1　第１回宿題解答

2(1) まず、行列 A の特性多項式

$$|\lambda I - A| = \left| \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ -3 & \lambda \end{bmatrix} \right| = \lambda^2 - 3 = 0$$

より固有値

$$\lambda_1 = \sqrt{3}, \quad \lambda_2 = -\sqrt{3}$$

を得る。つぎに、

$$(\lambda I - A)u = \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ -3 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = 0$$

に固有値をそれぞれ代入することによって固有ベクトル

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

が得られる。

同様に、A^TA の特性多項式

$$|\lambda I - A^TA| = \left| \begin{bmatrix} \lambda - 9 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 \end{bmatrix} \right| = (\lambda - 9)(\lambda - 1) = 0$$

より A^TA の固有値及び A の特異値

$$\lambda_1(A^TA) = 9, \quad \lambda_2(A^TA) = 1 \Leftarrow \sigma_1(A) = \sqrt{\lambda_1(A^TA)} = 3, \quad \sigma_2(A) = \sqrt{\lambda_2(A^TA)} = 1$$

を得る。つぎに、

$$(\lambda I - A^TA)v = \begin{bmatrix} \lambda - 9 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = 0$$

に固有値 $\lambda_1(A^TA) = 9, \lambda_2(A^TA) = 1$ をそれぞれ代入することによって A の固有ベクトル

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

が得られる。

2(3) 定義に従って計算する。

$$\begin{aligned} \|x\|_1 &= |x_1| + |x_2| + |x_3| = 1 + 2 + 3 = 6 \\ \|x\|_2 &= \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14} \\ \|x\|_\infty &= \max\{|x_1|, |x_2|, |x_3|\} = \max\{1, 2, 3\} = 3 \end{aligned}$$

2(4) 定義に従って計算すると、以下のようになる。

$$\begin{aligned} \|u\|_2 &= \sqrt{0 + 1^2} = 1 \\ \|v\|_2 &= \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \\ \langle u,\ v \rangle &= u^Tv = 0 \times 1 + 1 \times 1 = 1 \\ \cos\theta &= \frac{\langle u,\ v \rangle}{\|u\|_2 \|v\|_2} = \frac{1}{1 \times \sqrt{2}} = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$