6　第６回宿題解答

5(4) まず，$M(s)$ の状態を x_M とおくと，その状態方程式は

$$\begin{array}{rcl} \dot{x}_M &=& (A+B_2F+LC_2)x_M - Ly + B_2\eta \\ u &=& Fx_M + \eta \\ \xi &=& -C_2x_M + y \end{array} \tag{1}$$

と書ける．$N(s)$ の状態は (x, x_M) であるが，より構造の見やすい実現を導くために x_M の代わりに状態

$$e = x - x_M \tag{2}$$

を用いる．このとき，$x_M = x - e$ であり，$u = Fx_M + \eta$ は $u = Fx - Fe + \eta$ と書ける．これを $\dot{x} = Ax + B_1w + B_2u$ に代入すると

$$\dot{x} = A_Fx - B_2Fe + B_1w + B_2\eta \tag{3}$$

を得る．同様に，$x_M = x - e$ と $y = C_2x + D_{21}w$ を $\dot{x}_M$ の式 (1) の右辺に代入すると

$$\dot{x}_M = A_Fx - (A_L + B_2F)e - LD_{21}w + B_2\eta$$

が成立することもいえる．また，上記二つの式により

$$\dot{e} = \dot{x} - \dot{x}_M = A_Le + B_Lw \tag{4}$$

となることが示せる．さらに，$z = C_1x + D_{11}w + D_{12}u$ に $u = Fx - Fe + \eta$，式 (1) の ξ に $x_M = x - e$ と $y = C_2x + D_{21}w$ を代入することによって

$$z = C_Fx - D_{12}Fe + D_{11}w + D_{12}\eta \tag{5}$$
$$\xi = C_2e + D_{21}w \tag{6}$$

が導出できる．以上の式 (3)~(6) によって，

$$\begin{bmatrix} \hat{z} \\ \hat{\xi} \end{bmatrix} = N(s) \begin{bmatrix} \hat{w} \\ \hat{\eta} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} A_F & -B_2F & B_1 & B_2 \\ 0 & A_L & B_L & 0 \\ \hline C_F & -D_{12}F & D_{11} & D_{12} \\ 0 & C_2 & D_{21} & 0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} \hat{w} \\ \hat{\eta} \end{bmatrix}$$

が得られた．$N(s)$ をブロックに展開すると

$$N_{11} = \left[\begin{array}{cc|c} A_F & -B_2F & B_1 \\ 0 & A_L & B_L \\ \hline C_F & -D_{12}F & D_{11} \end{array}\right], \quad N_{12} = \left[\begin{array}{c|c} A_F & B_2 \\ \hline C_F & D_{12} \end{array}\right]$$
$$N_{21} = \left[\begin{array}{c|c} A_L & B_L \\ \hline C_2 & D_{21} \end{array}\right], \quad N_{22} = 0 \tag{7}$$

となる．ゆえに，w から z までの閉ループ伝達行列は

$$H_{zw}(s) = N_{11}(s) + N_{12}(s)Q(s)N_{21}(s) \tag{8}$$

となり，$Q(s)$ に関してアフィンとなる．

5(6) 単位フィードバック系に存在する伝達関数は以下の四つである。

$$H := \begin{bmatrix} \frac{1}{1+PK} & \frac{P}{1+PK} \\ \frac{K}{1+PK} & \frac{PK}{1+PK} \end{bmatrix}$$

これに $K = Q/(1-PQ)$ を代入すると、伝達関数が

$$H := \begin{bmatrix} 1-PQ & P(1-PQ) \\ Q & PQ \end{bmatrix}$$

に変わる。$P = 1/(s-1)$ が不安定なので、これらの伝達関数をすべて安定化させるには

$$Q, \quad PQ = \frac{1}{s-1}Q(s), \quad P(1-PQ) = \frac{1}{s-1}(1-PQ)$$

が安定でなければならない。PQ の安定条件は $Q(1) = 0$ であり、よって Q は

$$Q(s) = \frac{s-1}{s+1}\overline{Q}(s), \quad \overline{Q}(s) \text{ が安定}$$

のように書ける。さらに、$P(1-PQ)$ の安定条件は

$$1 - PQ(1) = 1 - \frac{1}{s+1}\overline{Q}(s)\Big|_{s=1} = 1 - \frac{1}{2}\overline{Q}(1) = 0 \ \Rightarrow\ \overline{Q}(1) = 2$$

である。以上より Q は以下の条件を満たさなければならない。

$$Q(s) = \frac{s-1}{s+1}\overline{Q}(s), \quad \overline{Q}(1) = 2, \quad \overline{Q}(s) \text{ が安定}$$