4　第４回宿題解答

4(4) (a) 閉ループ特性多項式は $p(s) = s + a + 4$ であり、よって閉ループ極が $p = -(a+4)$ となる。すると、安定条件 $p = -(a+4) < 0$ より $a > -4$ でなければならない。

(b)$\tilde{P}(s)$ を書き換えると重み関数 $W(s)$ が次のように求まる。

$$\tilde{P}(s) = \frac{1}{(s+10)+(a-10)} = \frac{P}{1+(a-10)P} \Rightarrow W(s) = a - 10 \ (\Delta(s) = 1)$$

(P, K) の安定性は (a) より明らか。よって、ロバスト安定条件は $\|WSP\|_\infty < 1$ だけになる。

$$WSP = W\frac{P}{1+PK} = \frac{a-10}{s+14}$$

が 1 次遅れ系で $\omega = 0$ で最大振幅をとるから $\|WSP\|_\infty = |WSP(j0)| = |a-10|/14$ である。よって

$$\|WSP\|_\infty = \frac{|a-10|}{14} < 1 \Leftrightarrow -14 < a - 10 < 14 \Leftrightarrow -4 < a < 24$$

が求まる。この安定範囲は (a) より狭い。ここで実変動を動的な変動としてみなして小ゲイン定理を使った。しかし、実変動に対して小ゲイン定理はロバスト安定の必要条件にはならない。

4(5) (a) $K(s) = (1+ks)/s$ より閉ループ特性多項式は

$$p(s) = (s-1)s + 1 + ks = s^2 + (k-1)s + 1$$

である。よって、Routh-Hurwitz 判別法より安定範囲は $k > 1$ である。

(b) 追従誤差の Laplace 変換は

$$\hat{e}(s) = \frac{1}{1+PK}\hat{r}(s) = \frac{(s-1)s}{p(s)} \cdot \frac{1}{s} = \frac{s-1}{p(s)}$$

であり、安定である。よって、$e(\infty) = 0$ となる。(最終値の定理で計算しても結構である)

(c)$\tilde{P}(s)$ を書き換えると

$$\tilde{P}(s) = \frac{P}{1+\alpha P} = \frac{P}{1+\Delta WP} \Rightarrow \Delta(s) = \alpha,\ W(s) = 1$$

(P, K) が安定なので、ロバスト安定条件は $\|WSP\|_\infty \leq 1$ のみとなる ($\|\Delta\|_\infty = |\alpha| <$ より)。

$$\begin{aligned} WSP &= W\frac{P}{1+PK} = \frac{s}{s^2+(k-1)s+1} \Rightarrow \\ |WSP(j\omega)|^2 &= \frac{\omega^2}{(1-\omega^2)^2+(k-1)^2\omega^2} = \frac{1}{(\frac{1}{\omega}-\omega)^2+(k-1)^2} \leq \frac{1}{(k-1)^2} \end{aligned}$$

より

$$\|WSP\|_\infty = \frac{1}{|k-1|} = \frac{1}{k-1} \leq 1 \Rightarrow k \geq 2$$

を得る。