2　第2回宿題解答

2(5) まず行列 A_1 について、Schur の補題を適用すると ((2,2) 要素が 1)、

$$1>0,\quad 2-1\times(1^{-1})\times 1=1>0\Rightarrow A_1>0$$

より A_1 の正定性が分かる。次に、A_2 を $(1,1)$ ブロックが A_1 となるように分割してから Schur の補題を適用すると

$$A_1>0,\quad 2-[1\ \ 1]A_1^{-1}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=1>0$$

より $A_2>0$ となる。

2(7) (a)

$$\sup_t|\dot{u}(t)|=0\Rightarrow\dot{u}(t)\equiv 0\Rightarrow u(t)\equiv c$$

で $u(t)$ が定数で、必ずしも零ではないからノルム条件 (2) を満たさない。よって、この関数はノルムでない。

(b)　条件 (1) は明らか。

$$|u(0)|+\sup_t|\dot{u}(t)|=0\Rightarrow\dot{u}(t)\equiv 0,u(0)=0\Rightarrow u(t)\equiv 0$$

が成立ち、条件 (2) を満たす。

$$|\alpha u(0)|+\sup_t|\dot{\alpha u}(t)|=\alpha(|u(0)|+\sup_t|\dot{u}(t)|)$$

より条件 (3) も成立。さらに

$$\begin{aligned}&|u(0)+v(0)|+|\dot{u}(t)+\dot{v}(t)|\le|u(0)|+|v(0)|+|\dot{u}(t)|+|\dot{v}(t)|\\&\le(|u(0)|+\sup|\dot{u}(t)|)+(|v(0)|+\sup|\dot{v}(t)|)\\&\Rightarrow|u(0)+v(0)|+\sup|\dot{u}(t)+\dot{v}(t)|\le(|u(0)|+\sup|\dot{u}(t)|)+(|v(0)|+\sup|\dot{v}(t)|)\end{aligned}$$

より三角不等式も成立つ。よって、この関数がノルムである。

(c)　例えば非零関数

$$u(t)=1\ \forall t\in[0,1];\quad u(t)=0\ \text{ほか}$$

に対して

$$\lim_{T\to\infty}\sqrt{\frac{1}{T}\int_{-T}^{T}u^2(t)dt}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}=0$$

となるので、条件 (2) を満たさない。よって、この関数はノルムではない。

2(8) 部分分数展開によって

$$G(s)=-\frac{1}{3}\frac{1}{s+2}+\frac{4}{3}\frac{1}{s+5}\Rightarrow g(t)=-\frac{1}{3}e^{-2t}+\frac{4}{3}e^{-5t},\ t\ge 0$$

を得る。よって

$$\begin{aligned}\|G\|_2^2\quad&=\quad\|g\|_2^2=\frac{1}{9}\int_0^\infty(e^{-4t}-8e^{-7t}+16e^{-10t})dt=\frac{1}{9}(\frac{1}{4}-\frac{8}{7}+\frac{16}{10})=\frac{11}{140}\\&\Rightarrow\quad\|G\|_2=\sqrt{\frac{11}{140}}\end{aligned}$$

そして、$G(s)$ のボード線図を描くとゲインの最大振幅が $(2,5)$ の間でとることが分る。

$$|G(j\omega)|^2=\frac{\omega^2+1}{(\omega^2+4)(\omega^2+25)}\Rightarrow\frac{d|G(j\omega)|^2}{d\omega}=2\omega\frac{-\omega^4-2\omega^2+71}{(\omega^2+4)^2(\omega^2+25)^2}$$

である。極値点 ($\frac{d|G(j\omega)|^2}{d\omega} = 0$ を満たす) を求めると

$$\omega = 0,\ \omega^2 = 6\sqrt{2} - 1,\ \infty$$

となる。$2 < \sqrt{6\sqrt{2}-1} < 5$ より最大振幅が $\omega^* = \sqrt{6\sqrt{2}-1}$ でとり

$$\|G\|_\infty = \sup_\omega |G(j\omega^*)| \approx 0.151$$

2(9) まず

$$\begin{aligned}
|D(j\omega)| &= |e^{-j\omega T}| = 1 \Rightarrow |D(j\omega)G(j\omega)| = |G(j\omega)| \\
|A(j\omega)| &= \left|\frac{j\omega - a}{j\omega + a}\right| = \sqrt{\frac{\omega^2 + a^2}{\omega^2 + a^2}} = 1 \Rightarrow |A(j\omega)G(j\omega)| = |G(j\omega)|
\end{aligned}$$

が成立つ。すると

$$\begin{aligned}
\|DG\|_2^2 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |D(j\omega)G(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |G(j\omega)|^2 d\omega = \|G\|_2^2 \\
\|DG\|_\infty &= \sup_\omega |D(j\omega)G(j\omega)| = \sup_\omega |G(j\omega)| = \|G\|_\infty
\end{aligned}$$

が言える。$A(s)$ の場合も同様。