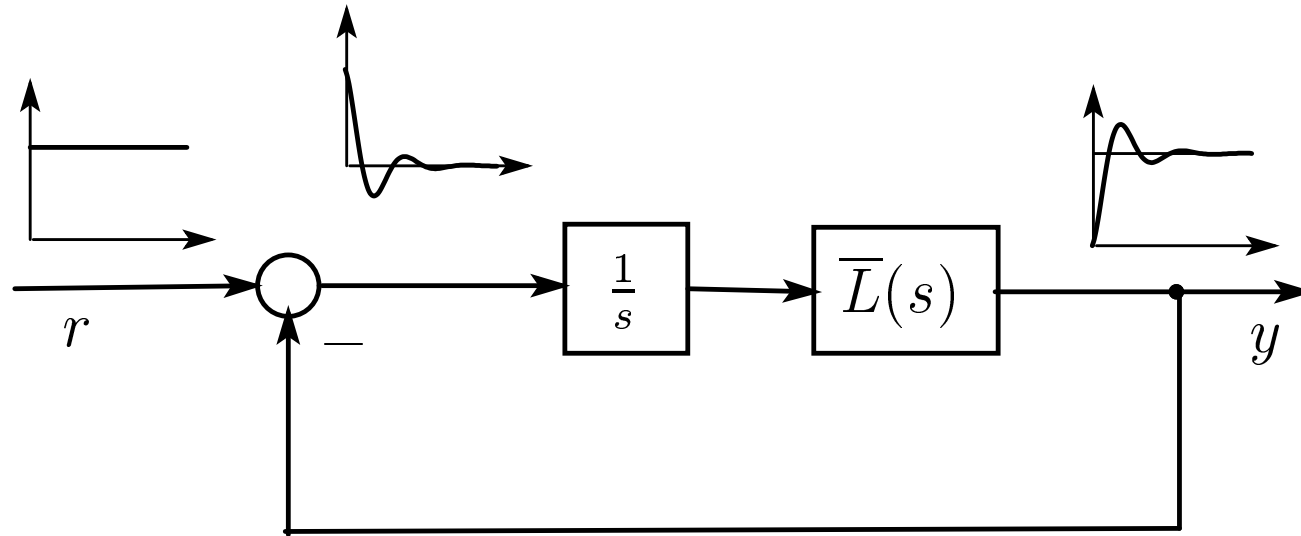
⇒ ループゲイン  $L(s)$  に目標値モデル  $R(s) = 1/s$  を持つことが必要

- 物理的理由:  $y(t)$  は  $L(s)$  の出力であり,  $L(s)$  は零に収束するべき追従誤差  $e(t)$  で駆動されるので,  $y(t)$  を一定値に維持できるためには  $L(s)$  に過去のデータを保存できる機構, つまり積分器が必要である.
- $P(s)$  が原点零点を持つ場合:  
内部安定性のためにこの不安定零点を制御器  $K(s)$  の極で打ち消すことはできない. よって  $L(s) = P(s)K(s)$  に積分器を持たせることができず, 出力はステップ信号に追従できなくなる.





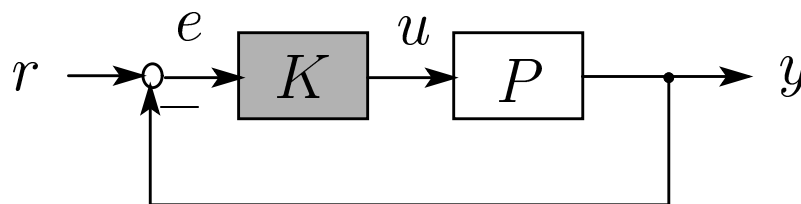
# 積分器の効用



# 内部モデル原理 1

**定理 9** 1 入出力フィードバック系を内部安定と仮定する. また, 目標値のモデルを  $R(s) = N_R(s)/M_R(s)$  とし, 完全不安定とする. このとき,

- (1) 漸近追従が実現できるためには,  $R(s)$  の極と同じ位置に制御対象  $P(s)$  が零点を持ってはいけない.
- (2) (1) の条件が成立つとき, 漸近追従を実現するためには, ループゲイン  $L(s)$  が  $1/M_R(s)$  を持つことが必要十分である.



# 内部モデル原理 1 の証明

(1) : 既約分解を使うと

$$P = \frac{N_P}{M_P}, \quad K = \frac{N_K}{M_K} \Rightarrow L(s) = \frac{N(s)}{M(s)} = \frac{N_P N_K}{M_P M_K}$$

$N_P$  に  $M_R$  と共通の因子  $(s - \lambda)$ ,  $\text{Re}(\lambda) \geq 0$  を持つ場合, 内部安定性のためにこの因子を  $M_K(s)$  の因子で相殺できない. ゆえに,  $N(s)$  に因子  $(s - \lambda)$  が残り,  $L(\lambda) = 0$  となる. すると,

$$H_{er}(\lambda) = \frac{1}{1 + L(\lambda)} = 1$$

となり,  $s = \lambda$  に零点を持たない. よって,

$$\hat{e}(s) = H_{er}(s)R(s)\hat{e}(s) = H_{er}(s)\frac{N_R(s)}{M_R(s)}$$

が不安定となって, 追従誤差は零に収束しない.



# 内部モデル原理 1 の証明

(2) :  $L(s) = N(s)/M(s)$  のように既約分解すると, 追従誤差の Laplace 変換は

$$\hat{e}(s) = \frac{1}{1 + L(s)} R(s) = \frac{M(s)}{M(s) + N(s)} \frac{N_R(s)}{M_R(s)}$$

$M_R(s)$  の根がすべて閉右半面にあるため,  $\hat{e}(s)$  を安定化するために,  $M(s)$  の因子で  $M_R(s)$  を消去しなければならない. 従って,  $M(s)$  が  $M_R(s)$  を持つことが必要十分である.

- 内部モデル原理は多入出力系に対しても成立する. ただし, この場合内部モデルは単純に目標値のモデルになるのではなく, 入出力間の干渉を反映してさらに複雑になる.

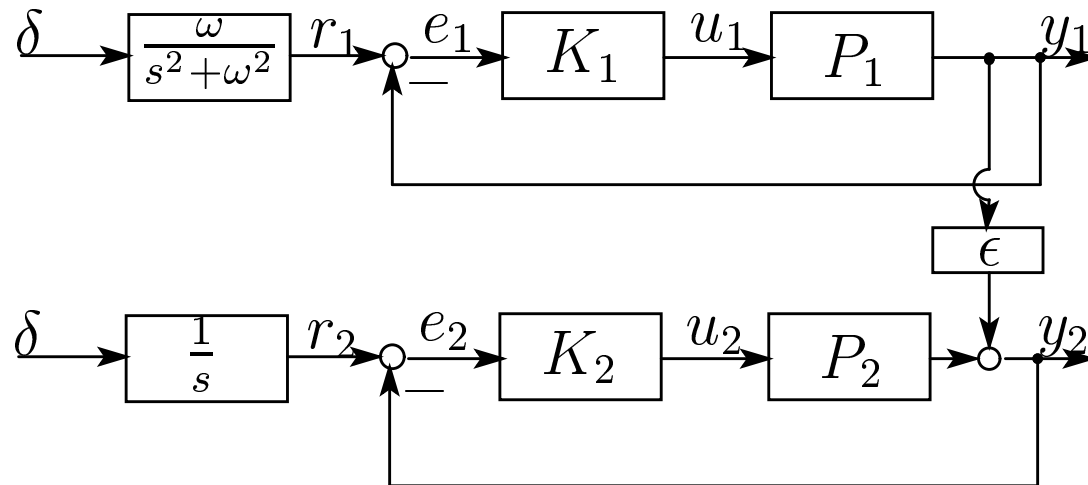


# 2入力2出力の例

## ■ 制御目的

$y_1(t)$  を  $r_1(t) = \sin \omega t$  に,  $y_2(t)$  を  $r_2(t) = 1(t)$  に漸近追従させる

$$P(s) = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ \epsilon P_1 & P_2 \end{bmatrix}, \quad K(s) = \begin{bmatrix} K_1 & 0 \\ 0 & K_2 \end{bmatrix}$$



## 2入力2出力の例

### ■ 追従誤差

$$\hat{e}_1(s) = \frac{1}{1 + L_1} \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}, \quad \hat{e}_2(s) = \frac{1}{1 + L_2} \frac{1}{s} - \frac{\epsilon}{1 + L_2} \hat{y}_1 \quad (115)$$

$e_1(\infty) = 0$  のために  $L_1(s)$  に  $1/(s^2 + \omega^2)$  を持たせる必要がある。

一方、 $\hat{y}_1(s)$  が  $1/(s^2 + \omega^2)$  を持つので、 $e_2(\infty) = 0$  を保証するために  $L_2(s)$  は  $1/s$  だけでなく、 $1/(s^2 + \omega^2)$  も持たなければならない。

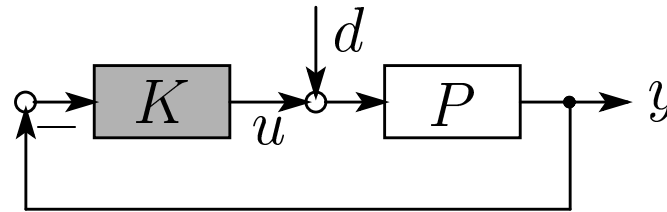
### ■ よって、全体のループゲイン $L(s) = P(s)K(s)$ に内部モデル

$$\begin{bmatrix} 1/(s^2 + \omega^2) & 0 \\ 0 & 1/s(s^2 + \omega^2) \end{bmatrix} \quad (116)$$

を持たせることになる。



# 外乱制御：定常外乱応答抑制の条件



- 外乱  $d(t)$  と出力  $y(t)$  間の伝達関数

$$H_{yd}(s) = \frac{P(s)}{1 + P(s)K(s)} \quad (117)$$

- ステップ状の外乱を抑えるには  $|H_{yd}(j0)| \ll 1$  が必要. つまり
  - (1)  $|P(j0)| \ll 1$    あるいは
  - (2)  $|K(j0)| \gg 1$



# 外乱制御：定常外乱応答抑制の条件

- (1)  $|P(j0)| \ll 1$  を満たす制御対象は現実にはほとんど存在しない。なぜなら、制御系の主たる目的は目標値追従であり、低周波数帯域の正弦波信号に精度よく追従するために同じ帯域でループゲイン  $|L| = |PK|$  を十分高くする必要がある。よって、制御対象は一般に低周波数帯域で高いゲインを持つように設計されている。
- 一方、(2) の条件

$$|K(j0)| \gg 1$$

は制御器に対する要求であり、ループゲインを高くする仕様と矛盾しないから、実現可能である。

- 同様に、角周波数  $\omega$  の正弦波外乱を抑圧するには、

$$|K(j\omega)| \gg 1$$

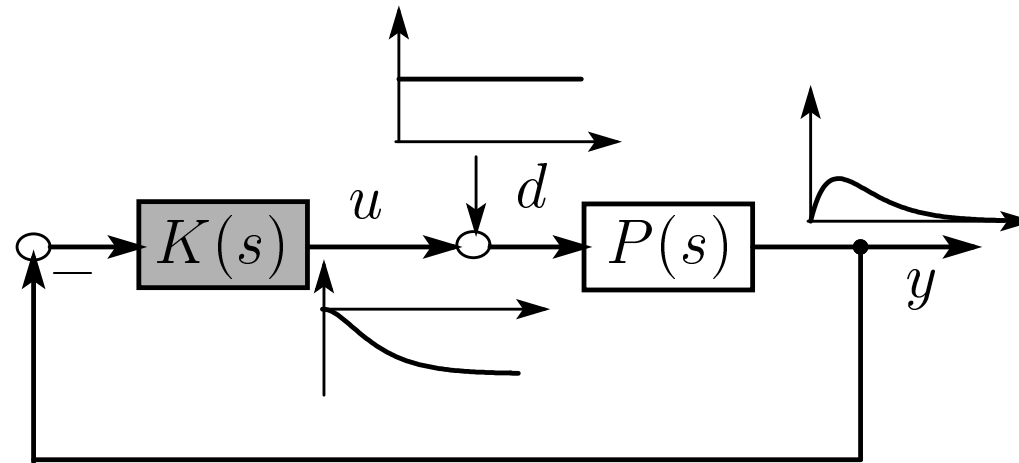
にすればよい。





# 外乱制御：漸近除去の条件

- 外乱のモデルが既知の場合，その影響を出力定常応答から完全に排除したい。
- 下図のシステム構成から想像できるように，制御器  $K(s)$  で外乱と同じ信号作り，外乱と相殺させることによって持続外乱の漸近的除去をしなければならない。
- 従って，制御器が外乱のモデル  $D(s)$ (内部モデル) を持つ必要がある。



# 外乱制御：例

例：ステップ状の外乱を漸近除去するには制御器  $K(s)$  が外乱のモデル  $D(s) = 1/s$  を持たなければならないことを示す

$$P(s) = \frac{N_P(s)}{M_P(s)}, \quad K(s) = \frac{N_K(s)}{M_K(s)} \quad (118)$$

■ 出力応答：

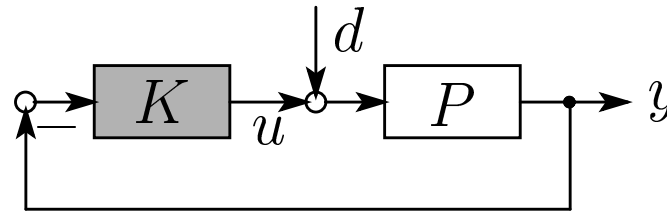
$$\hat{y}(s) = \frac{P(s)}{1 + P(s)K(s)} D(s) = \frac{N_P(s)M_K(s)}{M_P(s)M_K(s) + N_P(s)N_K(s)} \times \frac{1}{s}$$

$y(t) \rightarrow 0 \Leftrightarrow \hat{y}(s)$  安定より,  $N_P(s)M_K(s)$  の零点で不安定極  $p = 0$  を消去しなければならない. よって,

$$N_P(0)M_K(0) = 0 \Leftrightarrow N_P(0) = 0 \text{ or } M_K(0) = 0 \quad (119)$$



# 外乱制御：漸近除去の条件

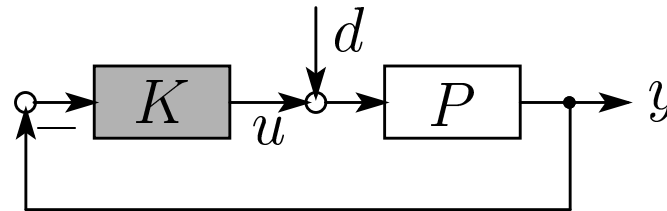


- $P$  が零点  $z = 0$  を持つか,  $K$  が  $p = 0$  を持つ. 原点零点を持つ制御対象は稀なので, 制御器に積分器を持たせなければならない.
- 制御対象の零点に外乱モデルの極と同じものがあれば, これらの極を除いた  $D(s)$  の極を制御器に持たせればよい. この意味で, 制御対象の零点は外乱漸近除去の妨げになっていない.
- 漸近追従の場合制御対象  $P(s)$  に内部モデルがあれば, 制御器  $K(s)$  に持たせる必要はないのに対して, 外乱除去の場合制御器  $K(s)$  に内部モデルを持たせなければならない. この違いに注意.



# 内部モデル原理 2

**定理 10** 下図の 1 入出力フィードバック系が内部安定であると仮定する。また、外乱モデルを  $D(s) = N_D(s)/M_D(s)$  とし、完全不安定とする。さらに、制御対象  $P(s)$  の零点と  $D(s)$  の極が相異なると仮定する。このとき、漸近的に外乱の影響を除去する、すなわち  $y(t) \rightarrow 0$  を実現するために、制御器  $K(s)$  が  $1/M_D(s)$  を持つことが必要十分である。

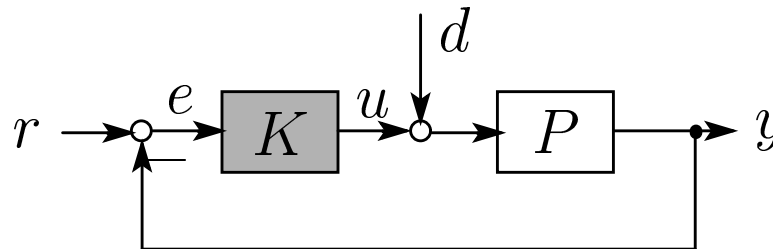


# 数値例

図示の閉ループ系において、

$$P(s) = \frac{1}{s+1}, \quad K(s) = \frac{k}{s^2+4}$$

1. 閉ループ系を安定化できる  $k$  の範囲を求めよ.
2.  $r(t) = 0$ ,  $d(t) = \sin 2t$  ( $t \geq 0$ ) のとき, 外乱の定常応答は  $y(\infty) = 0$  となることを示せ.
3.  $r(t) = \sin 2t$ ,  $d(t) = 0$  ( $t \geq 0$ ) の場合,  $\lim_{t \rightarrow \infty} (r(t) - y(t))$  を計算することによって定常出力  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$  を求めよ.



# 解答

(a) 特性多項式

$$p(s) = (s + 1)(s^2 + 4) + k = s^3 + s^2 + 4s + k + 4$$

とラウスフルビッツ安定判別法より，安定条件

$$-4 < k < 0$$

(b) ラプラス変換の最終値定理を利用する．

$$\hat{y}(s) = \frac{P}{1 + PK} \hat{d}(s) = \frac{\frac{1}{s+1}}{1 + \frac{k}{(s+1)(s^2+4)}} \frac{2}{s^2 + 4} = \frac{s^2 + 4}{p(s)} \frac{2}{s^2 + 4} = \frac{2}{p(s)}$$

$$\Rightarrow y(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \hat{y}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{2}{p(s)} = 0$$



# 解答のつづき

(c) 同様に

$$\hat{e}(s) = \frac{1}{1 + PK} \hat{r}(s) = \frac{1}{1 + \frac{k}{(s+1)(s^2+4)}} \frac{2}{s^2 + 4} = \frac{2(s+1)}{p(s)}$$

$$\Rightarrow e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \hat{e}(s) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = r(t) = \sin 2t$$

制御器  $K$  に内部モデルがあるため、漸近追従と外乱除去両方ができる。  
(hm41.mdl)

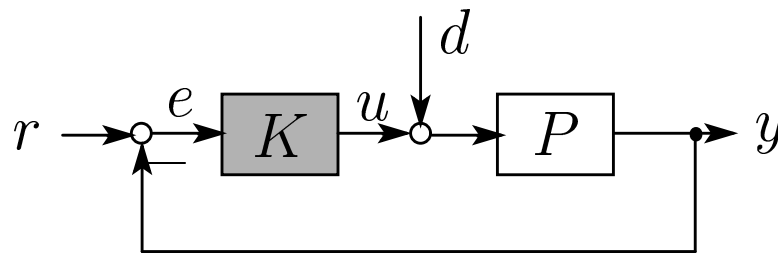


## 演習 4.2

図示の閉ループ系において、

$$P(s) = \frac{1}{s(s+1)}, \quad K(s) = k$$

1. 閉ループ系の安定性を保証するゲイン  $k$  の範囲
  2.  $d(t) = 0, r(t) = 1(t)$  のときの定常追従誤差  $e(\infty)$
  3.  $r(t) = 0, d(t) = 1(t)$  のときの定常出力  $y(\infty)$
- を求めよ。さらに、(b), (c) の結果について考察せよ。





## 演習 4.2 の解答

(a) 特性多項式

$$p(s) = s(s + 1) + k = s^2 + s + k$$

とラウスフルビッツ安定判別法より, 安定条件

$$k > 0$$

(b) ラプラス変換の最終値定理を利用する.

$$\hat{e}(s) = \frac{1}{1 + PK} \hat{r}(s) = \frac{1}{1 + \frac{k}{s(s+1)}} \frac{1}{s} = \frac{s(s+1)}{s^2 + s + k} \frac{1}{s} = \frac{s+1}{s^2 + s + k}$$

$$\Rightarrow e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \hat{e}(s) = 0$$



## 演習 4.2 の解答 : つづき

(c) 同様に

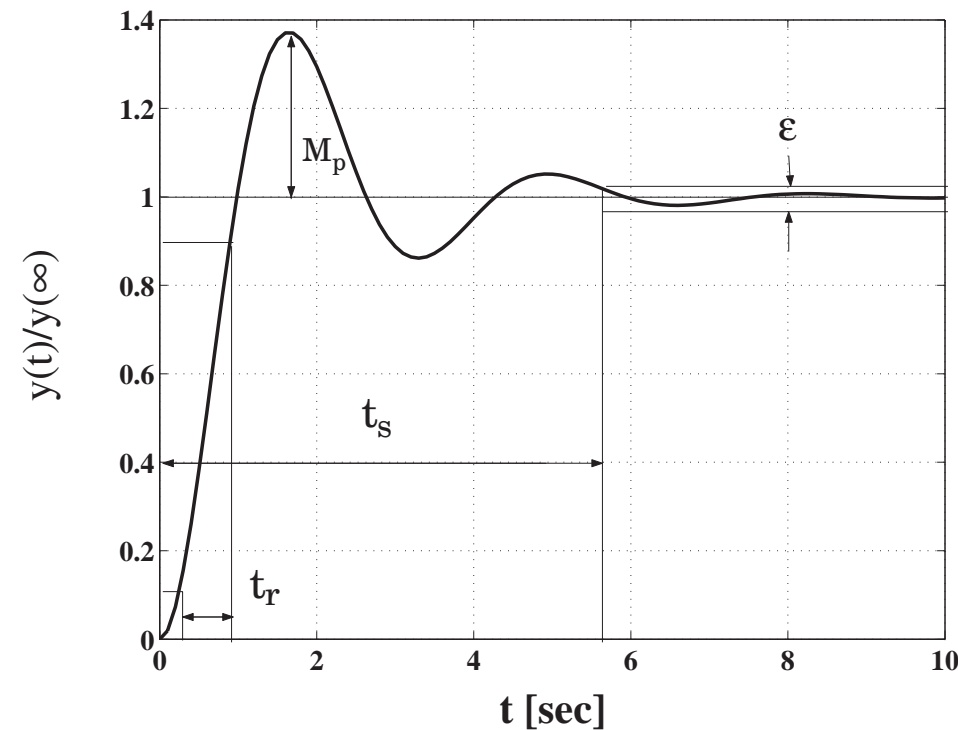
$$\hat{y}(s) = \frac{P}{1 + PK} \hat{d}(s) = \frac{\frac{1}{s(s+1)}}{1 + \frac{k}{s(s+1)}} \frac{1}{s} = \frac{1}{s^2 + s + k} \frac{1}{s} = \frac{1}{s(s^2 + s + k)}$$
$$\Rightarrow y(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \hat{y}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^2 + s + k} = \frac{1}{k} \neq 0$$

ループゲイン  $L = PK$  に積分器があるためステップ信号に漸近追従できる。一方、制御器  $K$  に積分器がないためステップ外乱を完全に除去できない。  
(hm42.mdl)



# 過渡応答

- 過渡応答：システムの入力が定常値に収束するまでの振舞
- 目標値追従や外乱抑制問題などでは，出力がすばやく定常値へ収束することが要求され，そして定常値へ収束するときの行き過ぎ量が小さいことも求められる。

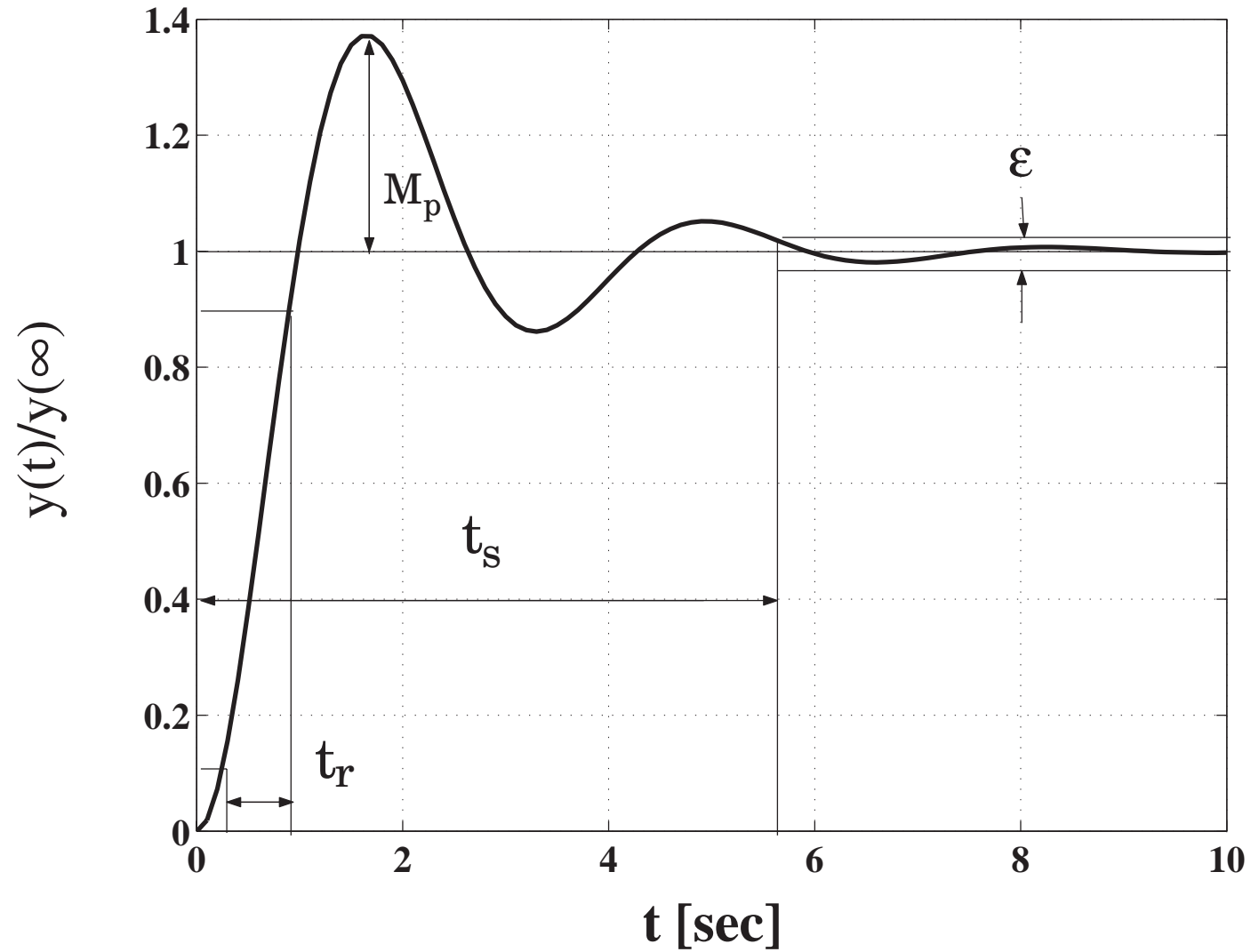


# 評価基準

- ステップ応答で過渡応答を評価
  - ◆ 立ち上がり時間  $t_r$  : 出力  $y(t)$  が定常値の 10% から 90% に立ち上がるのにかかる時間
  - ◆ 整定時間  $t_s$  : 定常値近傍のあらかじめ定められた範囲 (通常  $\pm 5\%$  を用いる) に収束するまでにかかる時間
  - ◆ 行き過ぎ量  $M_p$  : 出力の最大値  $y_{\max}$  と定常値の相対差  $y_{\max} - 1$  (定常値が  $k \neq 1$  のとき  $(y_{\max} - k)/k$  となる. すなわち, 定常値からの相対ずれの最大値)
- これらは仕様と呼ばれ, その意味は次の図に示される.
- これらの評価量が小さければ小さいほど, システムの過渡応答の性能がよい.



# 評価基準



# 応答仕様と伝達関数の関係

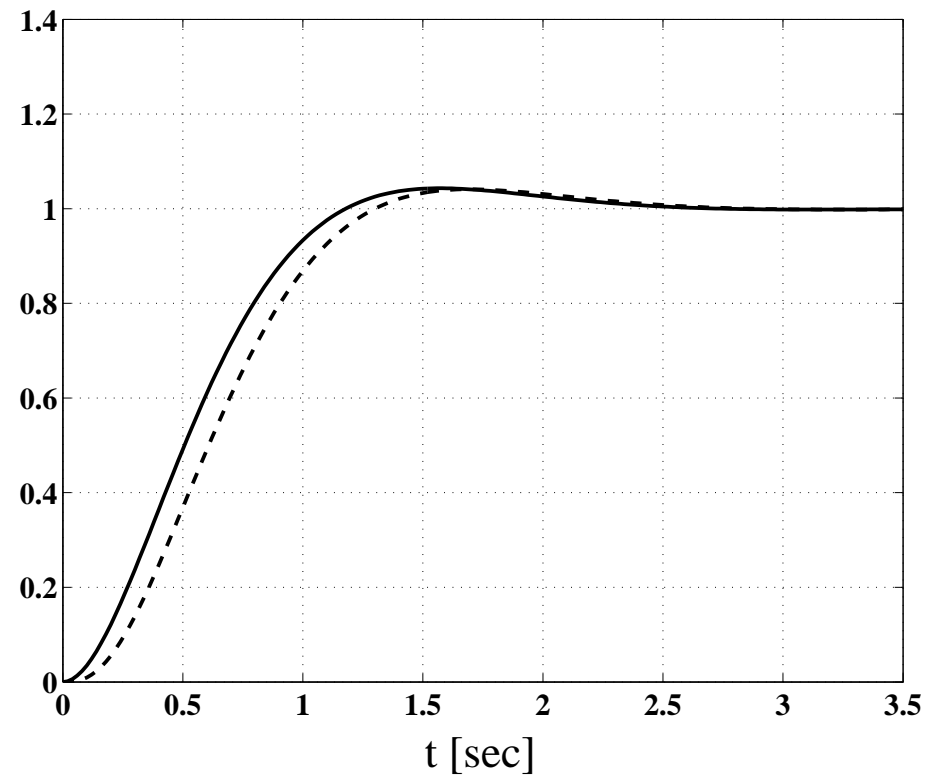
- 性能仕様とシステムのパラメータ，特に極の位置との関係について考える．
- 一般的なシステムに対しては，性能仕様とパラメータの関係が複雑すぎて，一般的な指針は得られそうもない．
- しかし，多くの場合システムの極は虚軸に比較的に近い一対の複素極と虚軸から遠く離れるほかの極からなり，虚軸に一番近い極は**主要極**と呼ばれる．虚軸から遠く離れた極の応答は主要極の応答よりも零への収束が遥かに速いので，ごく初期の時間帯を除いて出力の応答は主要極の応答で近似できる．
- 従って，低次のシステムのパラメータと応答の関係が分れば，この関係は高次のシステムに対しても指針となり得る．



# 高次系 vs 基準 2 次系

例：次の二つの伝達関数のステップ応答にさほど差はない。

$$G_1(s) = \frac{8}{s^2 + 4s + 8}, \quad G_2(s) = \frac{80}{(s^2 + 4s + 8)(s + 10)}$$



# 高次系 vs 基準 2 次系

- 理由： $G_2$  に極  $-10$  があるが，主要極  $-2 \pm j\sqrt{2}$  ( $G_1$  の極でもある) よりは虚軸から離れている．この極による応答は主要極の応答より 5 倍の速さで零に収束するので，瞬く間に消えてしまう．
- 数式的には

$$G_2(s) = \frac{8}{s^2 + 4s + 8} \times \frac{1}{s/10 + 1} \approx \frac{8}{s^2 + 4s + 8} = G_1(s)$$

この近似は低周波数帯域で成り立つものである．

- ステップ信号には低周波数成分が主要部分を占めるから，その伝達が伝達関数の低周波数特性によって決まる．これは， $G_2$  と  $G_1$  のステップ応答に大差がない理由である． (dominant.m)





# 基準 2 次系

$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (120)$$

- $\zeta$  : 減衰係数,  $\omega_n$  : 固有周波数, 極 :

$$p_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \quad (121)$$

- **特徴** : 零点を持たず, しかも低周波ゲインは  $H(j0) = 1$  である
- 最終値の定理より,  $H(s)$  に単位ステップ入力を印加したとき, その出力は

$$y(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s\hat{y}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \times H(s) \frac{1}{s} = H(0) = 1 \quad (122)$$

となり, ステップ入りに漸近追従できる.



# 応答仕様とパラメータの関係 ( $0 < \zeta < 1$ )

- 基準2次系のパラメータと応答仕様との関係：

$$t_r \approx \frac{1.8}{\omega_n} \quad (123)$$

$$M_p = e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \quad (124)$$

$$t_s \approx \frac{3}{\zeta\omega_n} \quad (125)$$

- 行き過ぎ量  $M_p$  は減衰係数  $\zeta$  だけに依存する。  $\zeta$  を上げれば、  $M_p$  が下がる。
- $\zeta$  と  $\omega_n$  の積は極の実部の大きさに等しく、  $\zeta\omega_n$  を上げれば、 整定時間  $t_s$  が短くなる。

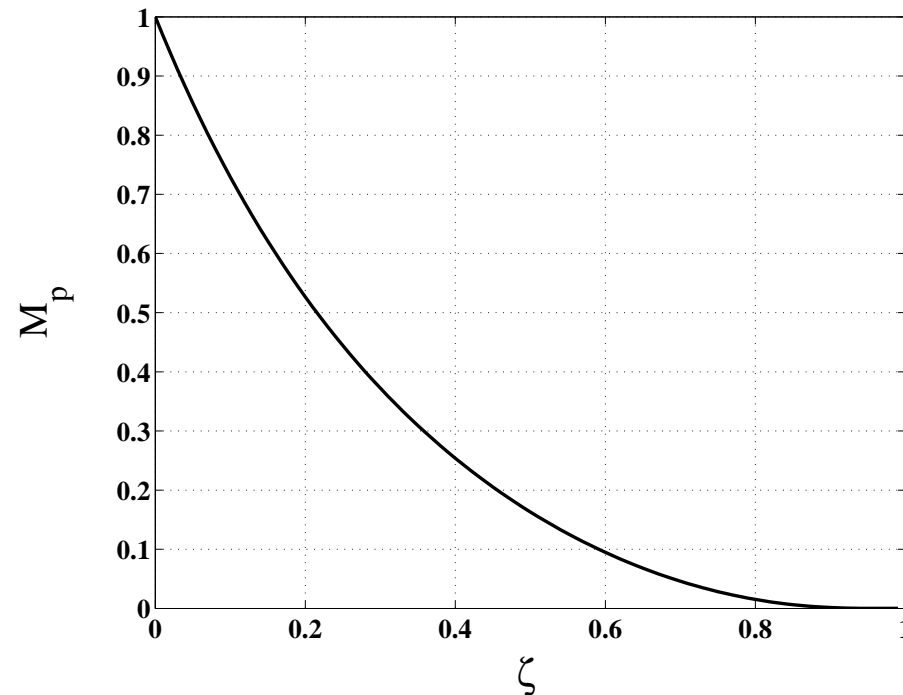


# 応答仕様とパラメータの関係 ( $0 < \zeta < 1$ )

- $M_p$  と  $t_s$  が与えられたときのパラメータ値の範囲

$$\zeta \geq \zeta(M_p) = \frac{|\ln M_p|}{\sqrt{\pi^2 + |\ln M_p|^2}} \quad (126)$$

$$\zeta \omega_n \geq \frac{3}{t_s} \quad (127)$$



# 応答仕様と極の位置の関係

- まず，式 (127) より二つの複素極の実部は

$$\Re(p_{1,2}) = -\zeta\omega_n \leq -\frac{3}{t_s} \quad (128)$$

を満たさなければならない。

- 2次系極の極座標表示：

$$p_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = \omega_n e^{j(\pi \pm \theta)}, \quad \theta = \arccos \zeta$$

- $\arccos \zeta$  が  $\zeta$  の減少関数なので，式 (126) より角度  $\theta$  は

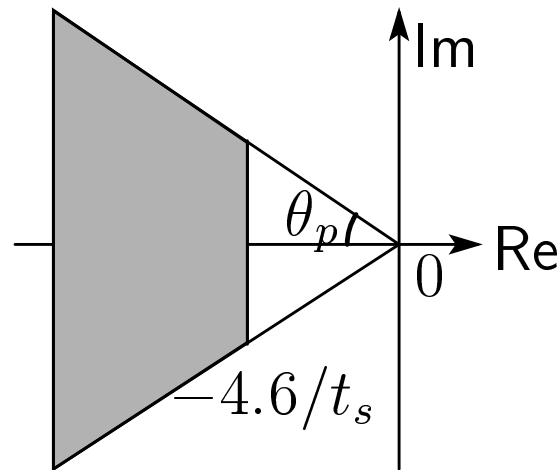
$$\theta \leq \theta_p := \arccos \zeta(M_p) \quad (129)$$

を満たさなければならない。



# 応答仕様と極の位置の関係

例えば、角度  $\theta_p = 45^\circ$  が減衰係数  $\zeta(M_p) = 0.707$ ，つまり  $M_p = 5\%$  と対応する．この関係は、後に極配置による設計法で役立つ．



# 数値例

$t_r \leq 0.6[\text{sec}]$ ,  $M_p \leq 10\%$ ,  $t_s \leq 3[\text{sec}]$  を満たす  $\zeta$  と  $\omega_n$  を決めよ.

- まず  $M_p = 10\%$  に対応する減衰係数は

$$\zeta(M_p) = \frac{|\ln 0.1|}{\sqrt{\pi^2 + |\ln 0.1|^2}} \approx 0.59$$

である. よって,  $\zeta \geq 0.59$  となる.

- 次に, 立ち上がり時間と整定時間の仕様から

$$\omega_n \geq \frac{1.8}{t_r} \geq 3, \quad \zeta \omega_n \geq \frac{3}{t_s} \geq 1$$

$\zeta \geq 0.59$ ,  $\omega_n \geq 3$  であれば,  $\zeta \omega_n \geq 1$  は自動的に満たされる

- パラメータの範囲

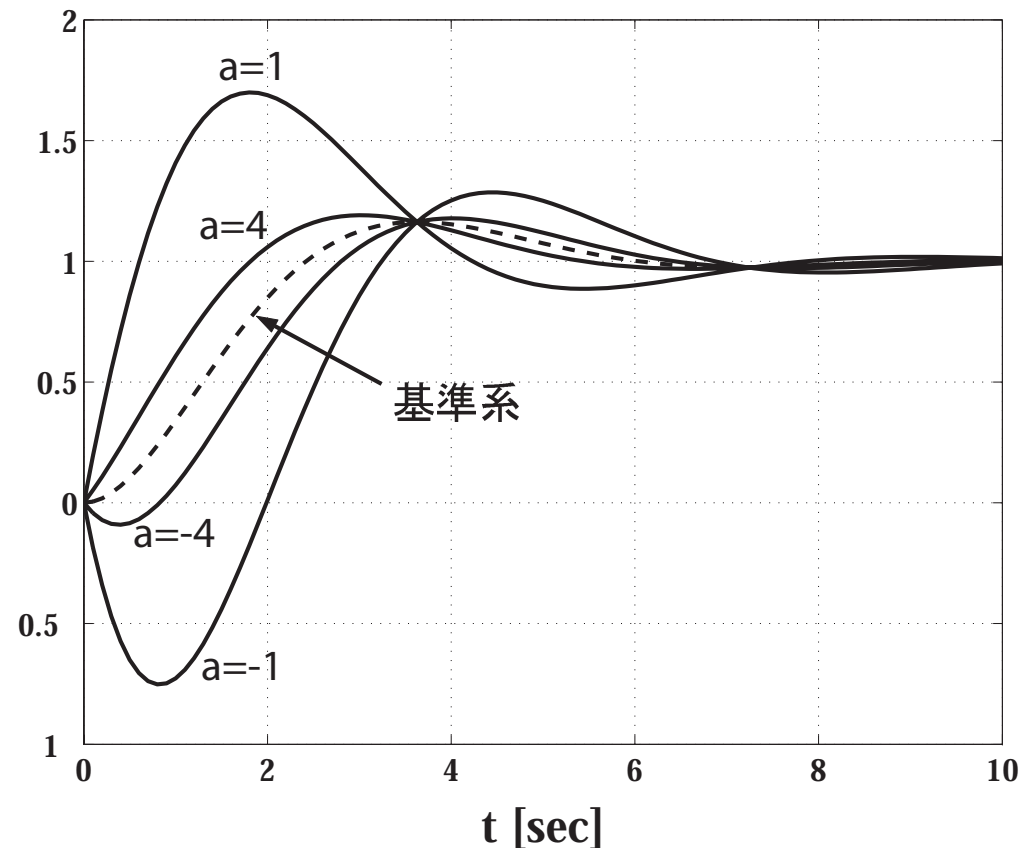
$$\zeta \geq 0.59, \quad \omega_n \geq 3$$



# 付加した零点の影響

- 基準 2 次系に零点  $z = -a\zeta\omega_n$  を付加した伝達関数

$$H(s) = \frac{\omega_n^2 \left(1 + \frac{1}{a\zeta\omega_n} s\right)}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}, \quad a \in \mathbb{R} \quad (130)$$



# 付加した零点の影響

基準2次系と比較すると、次の特徴がある。

- 整定時間はほとんど変化しない。
- $a > 0$  の場合、 $a$  が小さいほど行き過ぎ量が多い。  $a \gg 1$  のとき基準系の応答に近い。
- $a < 0$  の場合、 $|a|$  を小さくすると初期段階で**逆振れ**が生じる。

理由は第3章で説明済み

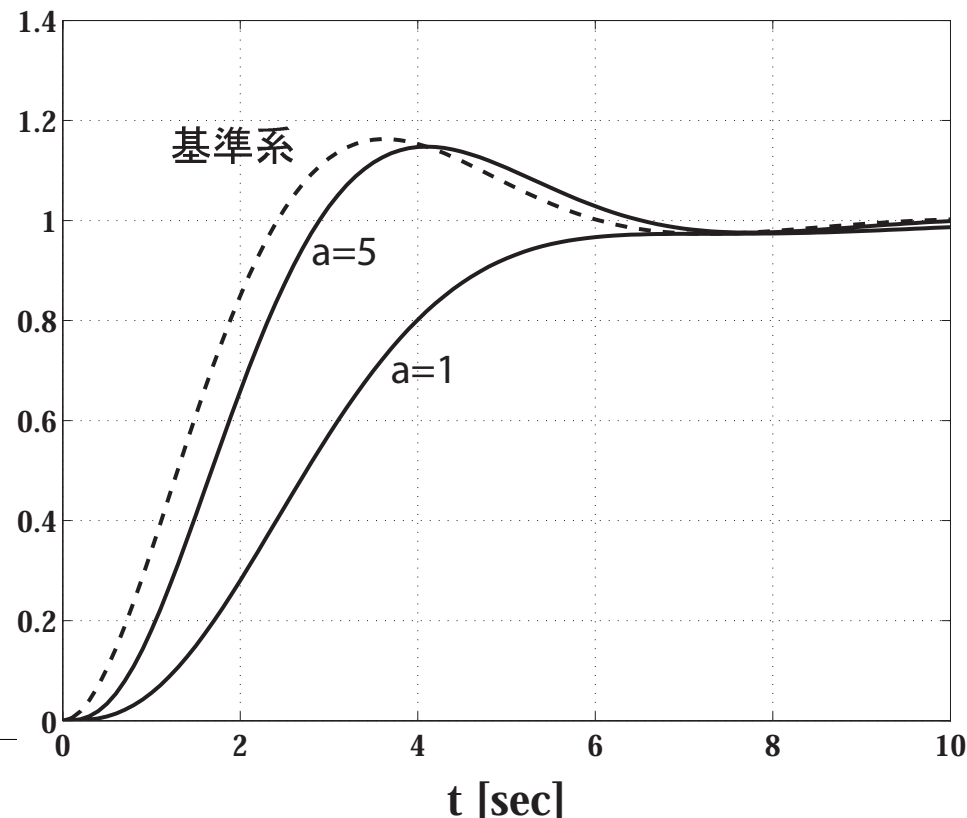




# 付加した極の影響 ( $p = -a\zeta\omega_n < 0$ )

$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{\left(1 + \frac{1}{a\zeta\omega_n}s\right)(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}, \quad a \geq 1 \quad (131)$$

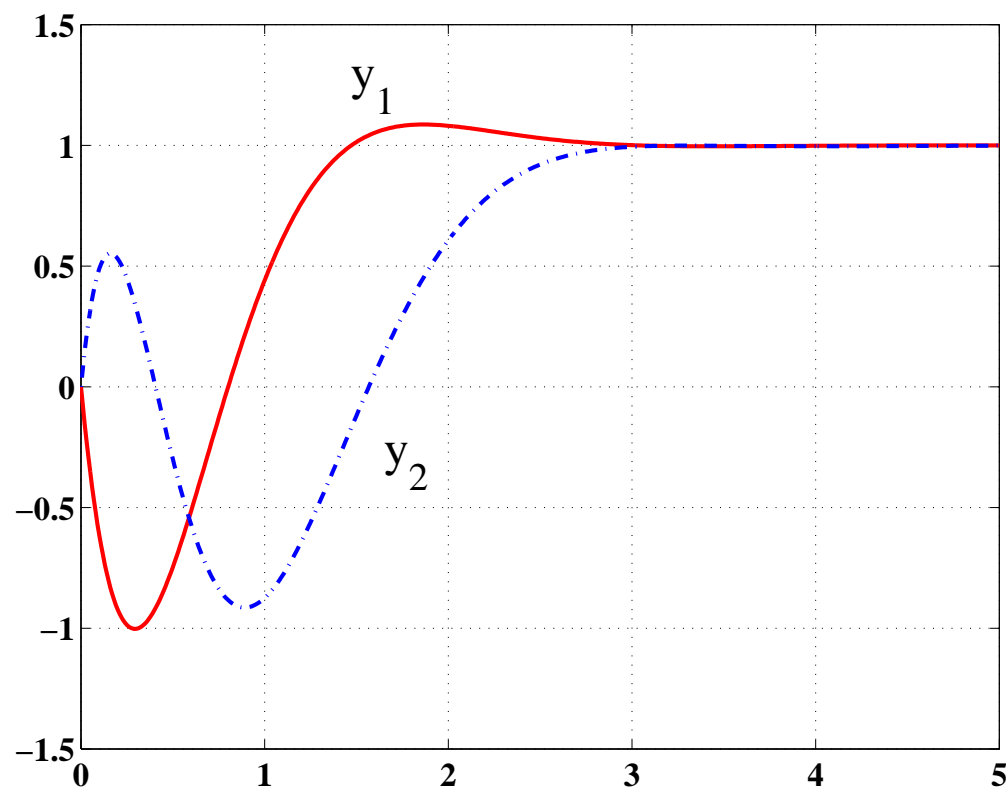
- 立ち上がり時間が長くなり， $a \rightarrow 1$  のときその影響が顕著
- これは，基準系の出力応答が付加された1次遅れ系を通過してはじめて出力端に到達できるからである。 (ord2\_pole.m)



# 行き過ぎ量と逆振れ

- A型逆振れ：出力が  $t = 0$  近傍で最終値と符号が逆である ( $y_1$ )
- B型逆振れ：出力が  $t > 0$  で最終値と符号が逆である ( $y_2$ )

$$G_1(s) = \frac{8(1-s)}{s^2 + 4s + 8}, \quad G_2(s) = \frac{8(2-s)(1-s)}{(s+2)(s^2 + 4s + 8)}$$



# 行き過ぎ量と逆振れの工学的意味合い

走行クレーンの例を考える。

- 行き過ぎ量：荷物が終点に止まる時、クレーンに衝突
- 逆振れ：始動するとき、荷物がクレーンに衝突
- いずれも許されない現象



steelhub.co.jp より

# 行き過ぎ量と逆振れが生じる条件

**定理 11** 安定伝達関数  $H(s)$  が  $H(0) \neq 0$  を満たすとする。このとき、 $H(s)$  が正の実零点をもつとそのステップ応答に逆振れが生じる。

**定理 12** 安定伝達関数

$$H(s) = K \frac{(s - z_1) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1) \cdots (s - p_n)} = \frac{N(s)}{M(s)}, \quad K > 0, n \geq m$$

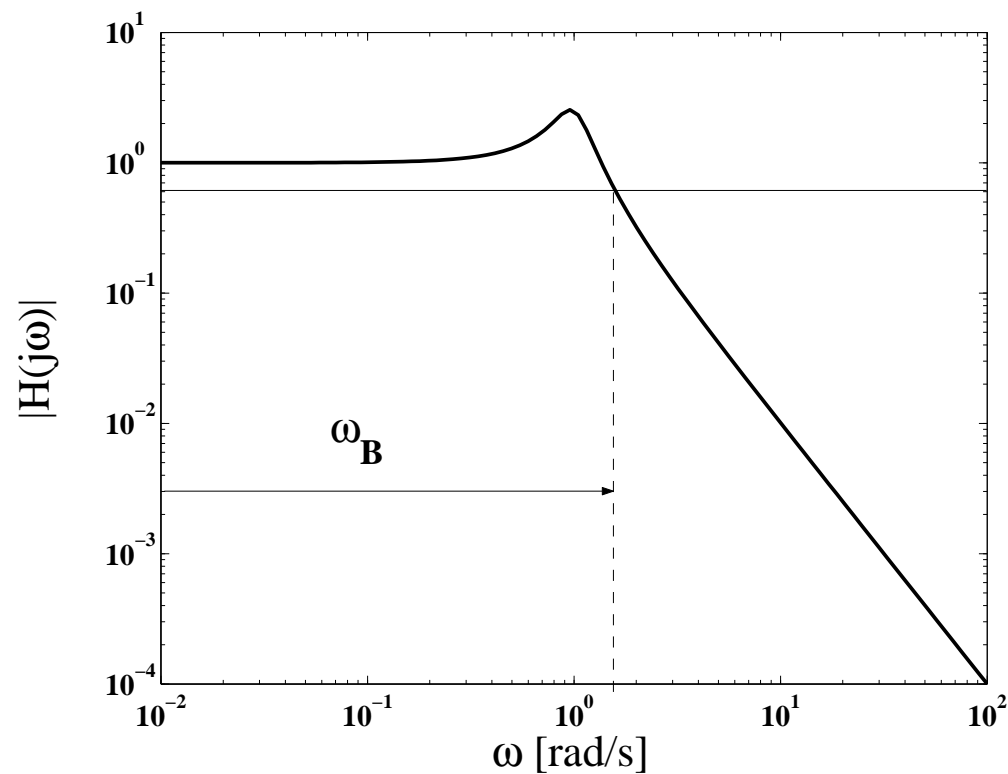
が奇数個の正の実零点を持つと、ステップ応答が  $A$  型逆振れを持つ。偶数個の正の実零点を持つと、ステップ応答が  $B$  型逆振れを持つ。

**定理 13** 単位フィードバック系においてループゲイン  $L(s) = P(s)K(s)$  が正の実極を持ち、積分器も一つ以上もつとする。このとき、出力のステップ応答に行き過ぎ量が生じる。



# バンド幅と速応性

目標値から出力までの閉ループ伝達関数  $H(s)$  の周波数特性は一般に下図のようになる。



- 低周波数においてゲインがほぼ1で、低域通過の特性を持つ。



# バンド幅と速応性

$$\hat{y}(j\omega) = H(j\omega)\hat{u}(j\omega) \quad (132)$$

- ゲインが 1 の周波数帯域では出力が入力によく一致する.
- 出力が入力に一致する帯域：入力のパワー  $|\hat{u}(j\omega)|^2$  が半分以下に低下するまでの周波数帯域

$$|H(j\omega)| \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (133)$$

- バンド幅：次式を満たす周波数  $\omega_B$

$$|H(j\omega_B)| = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx -3[\text{dB}] \quad (134)$$

明らかに、 $\omega \leq \omega_B$  ならば式 (133) が成り立つ.

- バンド幅は立ち上がり時間に反比例する： $t_r \sim \frac{1}{\omega_B}$



## 演習 4.9

ループゲインが

$$L(s) = \frac{k}{s(s+1)}$$

である単位フィードバック制御系について、応答速度とバンド幅の関係を調べたい。

- $r(t) = 1(t)$  のときの出力  $y(t)$  を計算し、 $k = 0.25, 1, 5$  についてプロットせよ。
- $r$  から  $y$  までの閉ループ伝達関数  $H_{yr}(s)$  の Bode 線図を  $k = 0.25, 1, 5$  についてプロットし、バンド幅  $\omega_B$  を求めよ。
- 以上に基づいて出力応答速度とバンド幅の関係を調べよ。

(hm49.m)



# フィードバック制御の理想と現実

## 理想

- 目標値追従

$$\hat{y}(s) = H(s)\hat{r}(s), \quad H(s) = 1$$

- 外乱抑制

$$\hat{y}(s) = G(s)\hat{d}(s), \quad G(s) = 0$$

## 実現可能なこと

- 目標値追従

$$|\hat{r}(j\omega)| \text{ が大きいとき, } H_{yr}(j\omega) \approx 1 \Rightarrow y(t) \approx r(t)$$

- 外乱抑制

$$|\hat{d}(j\omega)| \text{ が大きいとき, } |H_{yd}(j\omega)| \approx 0 \Rightarrow y(t) \approx 0$$

## 現実

- 目標値追従

$$H_{yr}(s) = \frac{PK}{1 + PK} \neq 1$$

- 外乱抑制

$$H_{yd}(s) = \frac{P}{1 + PK} \neq 0$$



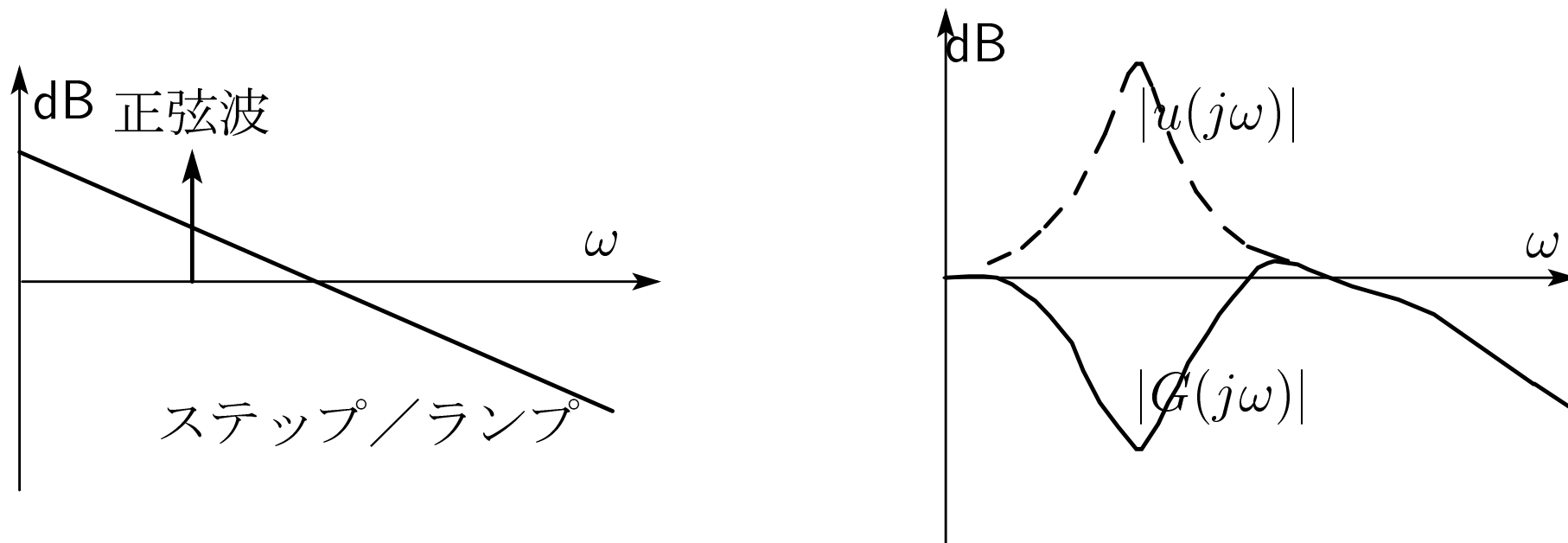


# 制御性能 vs 閉ループ系の周波数応答

- 外乱・目標値の特徴：低周波成分が多い，ゆっくりした動きに対応
- 外乱応答抑制の方策：外乱周波数ゲインが高い帯域で閉ループ伝達関数の周波数ゲインをできるだけ抑える

$$\hat{y}(j\omega) = H_{yd}(j\omega)\hat{d}(j\omega)$$

- ◆  $|\hat{d}(j\omega)|$  が大きい帯域で， $|H_{yd}(j\omega)|$  を小さくする
- ◆  $|\hat{d}(j\omega)|$  が小さい帯域で， $|H_{yd}(j\omega)|$  多少大きくても構わない



# 制御性能 vs 開ループ系の周波数応答

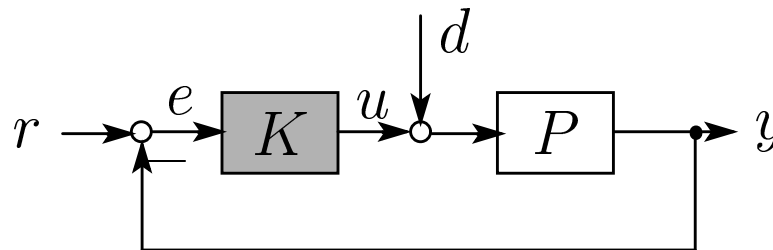
## ■ 入力外乱制御

$$\begin{aligned} |H_{yd}(j\omega)| = \left| \frac{P(j\omega)}{1 + P(j\omega)K(j\omega)} \right| \ll 1 &\Leftrightarrow |P(j\omega)K(j\omega)| \gg |P(j\omega)| \\ &\Leftrightarrow |K(j\omega)| \gg 1 \end{aligned} \quad (135)$$

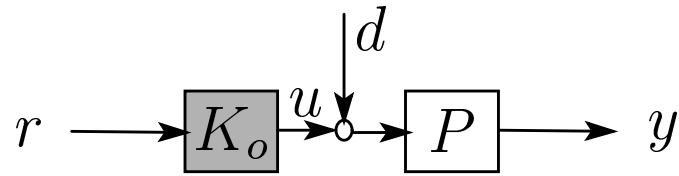
## ■ 目標値追従：追従誤差を抑えることと等価、 $H_{er}(s) = \frac{1}{1+PK}$

$$|H_{er}(j\omega)| = \left| \frac{1}{1 + P(j\omega)K(j\omega)} \right| \ll 1 \Leftrightarrow |P(j\omega)K(j\omega)| \gg 1 \quad (136)$$

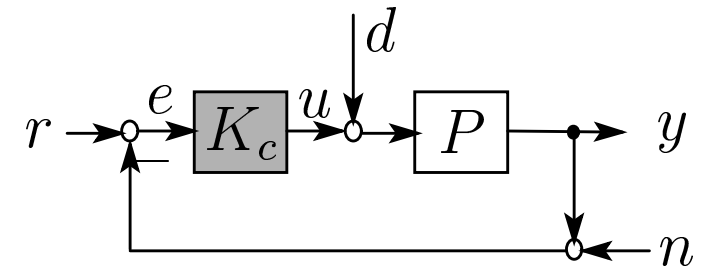
## ■ 基本的には、 $K(s)$ の低域ゲインを十分に高める必要がある



# 開ループ制御と閉ループ制御の性能比較



開ループ系



閉ループ系



# 目標値追従：開ループ制御

- 安定最小位相のプラント  $P(s)$  でその次数差が  $\gamma > 0$  場合，制御器

$$K_o(s) = P^{-1}(s) \frac{1}{(\epsilon s + 1)^\gamma}, \quad \epsilon > 0 \quad (137)$$

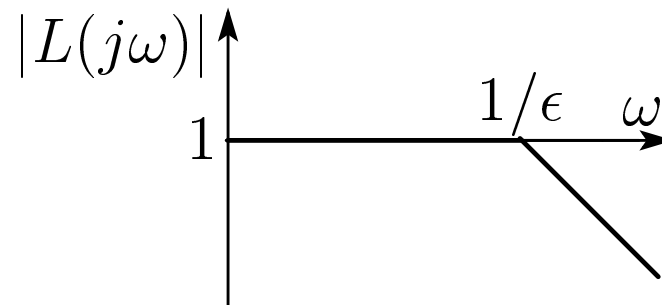
がプロパーで，実現可能．

- 開ループ系伝達関数：

$$L(s) = P(s)K_o(s) = \frac{1}{(\epsilon s + 1)^\gamma} \quad (138)$$

$\epsilon$  を十分小さくすれば，広い帯域にわたって目標値に追従できる．

- しかし，プラントが最小位相でないとき開ループ制御はできない．



# 目標値追従：閉ループ制御

- 閉ループ制御したときの伝達関数

$$H(s) = \frac{P(s)K_c(s)}{1 + P(s)K_c(s)} \quad (139)$$

- 同じ安定最小位相と次数差の仮定のもとで開ループ系と同じ伝達関数を実現するために、 $H(s) = 1/(\epsilon s + 1)^\gamma$  から逆算すると制御器はプロパーな伝達関数

$$K_c(s) = P^{-1}(s) \frac{1}{(\epsilon s + 1)^\gamma - 1}, \quad 0 < \epsilon \ll 1 \quad (140)$$

となる。

- ただし、この制御器  $K_c(s)$  はセンサ雑音  $n(t)$  の影響を受けやすい。



# 目標値追従：閉ループ制御

- 開ループ系入力  $u_o(t)$  と閉ループ系入力  $u_c(t)$  の比較

$$\hat{u}_o(s) = K_o(s)\hat{r}(s) = P^{-1}(s)\frac{1}{(\epsilon s + 1)^\gamma}\hat{r}(s)$$

$$\hat{u}_c(s) = \frac{K_c(s)}{1 + P(s)K_c(s)}[\hat{r}(s) - \hat{n}(s)] = P^{-1}(s)\frac{1}{(\epsilon s + 1)^\gamma}[\hat{r}(s) - \hat{n}(s)]$$

特に、 $P^{-1}(s)$  が高周波数域で高いゲインを持ち雑音を増幅してしまう。

- 出力応答：

$$\hat{y}(s) = H(s)[\hat{r}(s) - \hat{n}(s)] \quad (141)$$

雑音  $\hat{n}(s)$  が大きい周波数帯域ではよい追従性能を期待できない。

- 従って、安定最小位相系についてそのモデルが正確に分っている場合、開ループ制御が優れていると言える。



# 外乱制御：外乱が測定できない場合

- 開ループ系の場合：

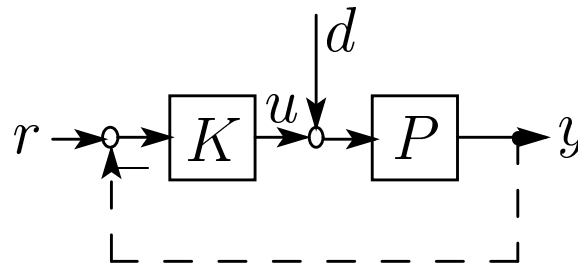
$$\hat{y}_o(s) = P(s)K(s)\hat{r}(s) + P(s)\hat{d}(s) \quad (142)$$

外乱によって出力偏差  $\hat{y}_{od}(s) = P(s)\hat{d}(s)$  が生じる。

- 閉ループ系の場合：

$$\hat{y}_c(s) = \frac{P(s)K(s)}{1 + P(s)K(s)}\hat{r}(s) + \frac{P(s)}{1 + P(s)K(s)}\hat{d}(s) \quad (143)$$

外乱による出力偏差は  $\hat{y}_{cd}(s) = P\hat{d}/(1 + PK)$  である。



# 外乱制御：外乱が測定できない場合

- 両者の出力間関係

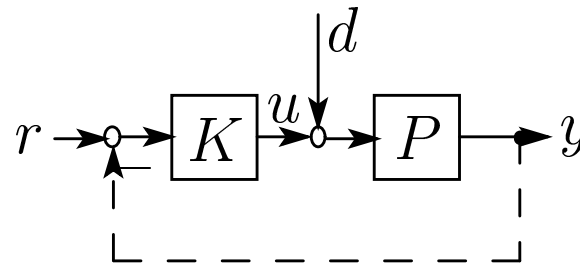
$$\hat{y}_{cd}(s) = \frac{1}{1 + P(s)K(s)} \hat{y}_{od}(s) \quad (144)$$

$K(s)$  のゲインを上げると、 $1/(1 + PK)$  のゲインは低減され、

$$\|y_{cd}\| \ll \|y_{od}\|$$

とすることができる。

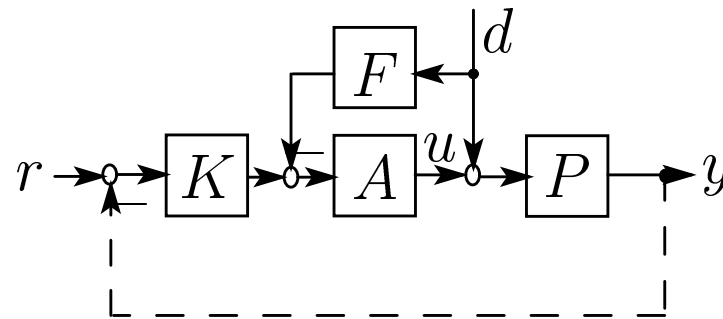
- 従って、閉ループ系の方が外乱の影響を受けにくい。
- 理由：フィードバック信号によって外乱情報が間接的に反映される





# 外乱制御：外乱が測定できる場合

- ポイント：外乱を相殺させる．  $A(s)$ ：アクチュエータ



- 開ループ系：

$$\hat{y}_{od}(s) = P(s)[1 - A(s)F(s)]\hat{d}(s) \quad (145)$$

- $A(s)$  の次数差が  $\gamma$  のとき，  $F(s) = A^{-1}(s)/(\epsilon s + 1)^\gamma$  とすれば

$$\hat{y}_{od}(s) = P(s) \left[ 1 - \frac{1}{(\epsilon s + 1)^\gamma} \right] \hat{d}(s) \quad (146)$$

$\epsilon \rightarrow 0$  とすると，広い周波数帯域にわたって外乱を除去できる．



# 外乱制御：外乱が測定できる場合

## ■ 閉ループ系

### ◆ 同じ外乱相殺を施すとき

$$\begin{aligned}\hat{y}_{cd}(s) &= \frac{P(s)}{1 + P(s)A(s)K(s)} [1 - A(s)F(s)] \hat{d}(s) \\ &= \frac{1}{1 + P(s)A(s)K(s)} \hat{y}_{od}(s)\end{aligned}\quad (147)$$

やはり閉ループ制御が優れている。

### ◆ しかし、外乱の相殺を行わず、フィードバックだけで外乱の影響を抑える場合

$$\hat{y}_{cd}(s) = \frac{P(s)}{1 + P(s)A(s)K(s)} \hat{d}(s)\quad (148)$$

広い帯域にわたってこの閉ループ伝達関数のゲインを低く抑えることはできないので、外乱抑制性能が劣る。



# 外乱の推定：外乱オブザーバ

- 一般に，外乱はセンサで測れない．出力などを用いて推定される．
- 入力外乱の場合

$$\hat{y}(s) = P(s)[\hat{u}(s) + \hat{d}(s)] \quad (149)$$

- ◆ 基本形： $P^{-1}(s)$  が安定プロパーの場合

$$\hat{d}(s) = P^{-1}(s)\hat{y}(s) - \hat{u}(s) \quad (150)$$

- ◆ 変形：フィルターを通す ( $P^{-1}(s)$  がプロパーでないとき)

$$\hat{d}(s) = \frac{1}{(\epsilon s + 1)^r} P^{-1}(s)\hat{y}(s) - \hat{u}(s) \quad (151)$$

$r$  は伝達関数  $P(s)$  の次数差



# 不確かさに対するロバスト性

- 演算増幅器の例では，フィードバック制御を施すと増幅ゲインの相対誤差は

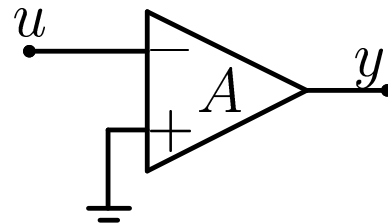
$$\frac{|y_{\max}| - |y_{\min}|}{|y_{\min}|} = \frac{10^4 u - 10^3 u}{10^3 u} = 900\% \quad (152)$$

から

$$\frac{9.989^3 - 9.881^3}{9.881^3} \approx 2.9\% \quad (153)$$

にまで低減でき，安定した増幅ゲインを実現できることを示した．

- 閉ループの方がプラント不確かさに対してロバストである．



# 第5章 システムの安定化

- 本章では、状態空間における安定化の基本的な方法を説明する。具体的には、状態を使った状態フィードバックの方法と状態フィードバックとオブザーバを用いた動的出力フィードバックの方法を述べる。
- 次の状態方程式で与えられる制御対象の安定化を考える。

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (154)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (155)$$

ただし、 $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$ ,  $y \in \mathbb{R}^p$  である。



# 第5章の内容

1. 状態フィードバックによる安定化
  - 1 入出力系の極配置
  - 多入出力系の極配置
  - 極選択の指針
2. オブザーバによる状態推定
3. 出力による安定化：状態フィードバックとオブザーバの併合系



# 状態フィードバック

- 仮定：状態  $x$  がすべて測定される
- 制御入力：

$$u = Fx, \quad F = \begin{bmatrix} f_{11} & \cdots & f_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{m1} & \cdots & f_{mn} \end{bmatrix} \quad (156)$$

この安定化方法は**状態フィードバック**と呼ばれ，係数行列  $F$  は**状態フィードバックゲイン**と呼ばれる．

- 閉ループ系の状態方程式：

$$\dot{x} = Ax + Bu = Ax + BFx \quad (157)$$

$$\Rightarrow \dot{x} = (A + BF)x \quad (158)$$

- 内部安定性は  $A + BF$  の安定性によって決まる．以降，これが可能となるための条件および  $F$  の設計方法について説明する．



# 極配置法

- **極配置法**：希望する閉ループ系の極を予め選択し，実際の閉ループ極がそうなるように状態フィードバックゲイン  $F$  を決める  
⇒ 最も分りやすい方法
- 極はシステム  $A$  行列の特性多項式の根であり，閉ループ極が指定されると，特性多項式も決まる。  
例えば， $n$ 次元のシステムでその極が  $\{p_1, \dots, p_n\}$  に指定されると，対応する特性多項式は次のようになる。

$$p(s) = (s - p_1) \cdots (s - p_n)$$

- 一方，閉ループ系の係数行列が  $A + BF$  であるからその特性多項式は与えられる。

$$p(s) = \det(sI - (A + BF))$$





# 極配置法

両者が等しくなければならないことより変数  $s$  に関する恒等式を得る

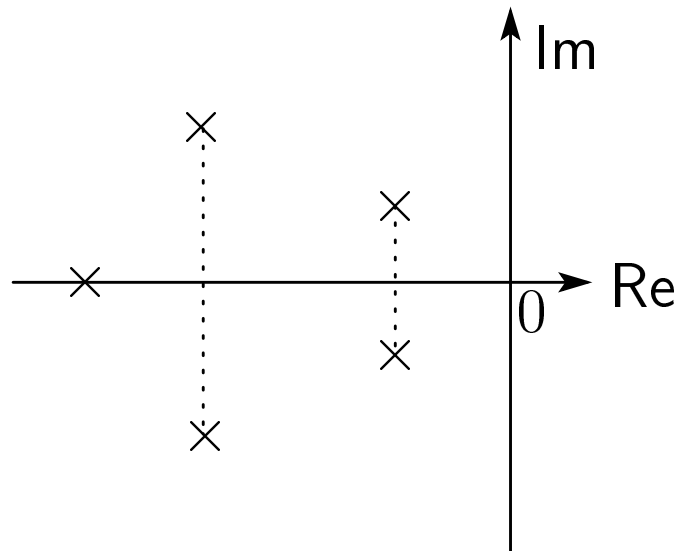
$$\det(sI - (A + BF)) \equiv (s - p_1) \cdots (s - p_n) \quad (159)$$

- 上式両辺係数の比較により  $F$  の要素に関する  $n$  個の連立方程式を得る.
- 1 入力系の場合,  $F$  は  $1 \times n$  の行ベクトルでその要素数が  $n$  なので, 解が存在するとき一意解をもつ.
- $m$  入力系の場合  $F$  は  $m \times n$  の行列であり, 要素数は  $m \times n$  個あるため, 解が存在してもその解は一意ではない.



# 極配置法

- 特性根の性質：複素根  $\lambda$  を持つときその共役  $\bar{\lambda}$  も根として持つ。しかも、重根の場合重複度まで含める。つまり、 $\lambda$  が  $r$  重根であるとき、 $\bar{\lambda}$  も  $r$  重根となる。
- よって、指定できる固有値集合は実軸に対して対称でなければならない。以降、指定する固有値をこのようなものに限定するとする。



# 極配置の条件

例：次の不可制御システムの極配置について考える。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$f = [f_1 \ f_2]$  とおくと,  $A + bf$  の特性多項式

$$\det \begin{bmatrix} s - (1 + f_1) & -(1 + f_2) \\ 0 & s + 2 \end{bmatrix} = (s - 1 - f_1)(s + 2)$$

固有値は  $(1 + f_1, -2)$  となる. 開ループ極  $-2$  が状態フィードバックで変えられない. つまり, このシステムの極を状態フィードバックで任意に設定できない.

**定理 14**  $A + BF$  の固有値を任意に設定できるために,  $(A, B)$  が可制御でなければならない.



# 定理 14 の証明

$(A, B)$  が不可制御であるとき  $\exists T$  s.t (補題 2)

$$A = T \begin{bmatrix} A_1 & A_{12} \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} T^{-1}, \quad B = T \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

任意の  $F$  について  $\bar{F} = FT = [\bar{F}_1 \ \bar{F}_2]$  とおけば

$$A + BF = T \begin{bmatrix} A_1 + B_1 \bar{F}_1 & A_{12} + B_1 \bar{F}_2 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} T^{-1}$$

$$\Rightarrow \det(sI - A - BF) = \det(sI - A_1 - B_1 \bar{F}_1) \det(sI - A_2)$$

$A_2$  の固有値は明らかに移動できない。



# 可制御正準系

補題 4 実現  $(A, b, c, 0)$  に対応する伝達関数 :

$$c(sI - A)^{-1}b = \frac{\beta_n s^{n-1} + \beta_{n-1} s^{n-2} + \cdots + \beta_2 s + \beta_1}{s^n + a_n s^{n-1} + \cdots + a_2 s + a_1} \quad (160)$$

$(A, b)$  が可制御であるとき, 次式を満たす変換行列  $T$  が存在する.

$$\bar{A} := T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & \cdots & -a_n \end{bmatrix} \quad (161)$$

$$\bar{b} := T^{-1}b = [0 \ 0 \ 0 \ \cdots \ 1]^T \quad (162)$$

$$\bar{c} := cT = [\beta_1 \ \beta_2 \ \cdots \ \beta_{n-1} \ \beta_n] \quad (163)$$



# 変換行列 $T$ の計算

- 可制御行列

$$C = [b \quad Ab \quad \cdots \quad A^{n-2}b \quad A^{n-1}b]$$

- 特性多項式の係数で行列を構成する

$$p(s) = s^n + a_n s^{n-1} + \cdots + a_2 s + a_1$$

$$U = \begin{bmatrix} a_2 & a_3 & \cdots & a_n & 1 \\ a_3 & a_4 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (164)$$

- 変換行列  $T$

$$T := CU$$



# 数値例

## 3次元のシステム

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

を可制御正準形に変換する.

### ■ 可制御行列を計算

$$\mathcal{C} = [b \quad Ab \quad A^2b] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ランク 3 を持つ. よって, 開ループ系が可制御である.



# 数値例

## ■ 開ループ系特性多項式

$$\det(sI - A) = s^3 - 3s^2 + 3s - 1$$

より  $a_1 = -1$ ,  $a_2 = 3$ ,  $a_3 = -3$  である.

## ■ 実現を可制御正準系に変換する変換行列

$$T = \mathcal{C} \begin{bmatrix} a_2 & a_3 & 1 \\ a_3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix}, \quad T^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$





# 数值例：MATLAB 確認

```
>> A=[1 1 -2;0 1 1;0 0 1]
```

```
A =
```

```
    1    1   -2  
    0    1    1  
    0    0    1
```

```
>> B=[1 0 1]'
```

```
B =
```

```
    1  
    0  
    1
```

```
>> C=[B A*B A^2*B] %可制御行列
```

```
C =
```

```
    1   -1   -2  
    0    1    2  
    1    1    1
```



# 数値例：MATLAB 確認

```
>> poly(A) %特性多項式の計算
```

```
ans =
```

```
    1    -3     3    -1
```

```
>> T=C*[3 -3 1;-3 1 0;1 0 0] %変換行列
```

```
T =
```

```
    4    -4     1  
   -1     1     0  
    1    -2     1
```

```
>> inv(T)*A*T
```

```
ans =
```

```
    0     1     0  
    0     0     1  
    1    -3     3
```



# 数值例：MATLAB 確認

```
>> inv(T)*B
```

```
ans =
```

```
0
```

```
0
```

```
1
```



# 1 入力系の極配置

定理 15 1 入力系

$$\dot{x} = Ax + bu \quad (165)$$

に対して、状態フィードバック  $u = fx$  ( $f^T \in \mathbb{R}^n$ ) で極指定できるための必要十分条件は、 $(A, b)$  が可制御であること。

■ 開ループ系特性多項式

$$\det(sI - A) = s^n + a_n s^{n-1} + \cdots + a_2 s + a_1$$

■ 指定する閉ループ系特性多項式

$$s^n + \gamma_n s^{n-1} + \cdots + \gamma_2 s + \gamma_1$$

■ 状態フィードバックゲイン

$$f = [a_1 - \gamma_1 \quad \cdots \quad a_n - \gamma_n] T^{-1} \quad (166)$$



# 定理 16 の証明

十分性を示す.  $(A, b)$  を可制御正準系  $(\bar{A}, \bar{b})$  に変換し,  
 $fT = \bar{f} = [\bar{f}_1 \cdots \bar{f}_n]$  とおく

$$\begin{aligned} T^{-1}(A + bf)T &= \bar{A} + \bar{b} \bar{f} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -(a_1 - \bar{f}_1) & -(a_2 - \bar{f}_2) & -(a_3 - \bar{f}_3) & \cdots & -(a_n - \bar{f}_n) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

そして, 等式  $\det(sI - T^{-1}XT) = \det(T^{-1}(sI - X)T) = \det(T^{-1})$   
 $\det(sI - X) \det(T) = \det(sI - X)$  を使えば, 次式が得られる.

$$\begin{aligned} \det(sI - (A + bf)) &= \det(sI - (\bar{A} + \bar{b}\bar{f})) \\ &= s^n + (a_n - \bar{f}_n)s^{n-1} + \cdots + (a_1 - \bar{f}_1) \quad (167) \end{aligned}$$



# 定理 16 の証明

$$\det(sI - (A + bf)) = s^n + (a_n - \bar{f}_n)s^{n-1} + \cdots + (a_1 - \bar{f}_1)$$

指定する閉ループ系特性多項式を

$$s^n + \gamma_n s^{n-1} + \cdots + \gamma_2 s + \gamma_1$$

とすると、係数を比較することにより

$$\bar{f} = [a_1 - \gamma_1 \quad \cdots \quad a_n - \gamma_n]$$

が得られる。よって、状態フィードバックゲインは

$$f = \bar{f}T^{-1} = [a_1 - \gamma_1 \quad \cdots \quad a_n - \gamma_n]T^{-1} \quad (168)$$

となる。



# 1 自由度振動系の設計例

- 1 自由度振動系が可制御

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{M} & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix}$$

- $A + bf$  の固有値を  $(p_1, p_2)$  に設定する  $f = [f_1 \ f_2]$  が存在するか
- 固有値の定義から恒等式が成立つ。

$$\begin{aligned} \det(sI - (A + bf)) &= (s - p_1)(s - p_2) \\ \Rightarrow s^2 - \frac{f_2}{M}s + \left(\frac{K}{M} - \frac{f_1}{M}\right) &= s^2 - (p_1 + p_2)s + p_1p_2 \end{aligned}$$

- 両辺各項の係数を比較すると、連立方程式と一意解を得る。

$$\begin{aligned} \frac{f_2}{M} &= p_1 + p_2, \quad \frac{K}{M} - \frac{f_1}{M} = p_1p_2 \\ \Rightarrow f &= [K - Mp_1p_2, \ M(p_1 + p_2)] \end{aligned}$$



## 演習 5.6

線形システム

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = [1, 0]x$$

- (a) すべての状態が測定できるとき, 状態フィードバック  $u = fx$  によって, 閉ループ系の極を  $-1, -2$  に設定したい. フィードバックゲイン  $f$  を求めよ.

【解答】 (a) 状態フィードバック系の特性多項式

$$\begin{aligned} A + bf &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [f_1 \quad f_2] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ f_1 & f_2 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow |sI - (A + bf)| &= \begin{vmatrix} s & -1 \\ -f_1 & s - f_2 \end{vmatrix} = s^2 - f_2s - f_1 \\ &= (s + 1)(s + 2) = s^2 + 3s + 2 \\ \Rightarrow f_1 &= -2, \quad f_2 = -3 \end{aligned}$$





# 数値例

閉ループ極が  $-2, -1 \pm j1$  となるように状態フィードバックを設計せよ.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

## ■ 開ループ系特性多項式

$$\det(sI - A) = s^3 - 3s^2 + 3s - 1$$

より  $a_1 = -1, a_2 = 3, a_3 = -3$  である.

## ■ 変換行列 (前の例で計算済み)

$$T = C \begin{bmatrix} a_2 & a_3 & 1 \\ a_3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$



# 数値例

- 指定された閉ループ系の特性多項式

$$(s + 2)(s + 1 - j)(s + 1 + j) = s^3 + 4s^2 + 6s + 4$$

であり,  $\gamma_1 = 4$ ,  $\gamma_2 = 6$ ,  $\gamma_3 = 4$  となる.

- 状態フィードバックゲイン

(p\_assign.m)

$$f = [a_1 - \gamma_1 \quad a_2 - \gamma_2 \quad a_3 - \gamma_3]T^{-1} = [-15 \quad -47 \quad 8]$$



# 数值例：MATLAB 確認

```
>> poly(A)
```

```
ans =
```

```
1 -3 3 -1
```

```
>> poly([-2 -1+i -1-i])
```

```
ans =
```

```
1 4 6 4
```

```
>> f=[-1-4 3-6 -3-4]*inv(T)
```

```
f =
```

```
-15 -47 8
```



# 多入力系の極配置

定理 16  $m$  入力系

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

に対して、 $A + BF$  の固有値を任意に設定できる状態フィードバックゲイン  $F \in \mathbb{R}^{m \times n}$  が存在するための必要十分条件は、 $(A, B)$  が可制御であることである。



# 設計方法

- ランダムに行列  $K$  を決める
- 入力変換

$$u = Kx + gv$$

を施すことにより，システムを可制御な 1 入力系に変換する．

$$\dot{x} = (A + BK)x + bv$$

- 次に，この 1 入力系の極配置を  $v = fx$  で実現させる．
- 最終的に，

$$F = K + gf \tag{169}$$

が所望のフィードバックゲインを与える．

- ゲインの設計に自由度あり



# 極選択の指針

- 収束速度の保証：極を虚軸から一定以上の距離を離す

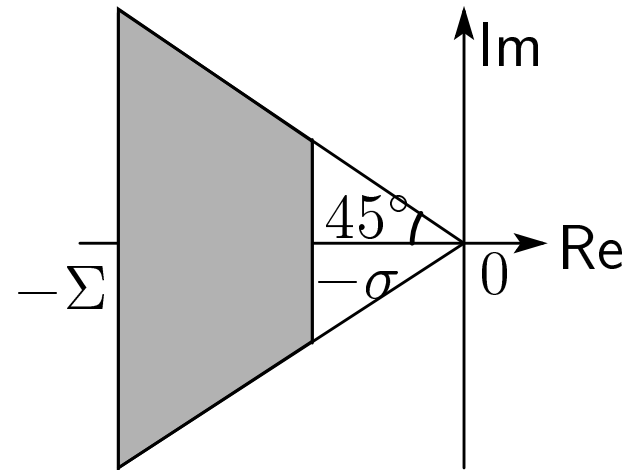
$$\Re(p_i) \leq -\sigma, \quad \forall i$$

- ◆ 過渡応答の振幅 (包絡線) はおよそ  $e^{-\sigma t}$  になる.
  - ◆  $e^{-3} \approx 5\%$  であるので, 整定時間  $t_s$  は  $\sigma t_s \approx 3$  を満たす.
  - ◆  $t_s$  が与えられれば, パラメータ  $\sigma$  は  $\sigma \approx 3/t_s$  に決まる.
- 振動の回数の抑制：虚部を実部よりも小さくとる.
    - ◆ 振動周波数は  $\Im(p)$  で周期が  $2\pi/\Im(p)$  となるから,  $\Re(p) \geq \Im(p)$  のとき一周期で振幅が  $e^{\Re(p) \cdot 2\pi/\Im(p)} \leq e^{-2\pi} = 0.19\%$  に減少するからである.
  - 制御入力の飽和回避
    - ◆ 極を原点から離しすぎてはいけない.



# 極選択の指針

- 以上を総合すると、指定できる極の存在域は次の図の影の部分となる。



- ただし、虚部と実部の比  $\Im(p)/\Re(p)$  を小さくしすぎると、減衰係数が大きすぎて、バンド幅が下がり、立上り時間は長くなってしまふ。従って、立上り時間  $t_r$  も短くしたい場合、この比を1近くにすることがある。



## 2 慣性系 (モータ駆動系) の例

### ■ パラメータ

$J_M$ : モータの慣性モーメント	$k$ : 回転軸のバネ定数
$J_L$ : 負荷の慣性モーメント	$D$ : モータ側の粘性摩擦係数
$D_L$ : 負荷側の粘性摩擦係数	$\omega_M$ : モータ回転速度
$\omega_L$ : 負荷回転速度	$\theta_s$ : 回転軸のねじれ角
$u$ : モータトルク	測定出力 : $\omega_M$

### ■ モデル : 状態ベクトル $x = [\omega_L \ \theta_s \ \omega_M]^T$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -\frac{D_L}{J_L} & \frac{k}{J_L} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{k}{J_M} & -\frac{D_M}{J_M} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \frac{1}{J_L} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} d + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{J_M} \end{bmatrix} u \quad (170)$$

$$y = [0 \ 0 \ 1]x \quad (171)$$

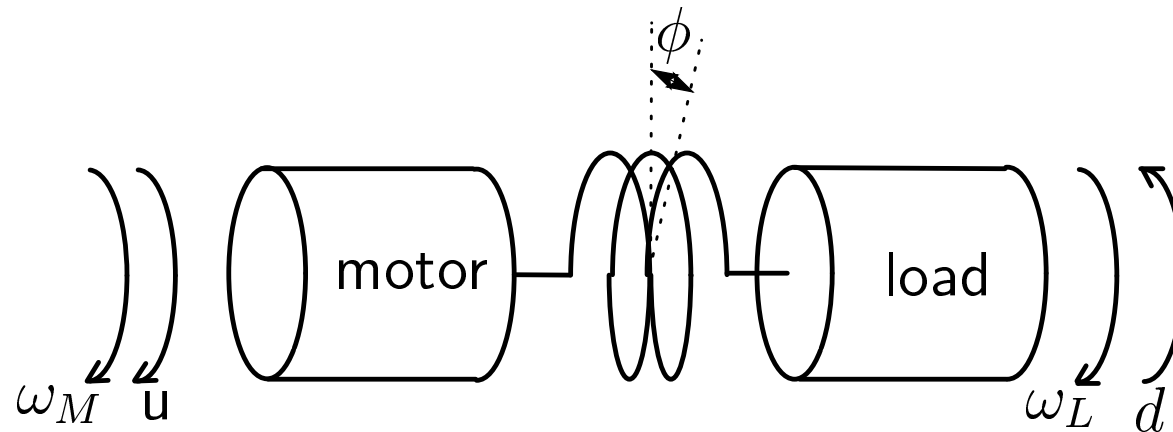




## 2 慣性系 (モータ駆動系) の例

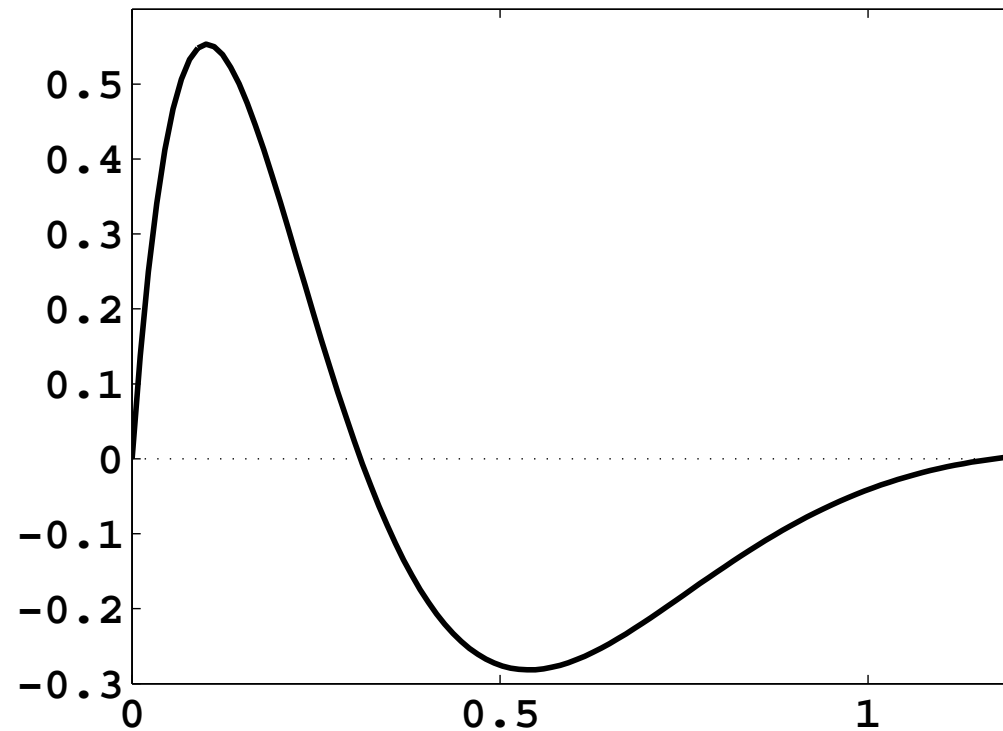
- 制御仕様：  
一定速度で回転している負荷にトルク外乱  $d$  が印加されたとき，負荷の回転速度  $\omega_L$  が変化しないように制御したい。
- パラメータ：  
 $J_M = J_L = 1, D_M = D_L = 0, k = 100.$
- 状態フィードバックで閉ループ極を  $-4 \pm j4, -8$  に配置したい。
- 状態フィードバックゲイン

$$F = [13.4 \quad 104 \quad -16]$$



## 2 慣性系 (モータ駆動系) の例

- 単位インパルストルク外乱に関する出力応答



(motor\_place.m)



# オブザーバ

- 状態フィードバックを使うには，すべての状態をセンサ (通常は高価なハードウェアである) で測定しなければならないから，贅沢な制御法と言えよう.
- さらに，無数の状態を有する柔軟構造物のようにすべての状態をセンサで測れない場合もある.
- 従って，通常測定出力と制御入力を用いて何らかのソフトウェアで状態の推定値を算出する方法がとられる.
- 状態を推定するアルゴリズムは**オブザーバ**と呼ばれる.



# 同一次元オブザーバ

$$\dot{\bar{x}} = A\bar{x} + Bu + L(C\bar{x} - y) \quad (172)$$

- 同一次元オブザーバの基本原理
  - ◆ 制御対象の動特性を利用してソフトウェアで状態推定値  $\bar{x}$  を作りだす (右辺最初の二つの項)
  - ◆ オブザーバの出力  $C\bar{x}$  と既知の制御対象の出力  $y$  の誤差で状態推定値を修正する (右辺第3項)
- 行列  $L$  は**オブザーバゲイン**と呼ばれる
- 実装時の方程式

$$\dot{\bar{x}} = (A + LC)\bar{x} + Bu - Ly \quad (173)$$



# 状態推定ができるための条件

- 推定誤差

$$e = \bar{x} - x \quad (174)$$

$\bar{x} \rightarrow x \Leftrightarrow e \rightarrow 0$  なので、推定誤差の収束だけを考えればよい。

- $e(t)$  の動特性：

$$\begin{aligned} \dot{e} &= \dot{\bar{x}} - \dot{x} \\ &= A\bar{x} + Bu + L(C\bar{x} - Cx) - (Ax + Bu) \\ &= (A + LC)e \end{aligned} \quad (175)$$

- 任意の初期誤差  $e(0)$  に対して  $e(t) \rightarrow 0$  となるために、 $(A + LC)$  の安定性が必要かつ十分である。



# 状態推定ができるための条件

**定理 17** 同一次元オブザーバにおいて、 $A + LC$  の固有値を任意に指定できるオブザーバゲイン  $L \in \mathbb{R}^{n \times p}$  が存在するための必要十分条件は、 $(C, A)$  が可観測であることである。

- $(A + LC)$  の固有値はオブザーバ極という。
- $(A + LC)$  と  $(A + LC)^T = A^T + C^T L^T$  が同じ固有値をもつこと、および  $(C, A)$  の可観測性と  $(A^T, C^T)$  の可制御性が等価であることから、明らか。

状態フィードバックと同じように、オブザーバの設計においても極配置法が一番分りやすいので、この方法について説明する。



# オブザーバゲインの設計

- オブザーバ極： $\{r_1, \dots, r_n\}$  に配置する
- オブザーバの特性多項式

$$\det(sI - (A + LC)) \equiv (s - r_1) \cdots (s - r_n) \quad (176)$$

両辺の係数を比較すると  $L$  の要素に関する  $n$  個の連立方程式を得る。

- 1 出力系の場合，連立方程式を解くことで解を計算できる。
- 多出力系の場合

$$\det(sI - (A + LC)) = \det(sI - (A^T + C^T L^T)) \quad (177)$$

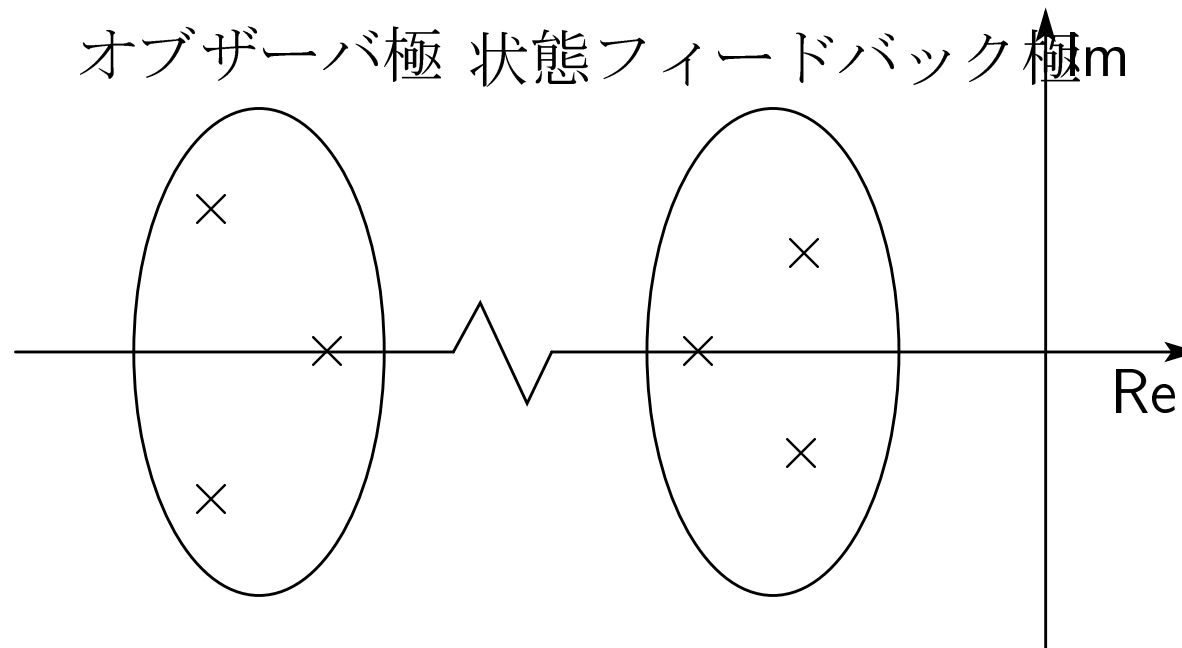
に基づいて，

- ◆  $\bar{A} = A^T$ ， $\bar{B} = C^T$ ， $\bar{F} = L^T$  とおいて状態フィードバックゲイン設計のアルゴリズムで  $\bar{F}$  を計算
- ◆  $L = \bar{F}^T$  と置けばオブザーバゲインになる。



# オブザーバ極の選定

- オブザーバの目的は状態を推定して状態フィードバックを実現させることにある。
- このためには、状態推定値の真値への収束は十分に速くしなければならない。つまり、**オブザーバの極は状態フィードバック系の極よりも十分に虚軸から離れなければならない。**
- 通常オブザーバ極の大きさは状態フィードバック系の極の2～5倍にする。これはオブザーバ設計の指針である。





## 演習 5.6(b)

線形システム

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = [1, 0]x$$

が与えられたとする.

- (b) 出力だけが測定されるとき, 同一次元オブザーバを使って状態  $x(t)$  を推定したい. オブザーバ極が  $-4, -5$  となるようにオブザーバを設計せよ.



## 演習 5.6(b) の解答

(b) オブザーバの特性多項式

$$\begin{aligned} A + lc &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} [1 \ 0] = \begin{bmatrix} l_1 & 1 \\ l_2 & 0 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow |sI - (A + lc)| &= \begin{vmatrix} s - l_1 & -1 \\ -l_2 & s \end{vmatrix} = s^2 - l_1s - l_2 \\ &= (s + 4)(s + 5) = s^2 + 9s + 20 \\ \Rightarrow l_1 &= -9, \quad l_2 = -20 \end{aligned}$$

従って、制御入力は以下のように構成される。

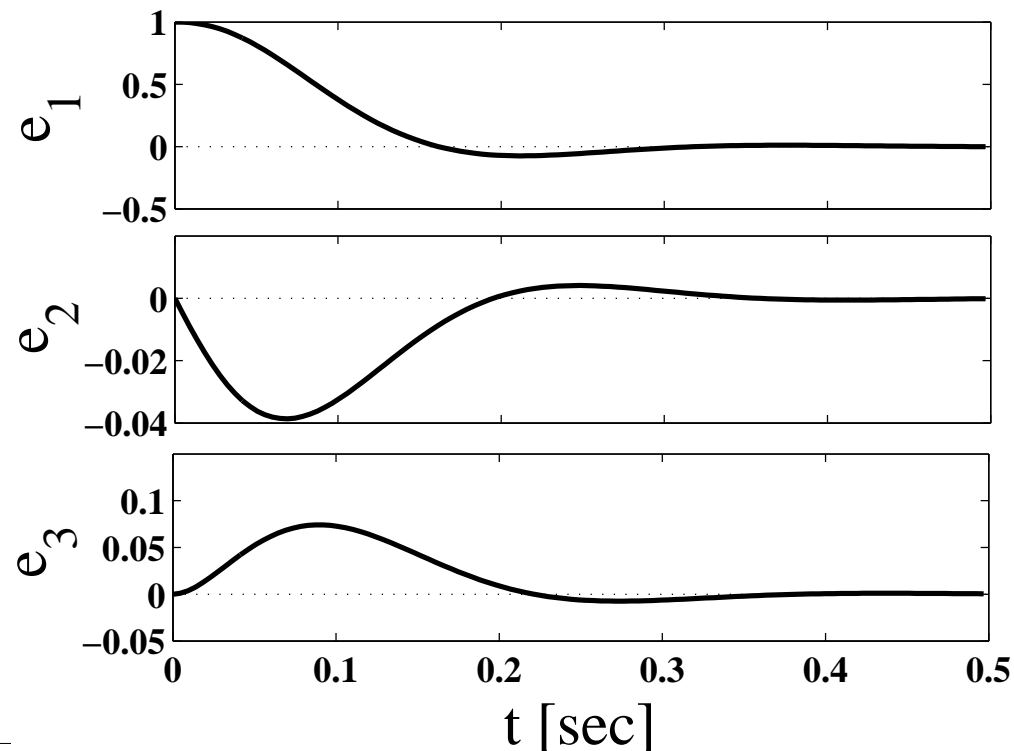
$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= (A + lc)\bar{x} + bu - ly = \begin{bmatrix} -9 & 1 \\ -20 & 0 \end{bmatrix} \bar{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 9 \\ 20 \end{bmatrix} y \\ u &= f\bar{x} = -[2 \ 3]\bar{x} \end{aligned}$$

(hm56.m を実行してから, hm56\_obsf.mdl を実行)



## 2 慣性系の例

- 負荷にセンサをつけることは困難なので、通常モータ軸の角速度  $\omega_M$  を測定する.  $\omega_M$  を用いたオブザーバを設計する.
- オブザーバ極:  $-12 \pm j19, -24$
- 求めたオブザーバゲイン  $L = [-73.2 \quad 8.8 \quad -48]$
- 初期状態  $x(0) = [1 \ 0 \ 0]^T$  に関する推定誤差の応答 (motor\_place.m)  
 $e_1 \sim e_3$  はそれぞれ  $\omega_L, \theta_s, \omega_M$  の推定誤差である.



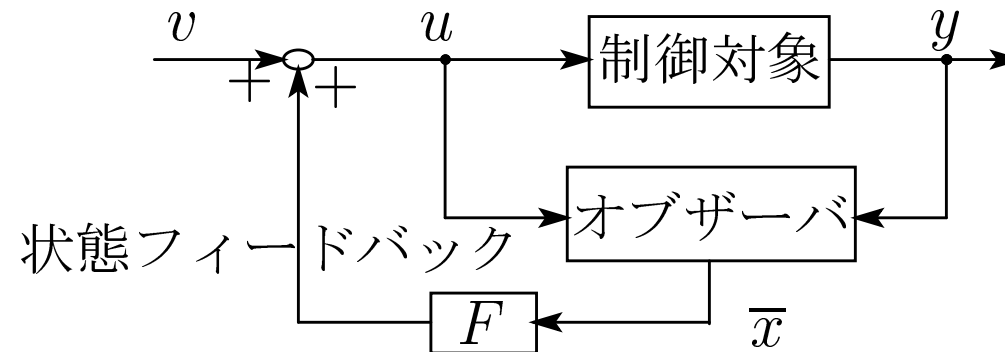
# 併合系

- オブザーバで推定した状態を用いて状態フィードバック

$$u = F\bar{x} + v \quad (178)$$

を施す。ただし、信号  $v$  は外部からの入力 (例えば、目標値など) を表す。

- **併合系**：状態フィードバックとオブザーバを使った制御構成



# 併合系

- 推定誤差が  $e = \bar{x} - x$  であるので,  $(x, \bar{x})$  の代わりに閉ループ系の状態を  $(x, e)$  と選ぶことができる.
- $u = F\bar{x} + v$  を  $\dot{x} = Ax + Bu$  に代入すると

$$\dot{x} = Ax + BF\bar{x} + Bv = (A + BF)x + BFe + Bv$$

これを式  $\dot{e} = (A + LC)e$  とまとめると, 閉ループ系が得られる.

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + BF & BF \\ 0 & A + LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} v \quad (179)$$

- 閉ループ系の極 = 状態フィードバックとオブザーバの極の和集合

$$\begin{aligned} & \det \begin{bmatrix} sI - (A + BF) & -BF \\ 0 & sI - (A + LC) \end{bmatrix} \\ &= \det(sI - (A + BF)) \det(sI - (A + LC)) \end{aligned}$$



# 分離原理

## ■ 分離原理：

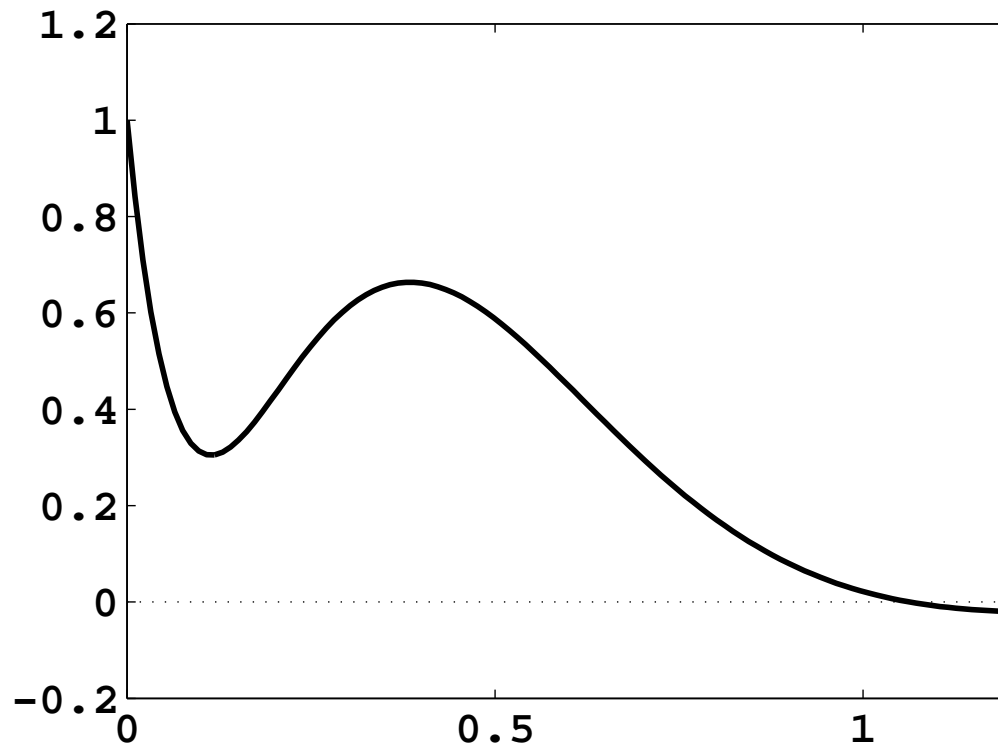
状態フィードバックとオブザーバがそれぞれ安定となるように設計されていれば，全システムも安定になる．つまり，状態フィードバックの設計とオブザーバの設計は独立しており，別々に行なえる．

- ただし，分離原理が成立つとは言え，状態フィードバックとオブザーバの過渡応答を速くするだけで目標値や外乱に対する応答もよくなるとの保証はない．なぜなら，過渡応答は零点にも依存するからである．
- 例えば，目標値応答の場合，プラントと制御器の伝達零点は閉ループ伝達関数の伝達零点になる．従って，プラントに虚軸に近い安定／不安定零点をもつと，閉ループ極を大きくしすぎると出力応答の立ち上がりが急激になるから，かえって大きな行き過ぎ量／逆振れをもたらしてしまう．
- 制御器の極でプラントの零点を相殺させればよいと思われるかもしれないが，外乱応答などの観点から虚軸に近い極零点相殺は許されない．



## 2 慣性系の例

- 2 慣性系に対し，前の例で設計した状態フィードバックとオブザーバーを併合した閉ループ系において，単位インパルスのトルク外乱と加えたときの出力応答下図のようになる. (motor\_place.m)



# 動的出力フィードバック制御器

- 状態フィードバック

$$u = F\bar{x}$$

をオブザーバ

$$\dot{\bar{x}} = A\bar{x} + Bu + L(C\bar{x} - y) \quad (180)$$

に代入すると

$$\dot{\bar{x}} = (A + BF + LC)\bar{x} - Ly$$

- 故に,  $y \mapsto u$  の動的出力フィードバック制御器は

$$K(s) = \left[ \begin{array}{c|c} A + BF + LC & -L \\ \hline F & 0 \end{array} \right] \quad (181)$$

- これは状態フィードバックとオブザーバをまとめた動的出力フィードバック制御器である.





# 第6章 制御器のパラメータ化

- 今までの制御理論は，古典制御・現代制御問わず，プラントを制御する**一つの制御器**をいかに設計するかに力点を置いてきた。
- システム設計に際し，何らかの意味で制御性能を最適化することが望まれる．しかし，閉ループ系の安定性保証は最適化の足枷になっている。
- 疑問：
  - ◆ プラントを安定化できる制御器のすべてを自由なパラメータを持つ一つの公式で表せるか
  - ◆ もしこれが可能ならば，性能の最適化問題はこの自由パラメータを最適化することに集約され，大幅に単純化されることが期待できる。
- 本章では，これが可能であることを示す．この安定化制御器のパラメータ化は現代制御理論の重要な成果の一つである。
- さらに，閉ループ系の伝達行列構造や状態空間構造，並びに2自由度制御系の構造と特徴についても調べる。



# 第6章の内容

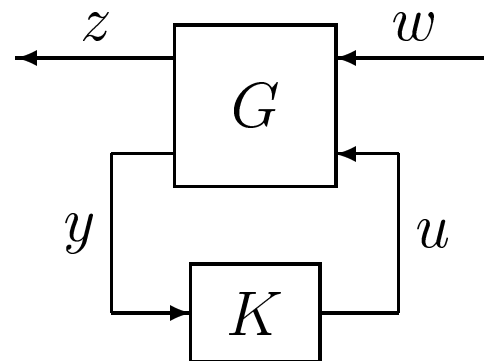
1. 一般化フィードバック系の導入
  - 制御性能を評価するための評価関数
2. 制御器のパラメータ化
  - 安定な制御対象の場合
  - 一般的な場合
3. 2自由度系の構造解析



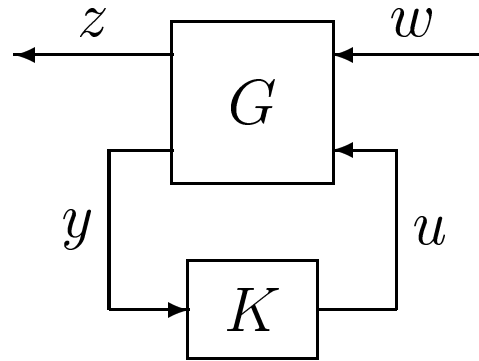
# 一般化フィードバック構成の導入

## —性能評価のために—

- 2 慣性系問題の制御仕様
  - ◆ 負荷トルク外乱  $d$  が負荷の回転速度  $\omega_L$  に与える影響を抑えながら、 $\omega_L$  を目標値  $r$  に追従させる
- 制御したい出力は負荷の回転速度誤差  $r - \omega_L$  であり、測定信号  $\omega_M$  とは異なっている。
- トルク外乱  $d$  もプラントへの制御入力  $u$  とは違った入力である。
- 直接外乱 (もしくは目標値) 応答を評価できる設計を行うために、新しい入出力表現法が必要となる。



# 一般化フィードバック構成の導入

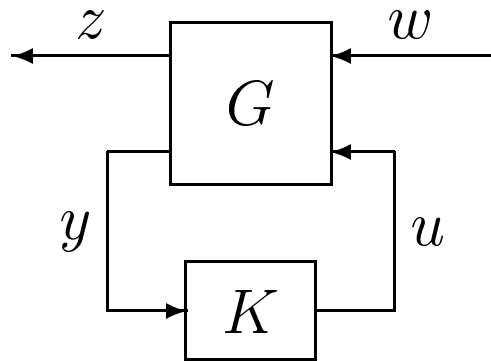


- $G$  : プラントと評価仕様 (評価量, 重み) をすべて含めた一般化プラント
- $K$  : 制御器
- 評価出力  $z$  : 制御性能などを評価するための出力ベクトル
- 測定出力  $y$  : 制御器の入力 (例えば, センサで測定する出力や追従誤差) ベクトル
- 外乱  $w$  : 制御性能を評価するための外部入力ベクトル
- 制御入力  $u$  : アクチュエータに加える指令ベクトル



# 一般化フィードバック構成の導入

- $G(s)$  の入出力関係 :



$$\begin{bmatrix} \hat{z}(s) \\ \hat{y}(s) \end{bmatrix} = G(s) \begin{bmatrix} \hat{w}(s) \\ \hat{u}(s) \end{bmatrix} \quad (182)$$

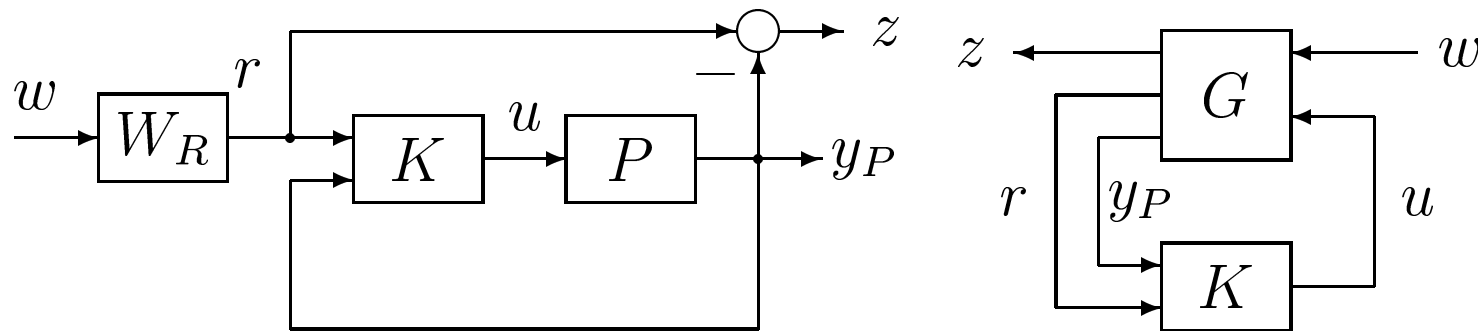
$$\hat{u}(s) = K(s)\hat{y}(s) \quad (183)$$

- ただし、一般化フィードバック構成における測定出力とは、制御器  $K$  の入力であり、必ずしもプラントの出力そのものとは限らない。
- 例えば、1自由度系の目標値追従制御の場合、制御器への入力は追従誤差  $r - y_P$  ( $y_P$  はプラントの出力) であり、ここでいう測定出力  $y$  となる。
- また、2自由度系の場合測定出力は信号ベクトル  $[r \ y_P]$  となる。



# 例：2自由度制御系

- 目標値のモデル： $W_R(s)$
- 評価出力：制御目的は追従誤差をなるべく小さくすることであるから，追従誤差  $z = r - y$  とする。
- 外乱：目標値モデルのインパルス入力  $w$
- 測定出力： $(r, y_P)$
- 入出力関係



# 例：2慣性系負荷トルク外乱制御問題

■ モデル：  $x = [\omega_L \ \theta_s \ \omega_M]$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -\frac{D_L}{J_L} & \frac{k}{J_L} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{k}{J_M} & -\frac{D_M}{J_M} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \frac{1}{J_L} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} d + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{J_M} \end{bmatrix} u$$
$$y_P = [0 \ 0 \ 1]x$$

- 評価出力：負荷の速度追従誤差  $z = r - x_1 = [-1 \ 0 \ 0]x + r$
- 測定出力：  $y = [r \ y_P]$  (2自由度制御)
- 外乱：  $w = [r \ d]$
- $P(s)$ ：  $[w \ u]$  から  $[z \ y]$  までの一般化プラントの伝達行列

$$\begin{bmatrix} \hat{z} \\ \hat{y} \end{bmatrix} = P(s) \begin{bmatrix} \hat{w} \\ \hat{u} \end{bmatrix}$$



# 例：2慣性系負荷トルク外乱制御問題

- $P(s)$  の求め方：まず，次のように係数行列に記号を振る．

$$\dot{x} = Ax + b_{12}d + B_2u, \quad y_P = c_{21}x$$

すると

$$\dot{x} = Ax + [0 \ b_{12}] \begin{bmatrix} r \\ d \end{bmatrix} + B_2u = Ax + B_1w + B_2u$$

$$z = [-1 \ 0 \ 0]x + r = C_1x + [1 \ 0] \begin{bmatrix} r \\ d \end{bmatrix} = C_1x + D_{11}w$$

$$\begin{aligned} y &= \begin{bmatrix} r \\ y_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ y_P \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ c_{21} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ d \end{bmatrix} \\ &= C_2x + D_{21}w \end{aligned}$$

が  $P(s)$  の状態方程式となる．





## 例：2慣性系負荷トルク外乱制御問題

- さらに，目標値の動特性を考えるために，目標値のモデルを  $W_R(s)$ ，トルク外乱のモデルを  $W_D(s)$  とおく．
- これらの入出力関係

$$\hat{r}(s) = W_R(s)\hat{w}_1(s), \quad \hat{d}(s) = W_D(s)\hat{w}_2(s) \quad (184)$$

を代入すると，最終的  $[w_1 \ w_2 \ u] \mapsto [z \ y]$  の一般化プラント

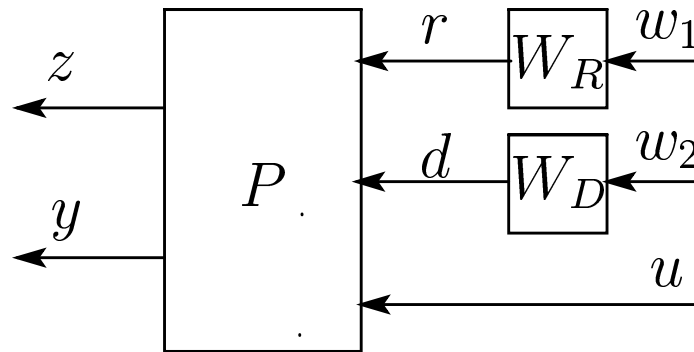
$$G(s) = P(s) \begin{bmatrix} W_R(s) & & \\ & W_D(s) & \\ & & 1 \end{bmatrix} \quad (185)$$

が得られる．



# 例：2 慣性系負荷トルク外乱制御問題

- 一般化プラントは，もとのプラントのみならず，信号間の結合関係や信号のモデル(重み)も含んだ拡大されたプラントとなっている。

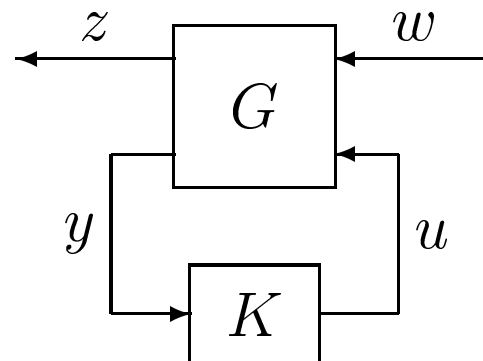


# 一般化プラント $G(s)$ の状態方程式

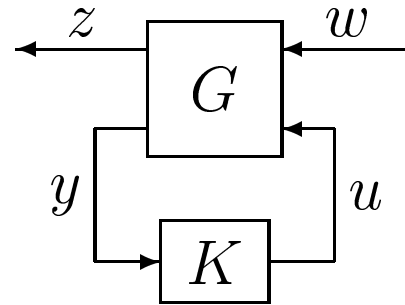
$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ z \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \\ u \end{bmatrix} \quad (186)$$

また、一般化プラントの伝達行列を入力  $\begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix}$  と出力  $\begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix}$  の次元に応じて次のように分割しておく。

$$G(s) = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \quad (187)$$



# 閉ループ伝達行列



- 外乱  $w$  から評価出力  $z$  までの閉ループ伝達行列

$$H_{zw}(s) = G_{11} + G_{12}K(I - G_{22}K)^{-1}G_{21} \quad (188)$$

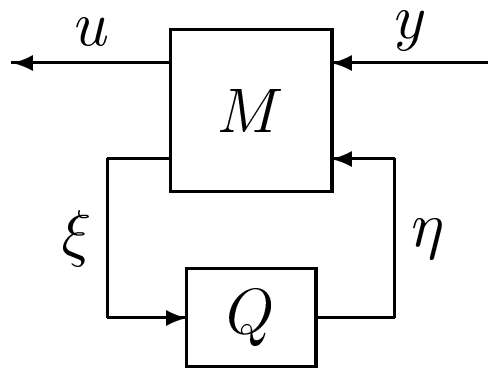
$$\begin{aligned} z &= G_{11}w + G_{12}u, & y &= G_{21}w + G_{22}u, & u &= Ky \\ \Rightarrow u &= KG_{21}w + KG_{22}u \\ \Rightarrow u &= (I - KG_{22})^{-1}KG_{21}w = K(I - G_{22}K)^{-1}G_{21}w \\ \Rightarrow z &= \{G_{11} + G_{12}K(I - G_{22}K)^{-1}G_{21}\} w \end{aligned}$$



# 安定化制御器のパラメータ化

**定理 18**  $(A, B_2)$  は可安定,  $(C_2, A)$  は可検出であると仮定する.  $F, L$  はそれぞれ  $A + LC_2, A + B_2F$  を安定にする行列とする. このとき, 一般化プラント  $G(s)$  を内部安定化できるすべての制御器は, 下図の  $y$  から  $u$  までの伝達行列でパラメータ化される.

ただし,  $Q(s)$  は適切な次元をもつ任意の安定行列である.



$$M(s) = \left[ \begin{array}{c|cc} A + B_2F + LC_2 & -L & B_2 \\ \hline F & 0 & I \\ -C_2 & I & 0 \end{array} \right]$$



# 定理 19 の証明

十分性 :  $Q(s) = (A_Q, B_Q, C_Q, D_Q)$  の実現を用いて閉ループ系の  $A$  行列を計算することによって示す.

$$K(s) = \left[ \begin{array}{cc|c} A + B_2F + LC_2 - B_2D_QC_2 & B_2C_Q & B_2D_QC_Q - L \\ -B_QC_2 & A_Q & B_Q \\ \hline F - D_QC_2 & C_Q & D_Q \end{array} \right]$$

これを  $H_{zw} = \mathcal{F}_\ell(G, K)$  に代入すると, 閉ループ系の  $A$  行列

$$\begin{aligned} A_c &= \left[ \begin{array}{ccc} A + B_2D_QC_2 & B_2F - B_2D_QC_2 & B_2C_Q \\ B_2D_QC_2 - LC_2 & A + B_2F + LC_2 - B_2D_QC_2 & B_2C_Q \\ B_QC_2 & -B_QC_2 & A_Q \end{array} \right] \\ &\sim \left[ \begin{array}{ccc} A + B_2F & B_2C_Q & B_2F - B_2D_QC_2 \\ 0 & A_Q & -B_QC_2 \\ 0 & 0 & A + LC_2 \end{array} \right] \end{aligned} \quad (189)$$

この行列は明らかに安定である.

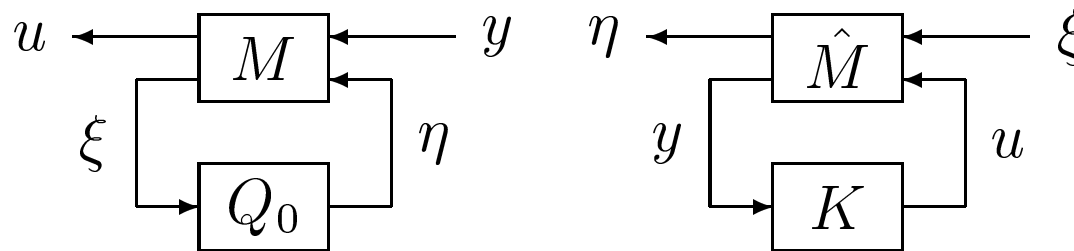


# 定理 19 の証明

必要性：任意の安定化制御器  $K(s)$  が必ずある安定な  $Q_0(s)$  を用いて  $K(s) = \mathcal{F}_\ell(M, Q_0)$  と書けることを示せばよい．そこで，この式から  $Q_0(s)$  を逆算して，その安定性を確かめる．下図の入出力関係より

$$\begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{\xi} \end{bmatrix} = M(s) \begin{bmatrix} \hat{y} \\ \hat{\eta} \end{bmatrix}, \quad \hat{u} = K(s)\hat{y} \quad (190)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\eta} \\ \hat{y} \end{bmatrix} = \hat{M}(s) \begin{bmatrix} \hat{\xi} \\ \hat{u} \end{bmatrix}, \quad \hat{\eta} = Q_0(s)\hat{\xi} \quad (191)$$



# 定理 19 の証明

これらの式から  $\hat{M}(s)$  は

$$\hat{M}(s) = \begin{bmatrix} & I \\ I & \end{bmatrix} M^{-1}(s) \begin{bmatrix} I & \\ & I \end{bmatrix} \quad (192)$$

逆システムの公式を用いて  $M^{-1}(s)$  計算すると

$$\hat{M}(s) = \left[ \begin{array}{c|cc} A & -L & B_2 \\ \hline -F & 0 & I \\ C_2 & I & 0 \end{array} \right] \quad (193)$$

- $\hat{M}(s)$  は  $G(s)$  と同じ  $(2, 2)$  ブロックをもつから,  $K(s)$  によって安定化される. よって,  $Q_0(s) := \mathcal{F}_\ell(\hat{M}, K)$  は安定となる.





# 安定化制御器の公式： $G(s)$ が安定の場合

系 1  $G(s)$  が安定であるとき，その安定化制御器のすべては

$$K(s) = Q(I + G_{22}Q)^{-1} \quad (194)$$

で表せる．ただし， $Q(s)$  は適切な次元を持つ任意の安定行列である．

(証明) この場合， $F = 0$ ， $L = 0$  とおけるので，係数行列  $M(s)$  は

$$M(s) = \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & -G_{22}(s) \end{bmatrix}$$

となる．よって，

$$K(s) = M_{11} + M_{12}Q(I - M_{22}Q)^{-1}M_{21} = Q(I + G_{22}Q)^{-1}$$

より明らか．

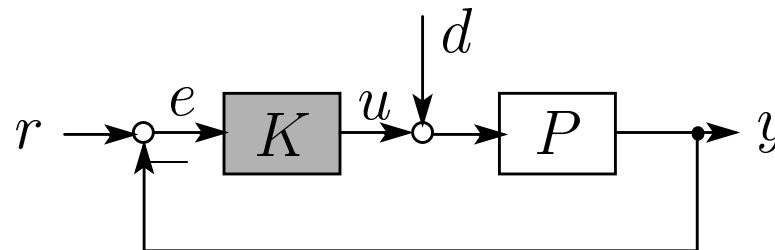


# 負のフィードバック系の場合

- 通常負のフィードバック系は  $G_{22}(s) = -P(s)$  の場合にあたるから、 $P(s)$  が安定のときその安定化制御器の公式は

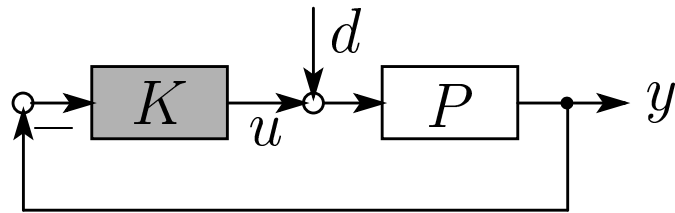
$$K(s) = Q(I - PQ)^{-1} \quad (195)$$

となる。



# 1 入出力系の例

- $P$  を安定とし,  $P(0) \neq 0$  とする. ステップ状の外乱  $d$  を漸近的に除去できる制御器をすべて求めよう.



- 外乱応答の Laplace 変換 :

$$\hat{y}(s) = \frac{P}{1 + PK} \hat{d}(s) = \frac{P}{1 + PK} \frac{1}{s}$$

安定化制御器の公式  $K = Q/(1 - PQ)$  を代入すると

$$\hat{y}(s) = P(1 - PQ) \frac{1}{s} \quad (196)$$



# 1 入出力系の例

- Laplace 変換の最終値定理により

$$y(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s\hat{y}(s) = P(0)[1 - P(0)Q(0)] = 0$$

$P(0) \neq 0$  なので, 次式が必要

$$Q(0) = \frac{1}{P(0)} \quad (197)$$

- 外乱を漸近除去できるすべての制御器:

$$\left\{ K = \frac{Q}{1 - PQ} : Q \text{ stable and } Q(0) = \frac{1}{P(0)} \right\} \quad (198)$$

$$K(0) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{Q}{1 - PQ} \rightarrow \infty \quad (199)$$

なので,  $K(s)$  に積分器  $1/s$  をもつ.



# 数値例

プラント

$$P(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

の場合、 $P(0) = 1/2 \Rightarrow Q(0) = 2$  よりステップ状の外乱を漸近除去できる  
制御器の一つは

$$K(s) = \frac{2(s+1)(s+2)}{s(s+3)}, \text{ when } Q = 2$$

となる。



# 数値例

$P(s) = 5/(s + 5)$  の入力は  $u(t)$ , 出力は  $y(t)$  である. その安定化制御器

$$K(s) = \frac{Q}{1 - PQ}, \quad Q(s) = \frac{s + 5}{5(as + b)}, \quad a, b > 0$$

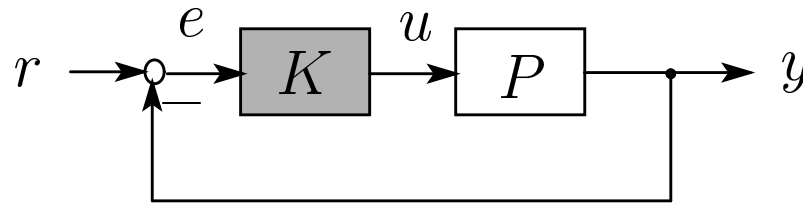
で  $y(t)$  を目標値  $1(t)$  に漸近追従させたい. 追従誤差は  $e(t) = r - y$  である. また, システムの接続関係として  $\hat{u}(s) = K(s)\hat{e}(s)$  とする.

- (a) 閉ループ系のブロック線図を描け.
- (b)  $Q(s)$  を用いて追従誤差のラプラス変換  $\hat{e}(s)$  を表せ.
- (c) 漸近追従  $e(\infty) = 0$  となるために  $(a, b)$  が満たすべき条件を導け.
- (d) さらに,  $\|e\|_2 \leq 0.1$  となるために  $(a, b)$  が満たすべき条件を導け.
- (e) 上記の条件 (c), (d) をすべて満足する  $(a, b)$  から一組を選び, 対応する制御器  $K(s)$  を計算せよ.



# 解答

(a) ブロック線図



(b) 追従誤差

$$\hat{e}(s) = \frac{1}{1 + PK} \hat{r}(s) = \frac{1}{1 + P \frac{Q}{1 - PQ}} \hat{r}(s) = (1 - PQ) \hat{r}(s)$$

(c)  $e(\infty) = 0 \Leftrightarrow \hat{e}(s)$  が安定であること,  $PQ = 1/(as + b)$  であることを用いる.

$$\hat{e}(s) = \left[ 1 - \frac{1}{as + b} \right] \frac{1}{s} = \frac{as + b - 1}{s(as + b)}$$

不安定極  $p = 0$  を相殺させるために,  $b = 1$  でなければならない.



# 解答

さらに、このとき追従誤差の応答は以下のようになる.

$$\hat{e}(s) = \frac{a}{as + 1} = \frac{1}{s + 1/a} \Rightarrow e(t) = e^{-\frac{1}{a}t}, \quad t \geq 0$$

(d)  $a \leq 0.02$  は次式から分る

$$\|e\|_2^2 = \int_0^{\infty} e^2(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-\frac{2}{a}t} dt = \frac{a}{2} \leq 0.1^2$$

(e)  $(a, b) = (0.02, 1)$  と選ぶと, PI 補償器を得る.

$$Q(s) = \frac{s + 5}{5(0.02s + 1)} = \frac{10(s + 5)}{s + 50}$$
$$\Rightarrow K(s) = \frac{\frac{10(s+5)}{s+50}}{1 - \frac{5}{s+5} \frac{10(s+5)}{s+50}} = \frac{10(s + 5)}{s} = 10 + \frac{50}{s}$$

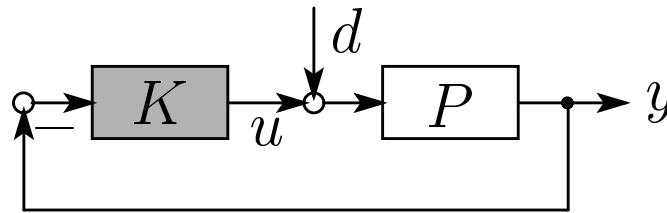




## 演習 6.6

図示の (1 入出力) 制御系にステップ状の外乱  $d(t) = 1 (t \geq 0)$  が印加されている。また、制御対象  $P(s)$  は原点に零点を持たない。

- (a) この外乱に対する出力応答が  $y(\infty) = 0$  となるように、安定化制御器の公式を用いて制御器  $K(s)$  を設計せよ。ただし、自由パラメータは定数  $Q(s) = q$  に限定して考えるとする。
- (b)  $P(s) = 1/(s+2)$  のとき、上述の仕様を満足する制御器  $K(s)$  を与えよ。



## 演習 6.6 の解答

(a)  $y(\infty) = 0 \Leftrightarrow \hat{y}(s)$  が安定であることを用いる

$$\hat{y}(s) = \frac{P}{1 + PK} \hat{d}(s) = \frac{P}{1 + P \frac{Q}{1 - PQ}} \hat{d}(s) = P(1 - PQ) \frac{1}{s}$$

の安定要請より

$$1 - P(0)q = 0 \Rightarrow q = \frac{1}{P(0)}$$

このとき

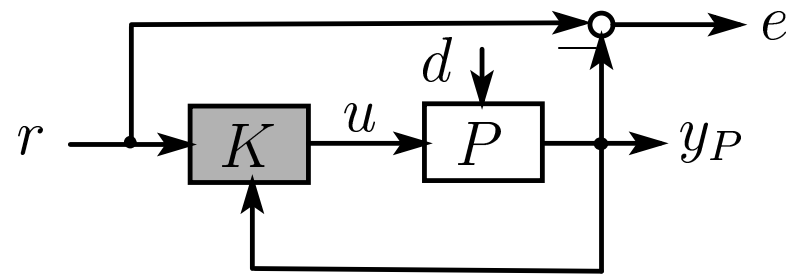
$$K(s) = \frac{q}{1 - P(s)q} = \frac{1}{P(0) - P(s)}$$

(b)  $P(s) = 1/(s + 2)$  より

$$P(0) = \frac{1}{2} \Rightarrow q = 2 \Rightarrow K(s) = \frac{2}{1 - \frac{1}{s+2} \cdot 2} = \frac{2(s+2)}{s} = 2 + \frac{4}{s}$$



## 2 自由度制御系



- 制御目的：外乱  $d(t)$  の影響を抑えながら、プラント出力  $y(t)$  を目標値  $r(t)$  に追従させる
- 評価出力：追従誤差

$$e(t) = r(t) - y(t) \quad (200)$$

- 制御対象の状態方程式：

$$\dot{x} = Ax + Hd + Bu \quad (201)$$

$$y_P = Cx \quad (202)$$



## 2 自由度制御系の構造解析

- 一般化フィードバック系に当てはめると、外乱は  $w = [r \ d]$ ，測定出力は  $y = [r \ y_P]$
- $(F, L) : A_F = A + BF, A_L = A + LC$  を安定にする状態フィードバックゲインとオブザーバゲイン
- $[r \ d]$  から  $e$  までの閉ループ伝達行列：

$$[T_{er}(s) \ T_{ed}(s)] = N_{11}(s) + N_{12}(s)Q(s)N_{21}(s) \quad (203)$$

ただし

$$N_{12}(s) = -C(sI - A_F)^{-1}B, \quad N_{21}(s) = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & C(sI - A_L)^{-1}H \end{bmatrix}$$
$$N_{11}(s) = [I, -N_{12}(s)F(sI - A_L)^{-1}H - C(sI - A_F)^{-1}H]$$



## 2 自由度制御系の構造解析

- 自由パラメータ  $Q$  を  $(r, y_P)$  の次元に合わせて分割する

$$Q(s) = [Q_F(s) \quad -Q_B(s)] \quad (204)$$

- 閉ループ伝達行列はそれぞれ次のようになる

$$T_{ed}(s) = -N_{12}(s)Q_B(s)C(sI - A_L)^{-1}H - N_{12}(s)F(sI - A_L)^{-1}H \\ - C(sI - A_F)^{-1}H \quad (205)$$

$$T_{er}(s) = I + N_{12}(s)Q_F(s) \quad (206)$$

- $T_{er}(s)$  は  $Q_F(s)$  だけに依存する.
  - $T_{ed}(s)$  は  $Q_B(s)$  だけに依存する.
- すなわち,  $T_{er}(s)$  と  $T_{ed}(s)$  は独立に設計できる.



## 2 自由度制御系の構造解析

- プラントが安定の場合  $F = 0$ ,  $L = 0$  とおける.
- 以下の伝達関数を置く

$$P_u(s) = C(sI - A)^{-1}B, \quad P_d(s) = C(sI - A)^{-1}H$$

- 閉ループ伝達関数

$$T_{ed}(s) = P_u(s)Q_B(s)P_d(s) - P_d(s) \quad (207)$$

$$T_{er}(s) = I - P_u(s)Q_F(s) \quad (208)$$

に簡略化され、各伝達行列が受ける拘束や独立設計可能性は一層明確に現れる。



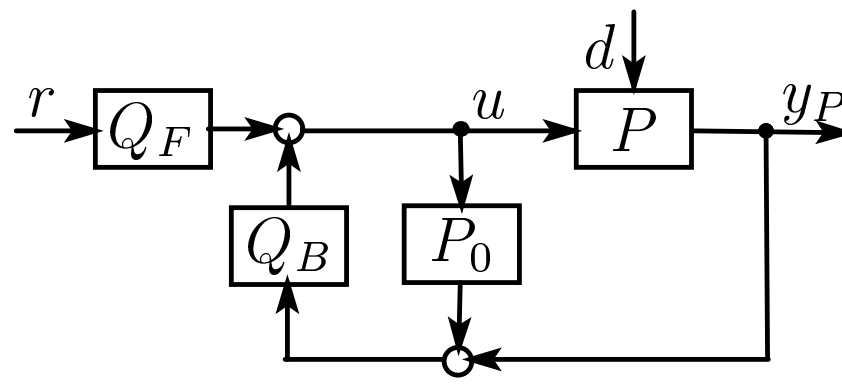
## 2自由度制御の実装 (安定な1入出力系)

$G_{22} = [0 \ P]^T, P(s) := C(sI - A)^{-1}B$  より

### ■ 制御器

$$K := [K_F \quad -K_B] = \frac{[Q_F \quad -Q_B]}{1 + [Q_F \quad -Q_B]G_{22}} = \frac{[Q_F \quad -Q_B]}{1 - PQ_B} \quad (209)$$

### ■ 2自由度系の一般形式 ( $P_0$ が制御器の中のプラントモデル $P$ を表す)



## 2 自由度制御の実装 (安定な 1 入出力系)

### ■ 特徴

$P = P_0$  のとき,  $Q_B(s)$  の入力信号が零となり, フィードバック制御器  $K_B(s)$  が働かなくなる. このとき,  $r \mapsto y_P$  の伝達関数:

$$H_{y_P r}(s) = P(s)Q_F(s)$$

### ■ モデルマッチング

閉ループ伝達関数を望ましいモデル  $M(s)$  に一致させる.

$$PQ_F = M \Rightarrow Q_F(s) = \frac{M(s)}{P(s)} \quad (210)$$

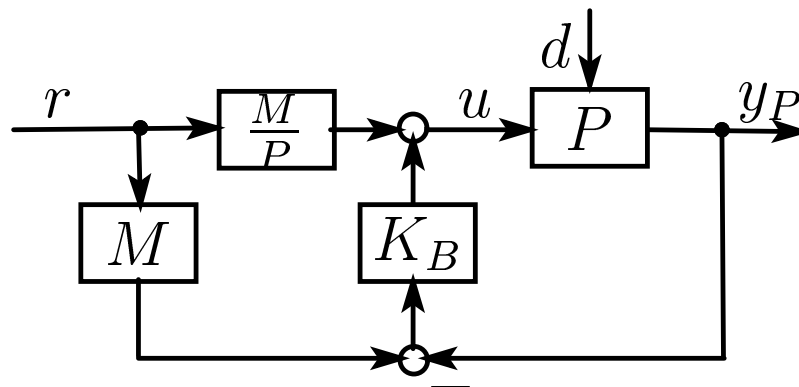
### ■ モデル $M(s)$ に対する制約条件

$M(s)$  にプラント  $P(s)$  の不安定零点を持たなければならない.





## 2自由度系の別形式 (安定な1入出力系)



- 確認 ( $r \mapsto u$  の伝達関数)

$$\begin{aligned} H_{ur}(s) &= \frac{M}{P} + MK_B = \frac{M}{P} + M \frac{Q_B}{1 - PQ_B} \\ &= \frac{M}{P} \frac{1 - PQ_B + PQ_B}{1 - PQ_B} = \frac{Q_F}{1 - PQ_B} \\ &= K_F \end{aligned}$$



# 数値例

## ■ プラント (低減衰)

$$P(s) = \frac{2}{s^2 + s + 4}, \quad \zeta = \frac{1}{4}, \quad \omega_n = 2$$

## ■ 目標値応答モデル (減衰を高めたもの)

$$M(s) = \frac{2}{s^2 + 3s + 4}, \quad \zeta^* = 0.75, \quad \omega_n^* = 2$$

## ■ フィードバック設計 (低感度)

$$Q_B(s) = P^{-1} \frac{1}{(\epsilon s + 1)^2} \Rightarrow K_B(s) = \frac{s^2 + s + 4}{2\epsilon^2 s(s + 2/\epsilon)}$$

$$S(s) = \frac{1}{1 + PK_B} = 1 - PQ_B = 1 - \frac{1}{(\epsilon s + 1)^2} = \frac{\epsilon s(\epsilon s + 2)}{(\epsilon s + 1)^2}$$



# 今後の展開

- モデル不確かさの問題
- ロバスト制御
- 外乱オブザーバ
- 極の領域配置
- モデル予測制御
- など...

