
第1章 制御系設計のアプローチ

◇ モデルに基づく手法

古典制御 (周波数法, 根軌跡法), 現代制御 (状態空間法), ポスト現代制御 (ロバスト制御など)

特徴: 高速, 精密な制御が可能

欠点: 数式モデルを使わなければならない

◇ モデルを使わない手法

ファジー制御, AI, 経験則

利点: モデルを立てる手間がかからない

欠点: 高速や精密な制御に向かない, 制御ゲインの決定には多くの実験を要する

したがって,

◇ よい性能が求められる場合, モデルベースの手法を取らなければならない.

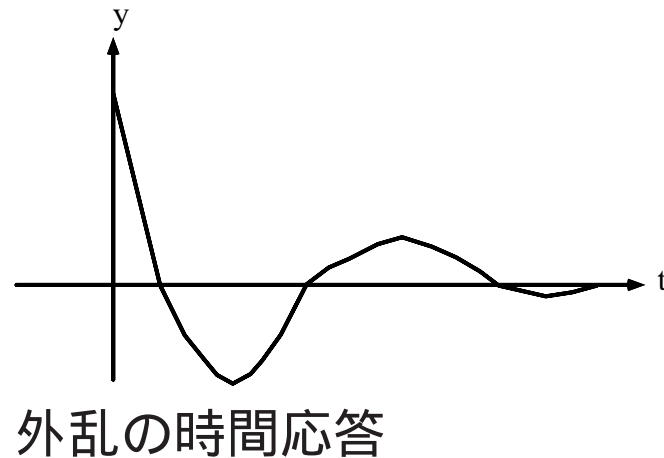
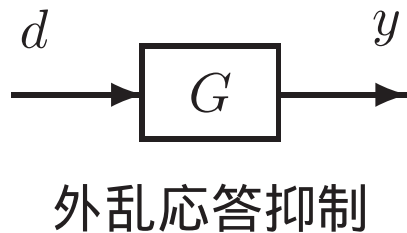
◇ 完璧な数式モデルを作れないから, モデルと物理系の差を考慮して制御系を設計する必要がある.

第2章 ロバスト制御入門

- ◇ ノルム (信号, システム)
- ◇ モデルの不確かさ
- ◇ ロバスト制御の考え方
- ◇ 不確かさを持つシステムの表現方法
- ◇ 変動範囲のモデリング
- ◇ ロバスト安定性とロバスト性能の概念
- ◇ 小ゲイン定理
- ◇ ロバスト安定条件
- ◇ \mathcal{H}_∞ 公称性能とロバスト安定性の等価性
- ◇ ロバスト性能条件

信号のノルム

外乱応答を抑える効果を測るために、信号の大きさの尺度が必要となる。このために使われるのは信号のノルムと呼ばれるものである。

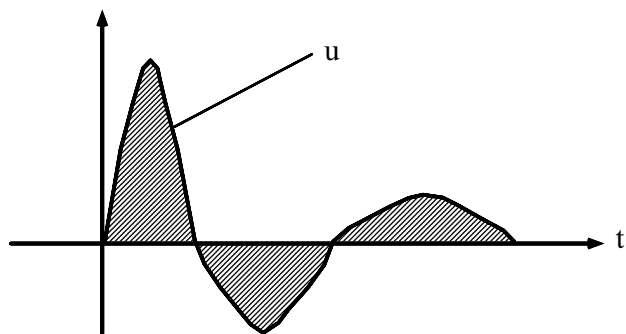


◇ 1 ノルム (面積)

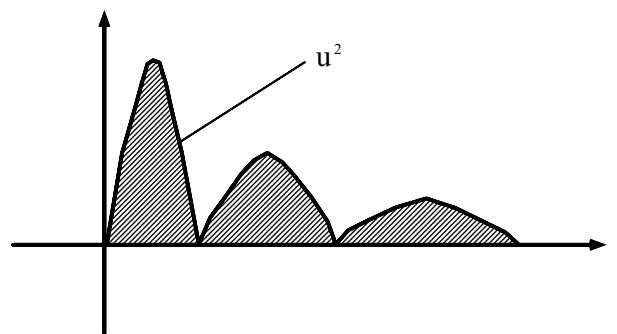
$$\|u\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |u(t)| dt$$

◇ 2 ノルム (2乗面積の平方根)

$$\|u\|_2 = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} u(t)^2 dt}$$



信号の 1 ノルム



信号の 2 ノルム

- ◇ 信号のノルムはユークリッド空間の距離の概念を特定の時刻に依存しないように一般化したものである。つまり，全時間帯における信号の大きさを表している。
- ◇ 二つの信号の応答をそのノルムの大小で比較する場合，同じノルムのもとで比較を行なわなければならない。なぜなら，同じ信号であっても，異なるノルムで測るときその値は違うからである。

例 2.1 信号

$$u(t) = \begin{cases} e^{-t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

の場合

$$\|u\|_1 = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = 1$$

$$\|u\|_2 = \sqrt{\int_0^{\infty} e^{-2t} dt} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

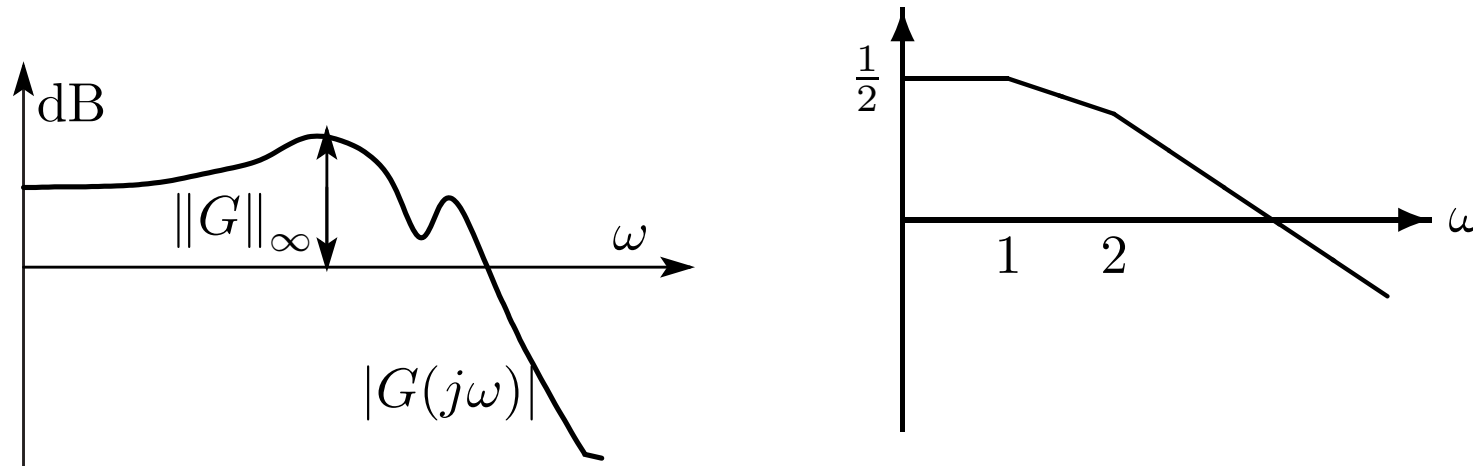
システムのノルム

◇ \mathcal{H}_∞ ノルム (周波数応答の最大振幅)

$$\|G\|_\infty = \max_{\omega \in (-\infty, \infty)} |G(j\omega)|$$

例 2.2 $G = 1/(s+1)(s+2)$ の場合、その \mathcal{H}_∞ ノルムは

$$\|G\|_\infty = |G(j0)| = \frac{1}{2}$$



◇ ノルムを計算する MATLAB コマンド: `hinfnorm`

モデルの不確かさ

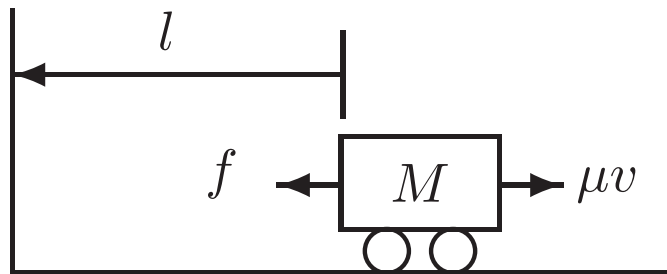
◇ モデルに不確かな部分は必ず存在する.

例 2.2 車の簡略化したモデル

$$P(s) = \frac{1}{Ms^2 + \mu s}$$

パラメータの質量と摩擦係数は一定ではなく、ある範囲内で値をとる。
よって、固定した一つの伝達関数だけで車の運動特性を把握することはできない。

$$M_0 - \epsilon \leq M \leq M_0 + \epsilon, \quad \mu_0 - \delta \leq \mu \leq \mu_0 + \delta$$

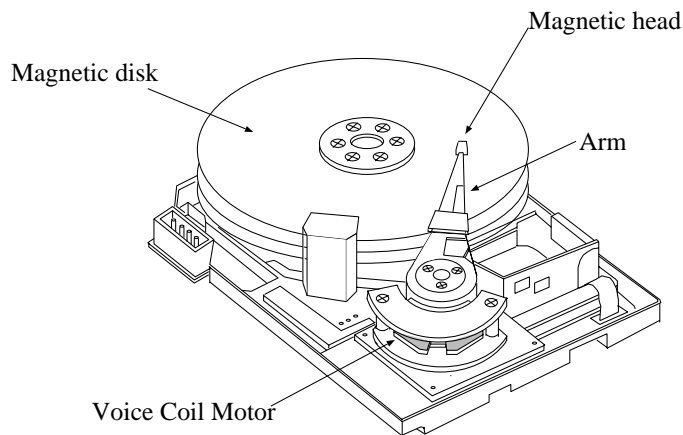


車のモデリング

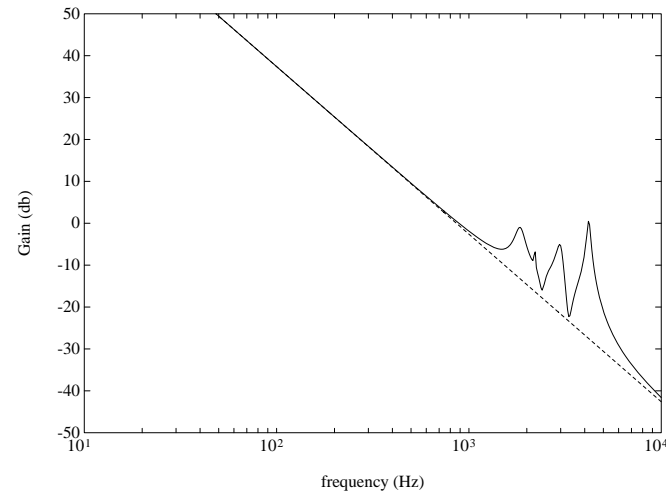
例 2.3 ハードディスク (実線: 実測値, 点線: モデル):
モデル

$$P(s) = k/s^2$$

高周波数域に振動モードがあり, しかもこれらの振動モードは大量生産時の製造誤差によって変わるので, 正確にモデリングできない.



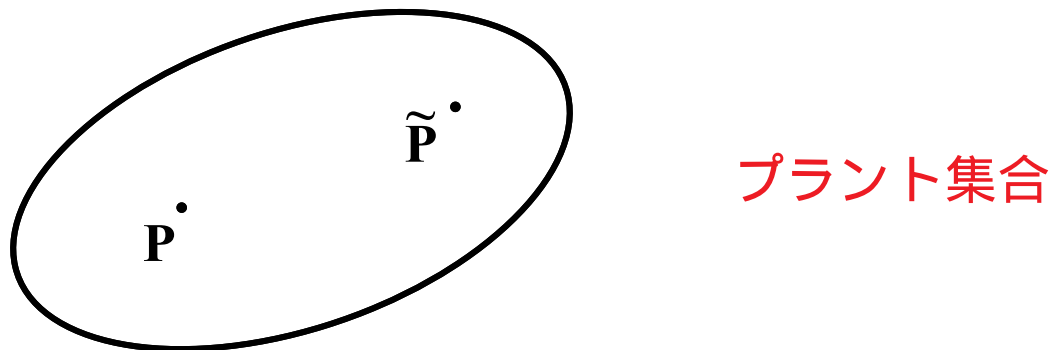
ハードディスク



ハードディスクのボード線図

ロバスト制御の考え方

- ◇ 実システムは正確にモデリングできないため、一つの伝達関数で表現することはできない。その代わりに、設計用のモデル (P) を一つ決め、実システムとこのモデルの差である不確かさの範囲を見積り、この範囲内の変動をすべて含むようなプラント集合を考えることはできる。実システムはこの集合に含まれる。



- ◇ 選んだ設計用のモデル (P) は**公称モデル** という。

◇ 実システムを考える代わりに, このプラント集合について安定性や制御性能を保証してやれば, 実システムに対する安定性や制御性能も保証される.

◇ 課題

- プラント集合の表現
- 変動範囲のモデリング
- プラント集合を安定化する条件
- プラント集合の制御性能を保証する条件
- 設計方法

不確かさの分類

◇ パラメータ誤差

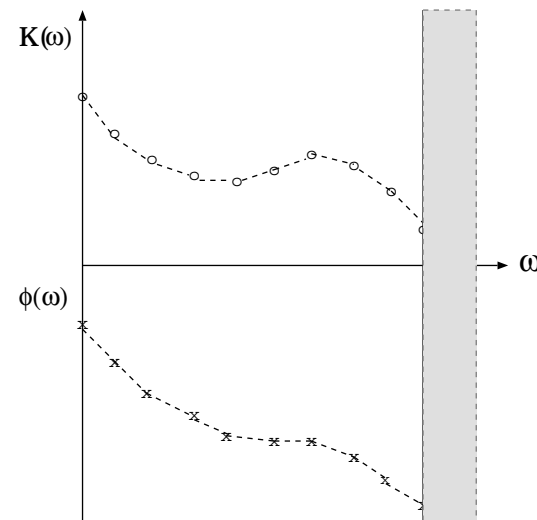
◇ 動的変動

- 同定できなかった高周波数モード
- 解析と設計の簡単化のために無視した動特性

同定法：角周波数が ω の正弦波の定常出力も正弦波 → 入力信号の周波数を変えれば，周波数ごとに伝達関数の周波数特性が測れる．

$$K(\omega) = |G(j\omega)| \quad \text{振幅}$$

$$\phi(\omega) = \angle G(j\omega) \quad \text{位相角}$$



測定した周波数特性

不確かさを持つプラント集合の表現

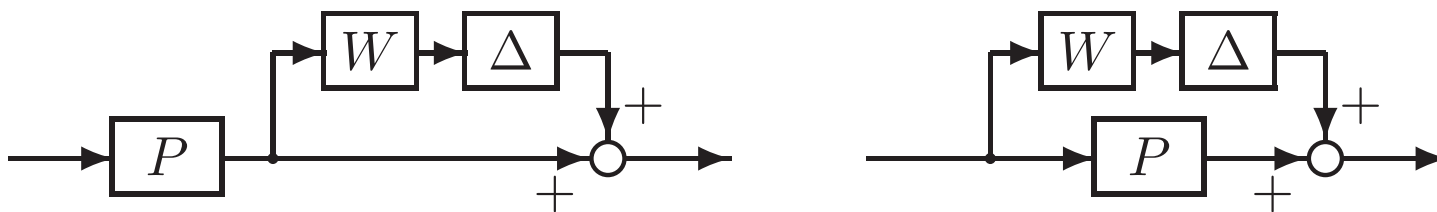
(1) 乗法的変動を持つプラント集合

$$\tilde{P}(s) = (1 + W\Delta)P, \quad \|\Delta\|_{\infty} \leq 1$$

$P(s)$ は公称プラント, $\Delta(s)$ は規格化した変動, $W(s)$ は変動の範囲を表す.

(2) 加法的変動を持つプラント集合

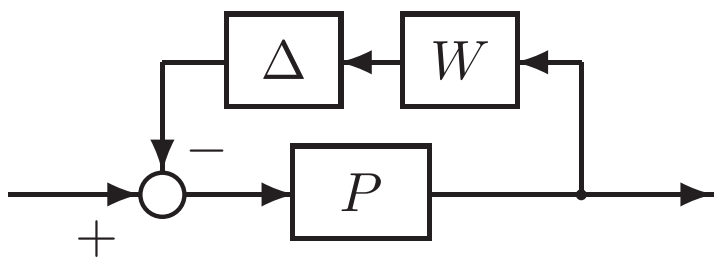
$$\tilde{P}(s) = P + W\Delta, \quad \|\Delta\|_{\infty} \leq 1$$



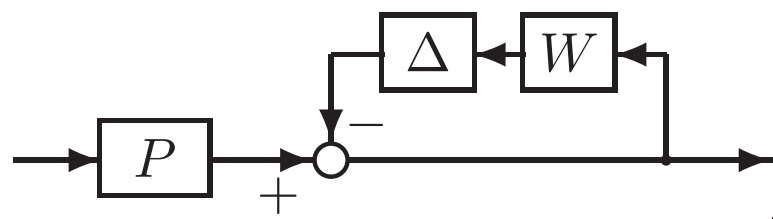
(3) フィードバック型変動を持つプラント集合

$$\tilde{P}(s) = \frac{P}{1 + \Delta W P}, \quad \|\Delta\|_\infty \leq 1$$

$$\tilde{P}(s) = \frac{P}{1 + \Delta W}, \quad \|\Delta\|_\infty \leq 1$$



フィードバック型不確かさ 1



フィードバック型不確かさ 2

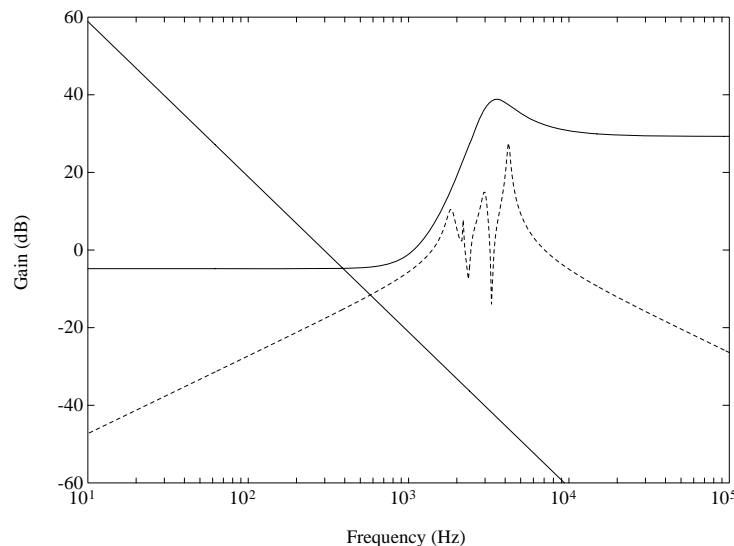
- ◇ 変動の大きさは \mathcal{H}_∞ ノルムで測られているので、有界ノルム型の変動と呼ばれる。パラメータ変動はその部分集合として表すことが可能である。
- ◇ 実プラントに関する既知の情報を活かすものを選ぶ。

例題 2.5 ハードディスクの高周波数帯域の振動モードを乗法的な不確かさとしてモデリングしよう.

1. 実プラント \tilde{P} とモデル P の周波数応答の差を計算
2. この差を P の伝達関数で割ると, 下図の点線を得る.
3. この点線を覆うように安定最小位相の伝達関数 $W(s)$ 決めると, 実プラント $\tilde{P}(s)$ は

$$\tilde{P}(s) = P(1 + \Delta W), \quad P = \frac{k}{s^2}, \quad \|\Delta\|_{\infty} \leq 1$$

で表されるプラント集合に含まれる.



ハードディスクの変動のモデリング

例題 2.6 車の簡略化モデルの例では, 質量は

$$|M - M_0| \leq c, \quad c > 0$$

の区間内にある場合,

$$M = M_0 + c\Delta, \quad -1 \leq \Delta \leq 1$$

と書ける. よって, 伝達関数:

$$\tilde{P}(s) = \frac{1}{Ms^2 + \mu s} = \frac{1}{M_0s^2 + \mu s + \Delta cs^2} = \frac{P}{1 + \Delta W}$$

ただし,

$$P(s) = \frac{1}{M_0s^2 + \mu s}, \quad W(s) = \frac{cs}{M_0s + \mu}, \quad |\Delta| \leq 1$$

- ◇ パラメータ変動に対してフィードバック型表現は有効
- ◇ Δ は実数であり, 動的伝達関数 (複素数) でないので, フィードバック型プラント集合 2 の表現形式の部分集合となる.

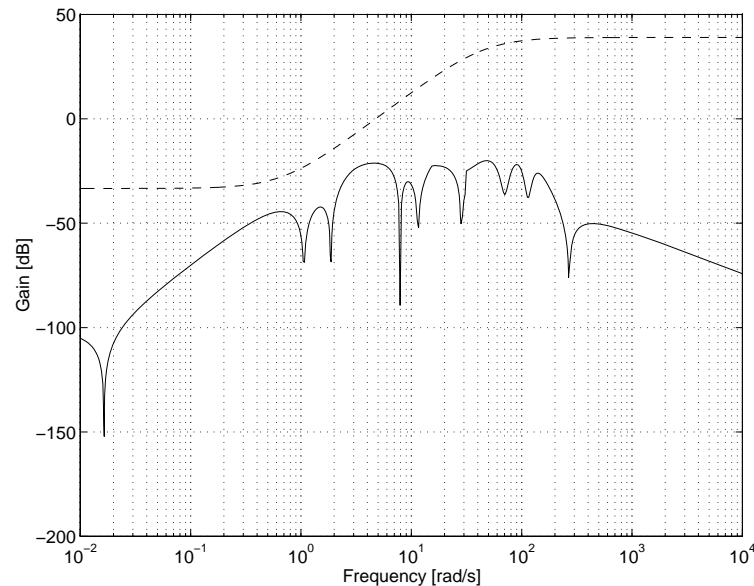
変動範囲のモデリング

- ◇ 制御性能に大きく影響する中低域の周波数帯域では, なるべく変動のゲインを大きく超えないように上界 (重み) を決めて上げる.
- ◇ 変動重みの次数は低い方が望ましい.

(1) システム同定の場合

実プラント $\tilde{P}(j\omega)$ とモデル $P(j\omega)$ の差を計算し, $\tilde{P}(j\omega) - P(j\omega)$ を覆うように重み関数 $W(s)$ を決める.

(実線: $|\tilde{P}(j\omega) - P(j\omega)|$, 点線: $|W(j\omega)|$)



変動の重み

(2) 高次プラント \tilde{P} を低次プラント $P(s)$ で近似した場合

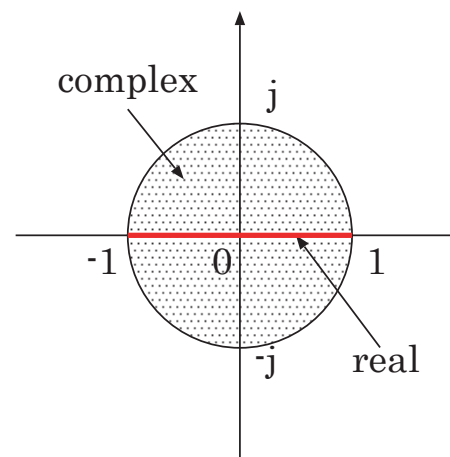
$$|\tilde{P}(j\omega) - P(j\omega)| < |W(j\omega)| \quad (\text{加法変動})$$

あるいは
$$\left|1 - \frac{\tilde{P}(j\omega)}{P(j\omega)}\right| < |W(j\omega)| \quad (\text{乗法変動})$$

を満たす $W(s)$ をボード線図上で求める。

(3) パラメータ変動

- ◇ 原則的には変動の幅の見積りを使う
- ◇ 後述の小ゲイン定理を用いる場合, 非常に保守的な結果しか得られない. したがって, 設計のとき実際の変動範囲より小さい幅を用いるのが普通である.



動的変動対パラメータ変動

ロバスト安定性とロバスト性能

定義

不確かさのモデル集合 Π と、性能目標が与えられたとき、 $P \in \Pi$ を公称モデル、 K を設計された制御器とすると、閉ループ系の

公称安定性 = K が公称モデル P を内部安定化する

ロバスト安定性 = K が Π に属するすべてのプラントを内部安定化する

公称性能 = 公称モデル P に対して性能目標が満たされる

ロバスト性能 = Π に属するすべてのプラントについて性能目標が満たされる

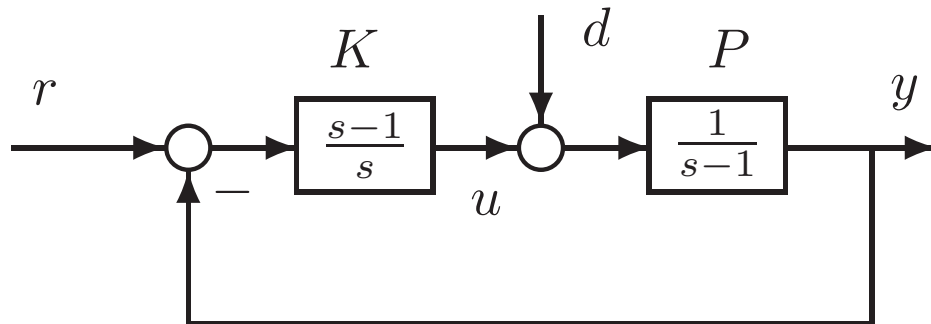
内部安定性の概念

例題 2.7 下図の系では, $r \rightarrow y$ までの伝達関数:

$$H_{yr} = \frac{PK}{1 + PK} = \frac{\frac{1}{s-1} \frac{s-1}{s}}{1 + \frac{1}{s-1} \frac{s-1}{s}} = \frac{\frac{1}{s}}{1 + \frac{1}{s}} = \frac{s}{s+1} \quad (\text{安定})$$

$d \rightarrow y$ の伝達関数:

$$H_{yd} = \frac{P}{1 + PK} = \frac{\frac{1}{s-1}}{1 + \frac{1}{s-1} \frac{s-1}{s}} = \frac{\frac{1}{s-1}}{1 + \frac{1}{s}} = \frac{s}{(s-1)(s+1)} \quad (\text{不安定})$$



不安定極零点相殺

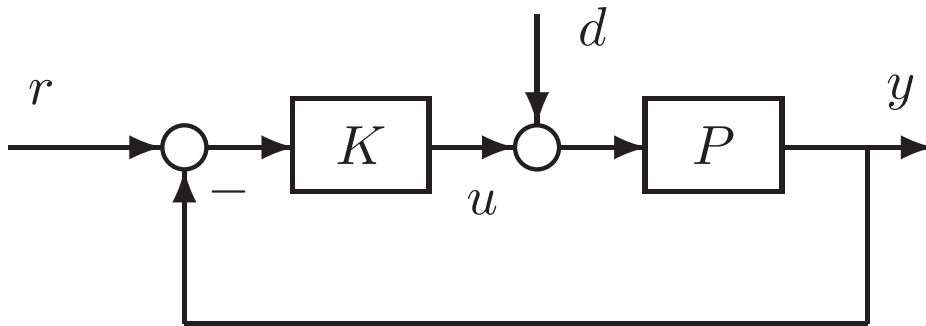
◇ 一つの閉ループ伝達関数の安定性で全閉ループ系の安定を保証できない!!

内部安定性

外部信号 (r, d) からシステムの内部信号 (y, u) までの四つの伝達関数

$$\begin{bmatrix} \frac{PK}{1+PK} & \frac{P}{1+PK} \\ \frac{K}{1+PK} & -\frac{PK}{1+PK} \end{bmatrix}$$

がすべて安定のとき、閉ループ系を内部安定という。



内部安定性

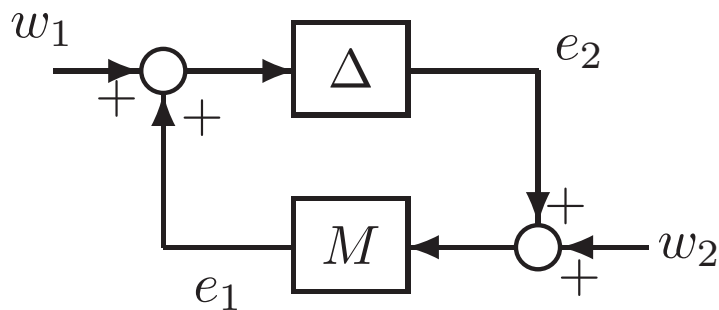
- ◇ 閉ループ系のすべての状態が安定. すなわち, 初期値応答 $x(t) \rightarrow 0$ ($t \rightarrow \infty$).
- ◇ 内部安定性 = H_{yr} 安定 かつ (P, K) 間に不安定な極零点相殺なし

小ゲイン定理

定理 2.1

$M(s)$ を安定伝達関数とし, $\gamma > 0$ とする. このとき, 閉ループ系がすべての安定な $\Delta(s)$ に対して内部安定となるための必要十分条件は,

- (1) $\|\Delta\|_{\infty} \leq 1/\gamma$ のとき, $\|M\|_{\infty} < \gamma$ となること
- (2) $\|\Delta\|_{\infty} < 1/\gamma$ のとき, $\|M\|_{\infty} \leq \gamma$ となることである



変動を持つフィードバック系

証明: ここでは十分性の証明だけを説明する .

閉右半平面において

$$|M(s)\Delta(s)| \leq \|M\|_\infty \|\Delta\|_\infty < 1$$

が成立するので, 無限級数

$$1 + M\Delta + (M\Delta)^2 + \dots$$

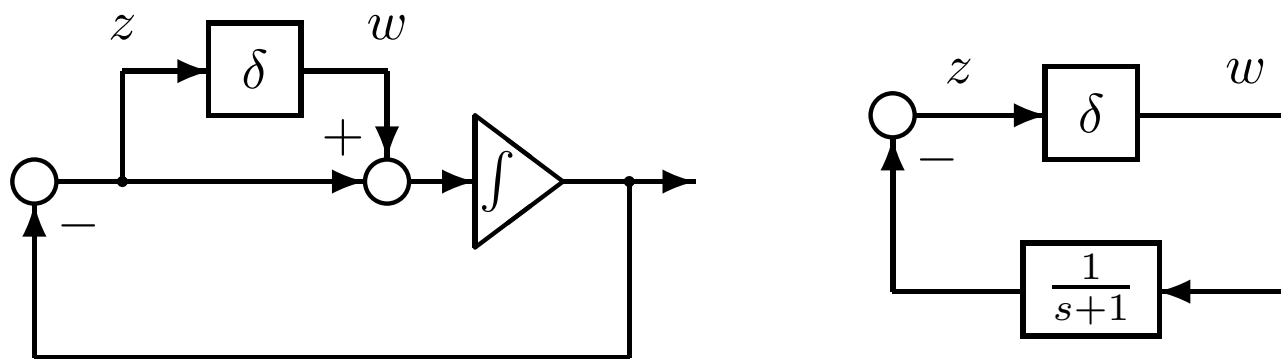
が閉右半平面において収束し, $(1 - M\Delta)^{-1}$ となる . すなわち $(1 - M\Delta)^{-1}$ が安定である . M, Δ の間に不安定な極零点相殺はないため, 閉ループ系の内部安定性が言える .

必要性は, $\|M\|_\infty \geq \gamma$ のとき, 閉ループ系を不安定にする変動 Δ を実際に作ることによって示される .

◇ 物理的解釈:

開ループゲインは $\|M\Delta\|_\infty < 1$ なので, 信号が一周するたびにどんどん減衰して行く .

例題 2.8 開ループ伝達関数： $\tilde{P} = (1 + \delta)/s$



閉ループ系の特性多項式:

$$p(s) = s + 1 + \delta$$

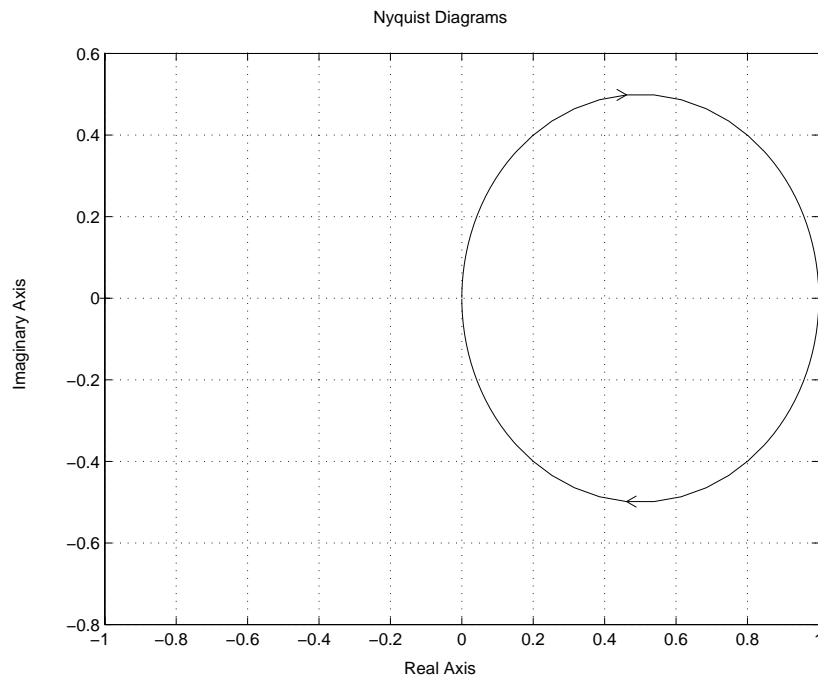
(1) δ がゲインであるとき, 閉ループ極:

$$s = -(1 + \delta) < 0 \text{ (安定)} \quad \forall -1 < \delta < 1$$

(2) δ が位相変動を含む場合、 $\frac{1}{s+1}$ のナイキスト軌跡から、

$$|\delta| < 1$$

ならば、開ループ伝達関数 $\delta \frac{1}{s+1}$ のナイキスト軌跡は点 -1 を通らない。よって、閉ループ系はやはり安定である。



公称開ループ系の
ナイキスト軌跡

$$\|M\|_{\infty} = \left\| \frac{1}{s+1} \right\|_{\infty} = 1$$

なので、ここで示した結果は小ゲイン定理と一致する.

$|\delta| \geq 1$ の場合 (小ゲイン定理を満たさない),

$$\delta = -1$$

とおくと, 閉ループ極:

$$s = 0 \quad (\text{不安定})$$

よって, 小ゲイン定理が必要条件でもあることを確認できた.

ロバスト安定の条件

感度関数 S と相補感度関数 T :

$$S(s) = \frac{1}{1 + PK}, \quad T(s) = \frac{PK}{1 + PK}$$

表 2.1 **ロバスト安定性の判別条件**

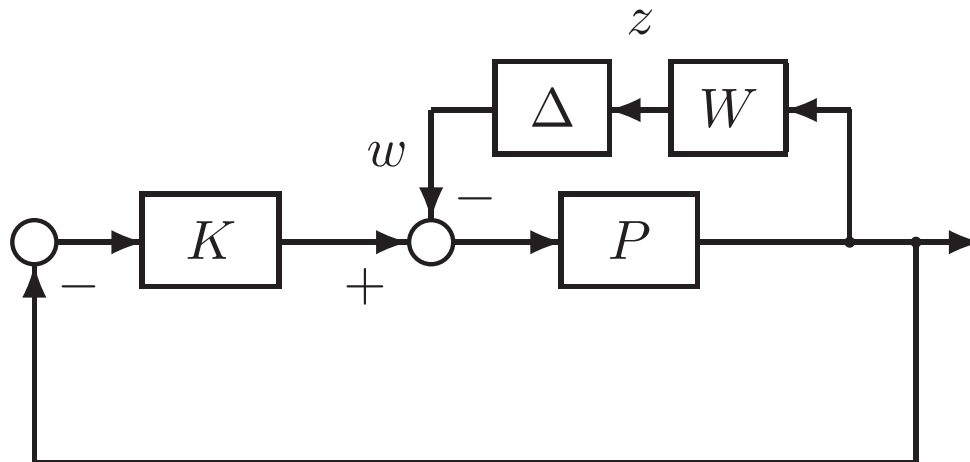
W 安定, Δ 安定, $\|\Delta\|_\infty < 1$, (P, K) 安定

変動モデルの集合	ロバスト安定判別条件
$(1 + \Delta W)P$	$\ WT\ _\infty \leq 1$
$(1 + \Delta W)^{-1}P$	$\ WS\ _\infty \leq 1$
$P + \Delta W$	$\ WKS\ _\infty \leq 1$
$P(1 + \Delta WP)^{-1}$	$\ WSP\ _\infty \leq 1$

例題 2.9 フィードバック型変動の場合について証明しよう.

- ◇ 閉ループ系のブロック線図を変換し, 変動と固定した伝達関数が分かれた閉ループ系に書き換え, 小ゲイン定理に帰着することによって示す.

step 1 Δ の入出力をそれぞれ z , w と記す .

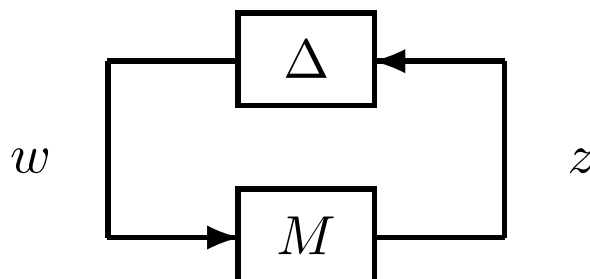


フィードバック型変動 1

Step 2 w から z まで伝達関数

$$z = Mw, \quad M = -W \frac{P}{1 + PK} = -WPS$$

を求め, 閉ループ系を下の図に変形する.



変形後の閉ループ系

Step 3 小ゲイン定理より, ロバスト安定条件

$$1 \geq \|M\|_{\infty} = \|-WPS\|_{\infty} = \|WPS\|_{\infty}$$

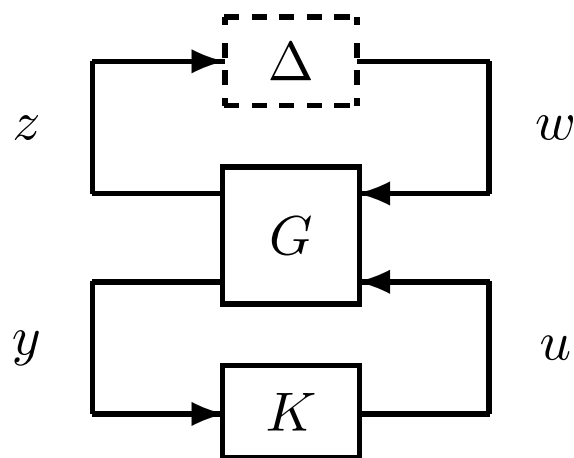
を得る .

\mathcal{H}_∞ 公称性能とロバスト安定性の等価性

- ◇ ロバスト制御問題では, ロバスト安定性と制御性能の二つの異なった仕様が存在する. 同一仕様に変換しなければ, 設計は行なえない.
- ◇ 幸い, 性能指標を伝達関数の \mathcal{H}_∞ ノルムで測るとき, ロバスト安定性との間に等価関係が成立する.

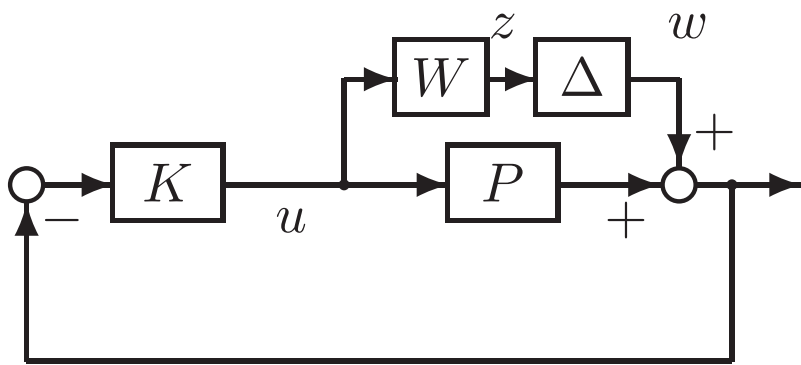
定理 2.2

1. $\|\Delta\|_\infty \leq 1$ の変動をもつ閉ループ系のロバスト安定性は, 変動 Δ の出力からその入力までの公称閉ループ伝達関数 H_{zw} の \mathcal{H}_∞ ノルムを 1 未満にすることと等価である.
2. 公称閉ループ伝達関数 H_{zw} の \mathcal{H}_∞ ノルムを 1 未満にすることは, その入出力間に仮想変動 $\|\Delta\|_\infty \leq 1$ を接続したときの閉ループ系のロバスト安定性と等価である.

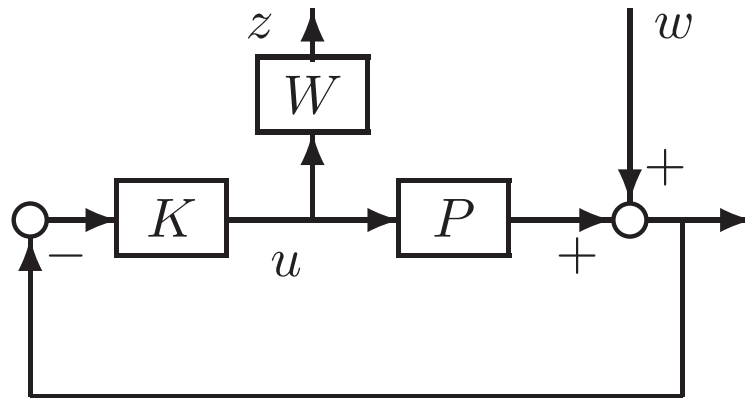


例 2.10 加法変動の場合 :

- ロバスト安定 $\Leftrightarrow \|TW\|_{\infty} < 1$ かつ (P, K) が安定 (表 2.1 より)
- \Leftrightarrow 仮想外乱 w がプラント入力 u に与える影響を抑制する



ロバスト安定問題

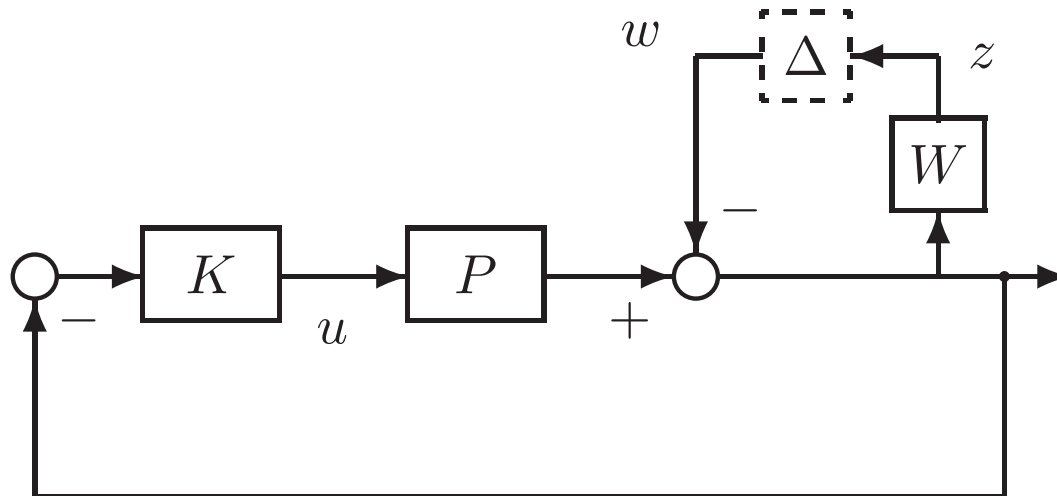


等価外乱制御問題

例 2.11 感度低減の場合 :

$$\|WS\|_{\infty} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \text{プラント集合 } \left\{ \tilde{P} = \frac{P}{1 + \Delta W}, \|\Delta\|_{\infty} < 1 \right\}$$

かつ (P, K) が安定 をロバスト安定にする (表 2.1 より)



感度問題とロバスト安定問題との等価性

ロバスト性能の(十分)条件

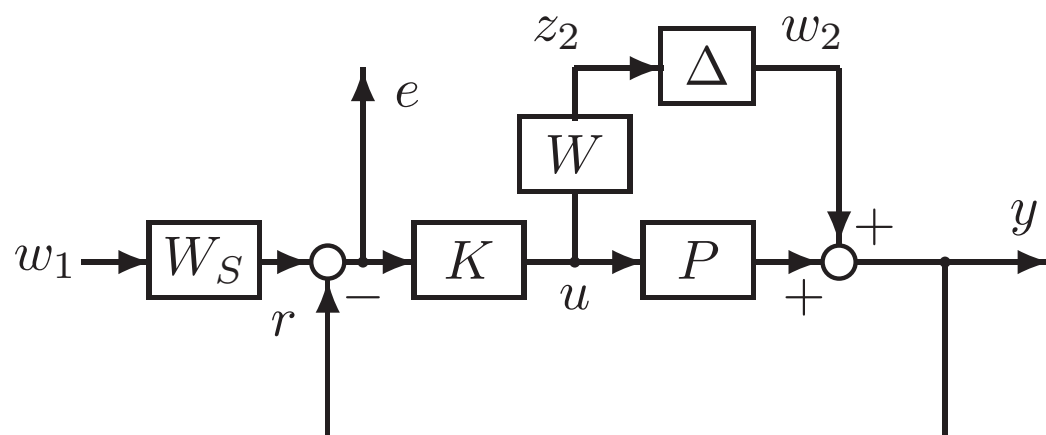
例 2.12 周波数特性が $W_S(s)$ である目標値に追従する問題を考えよう.

プラント :

$$\tilde{P} = P + \Delta W, \quad \|\Delta\|_\infty \leq 1$$

制御目標 : 追従誤差を小さく抑えること

$$\left\| W_S \frac{1}{1 + (P + \Delta W)K} \right\|_\infty < 1$$



ロバスト追従問題

ロバスト安定性を保証するため,

$$\|WKS\|_{\infty} < 1$$

ところで

$$\begin{aligned} W_S \frac{1}{1 + (P + \Delta W)K} &= W_S \frac{1}{1 + PK} \times \frac{1}{1 + \Delta WKS} \\ &= W_S S(1 + \Delta WKS)^{-1} \end{aligned}$$

$\|WKS\|_{\infty} < 1$, すなわちロバストであっても, ある周波数において $|1 + \Delta WKS| \ll 1$ とする変動がある. この変動 Δ に関して, 追従性は極端に悪化する.

結局, ロバスト追従を実現するには

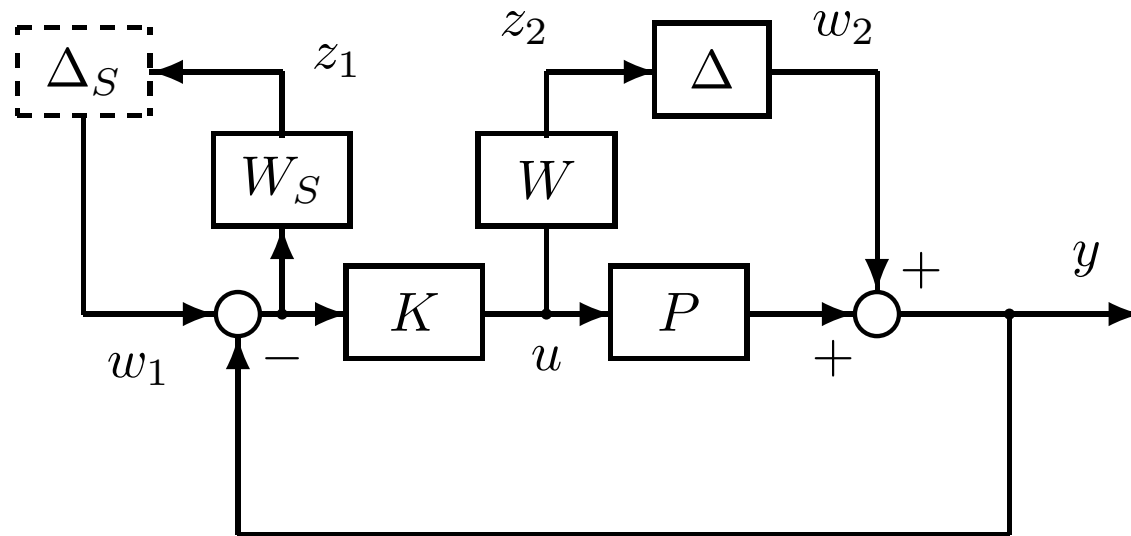
$$\|WKS\|_{\infty} < 1 \quad \text{かつ} \quad \|W_S S(1 + \Delta WKS)^{-1}\|_{\infty} < 1$$

が**同時に成立**しなければならない.

- ◇ ロバスト性能の条件は二つの \mathcal{H}_{∞} ノルム条件となっており, その内一つは変動を含む. 設計を行うため, 二つのノルム条件を変動を含まない一つの条件に帰着する必要がある.

例 2.13 上述の問題は, つぎのように解くことができる.

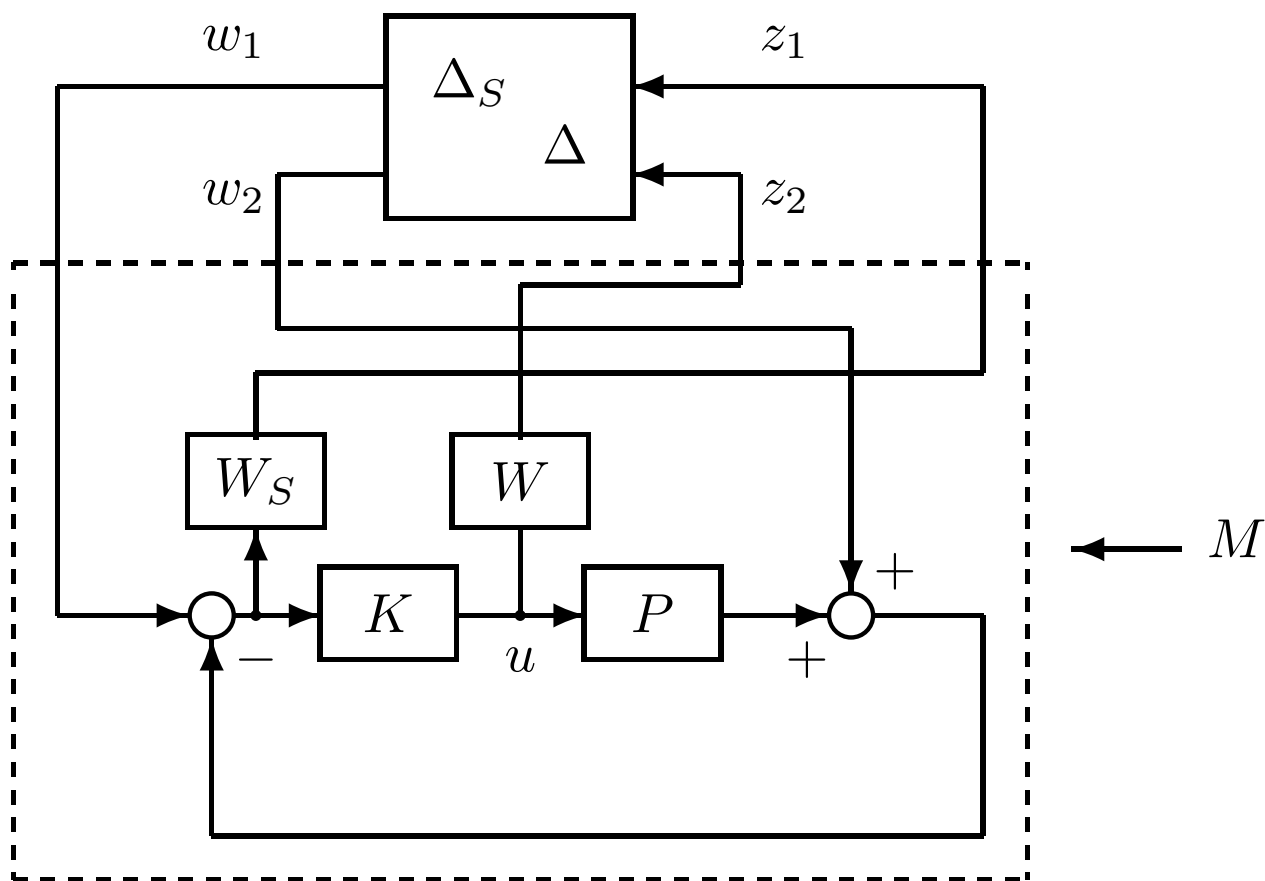
Step 1 定理 3.2 によれば, ロバスト性能問題は, 仮想変動 Δ_S ($\|\Delta_S\|_\infty \leq 1$) を接続したときのロバスト安定問題と等価である.



等価ロバスト安定問題

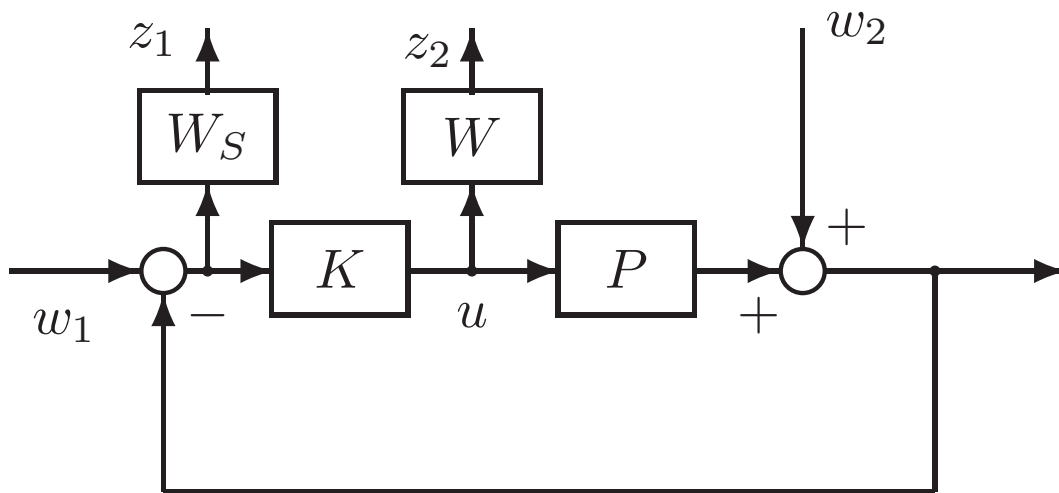
Step 2 対角構造の変動へ変形

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta_S & \\ & \Delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$



Step 3 $\left\| \begin{bmatrix} \Delta_S & \\ & \Delta \end{bmatrix} \right\|_{\infty} \leq 1$ なので、小ゲイン定理よりロバスト安定化の十分条件：

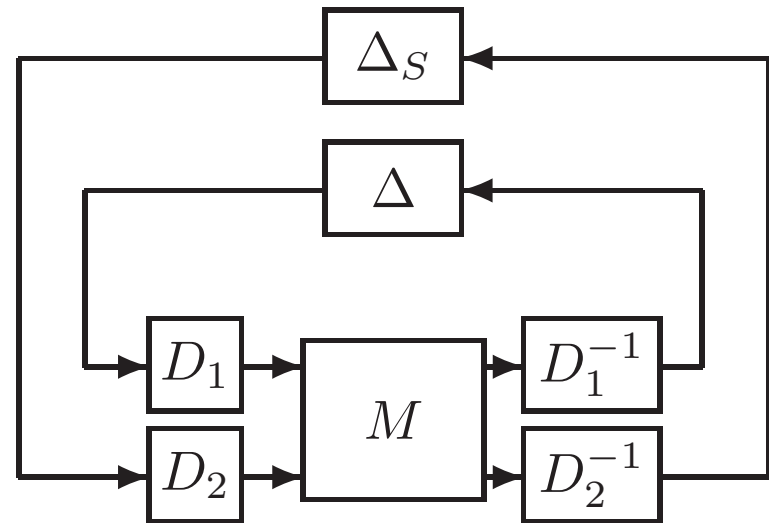
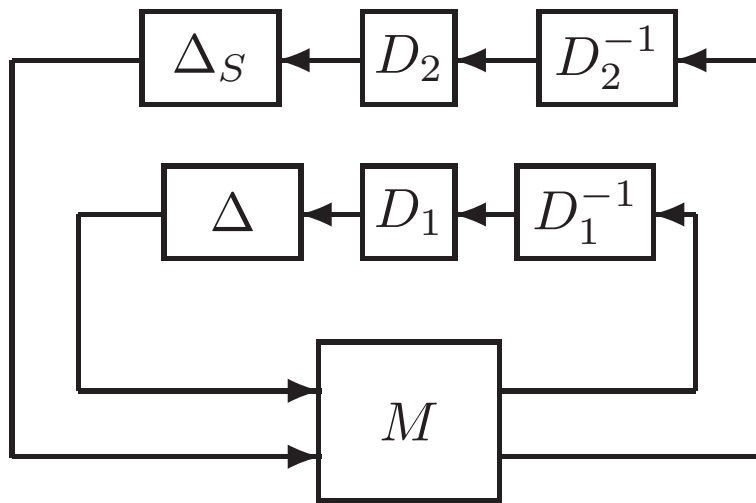
$$\|M\|_{\infty} < 1, \quad M(s) = \begin{bmatrix} W_S S & -W_S S \\ W K S & -W K S \end{bmatrix}$$



外乱制御問題への変換

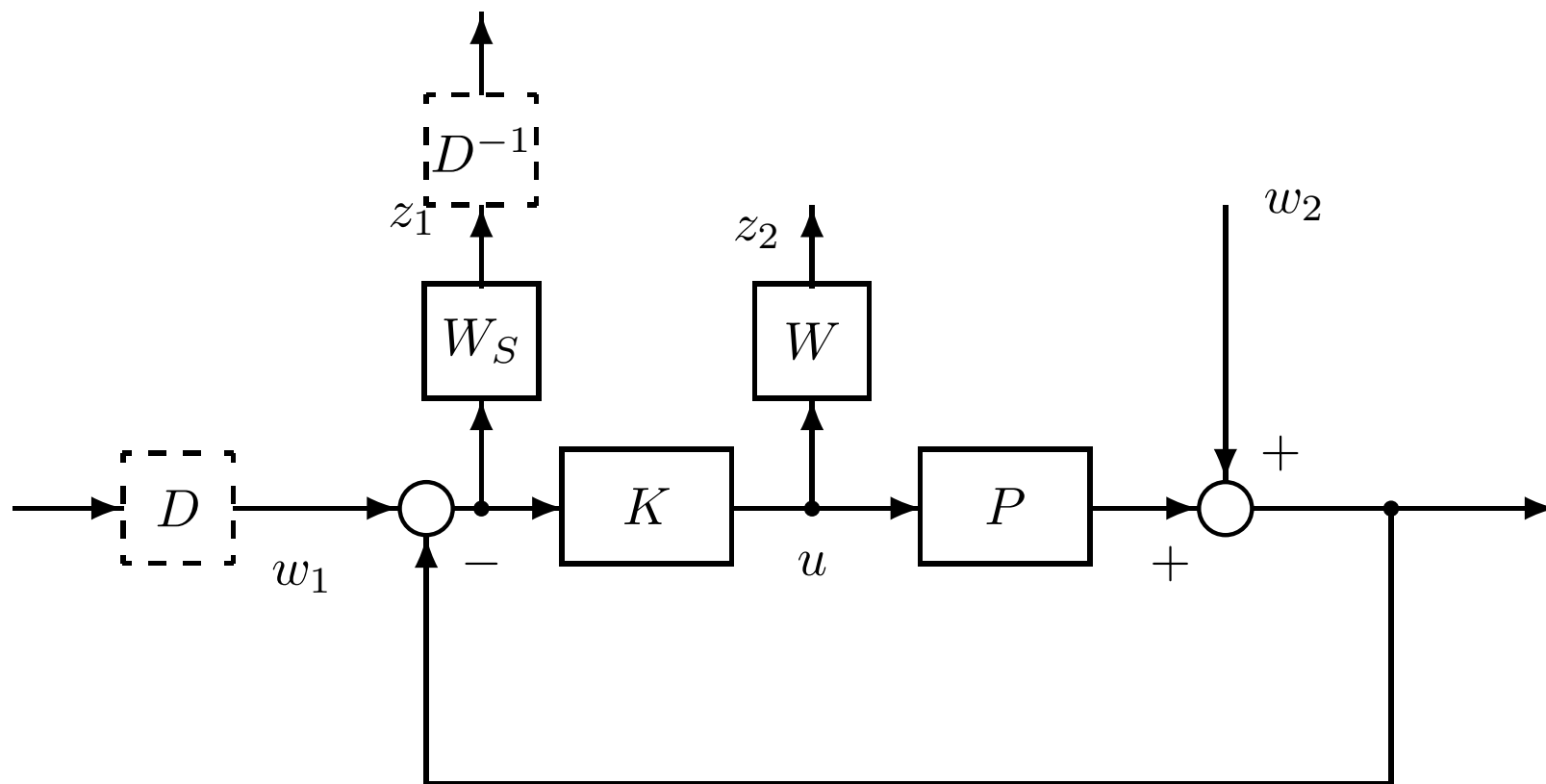
Step 4 安定最小位相のスケーリング関数を挿入しても, 閉ループ系とその内部安定性は変化しない. よって, 次の**スケーリング付きノルム条件** もロバスト性能を保証.

$$\|D^{-1}MD\|_{\infty} < 1, \quad D(s) = \begin{bmatrix} D_1(s) & \\ & D_2(s) \end{bmatrix}$$



- ◇ 制御指標を厳しくすると ($W_S \uparrow$), $\|M\|_{\infty} > 1$
- ◇ スケーリング関数 $D(s)$ を動かし, ノルムを小さくすることができ, 性能改善につながる.

- ◇ 「スケーリングつき H_∞ 問題」と呼ばれる .
- ◇ ロバスト性能 \Rightarrow ロバスト安定 \Rightarrow 公称性能 (スケーリングつき)



スケーリングつき外乱制御問題

第3章 ロバスト制御設計法1 : \mathcal{H}_∞ 制御

- ◇ 外乱制御と伝達行列の \mathcal{H}_∞ ノルム
- ◇ 評価関数としての一般化フィードバック系
- ◇ 一般化プラントの状態方程式の求め方
- ◇ Riccati 方程式解法
- ◇ 正則条件が成立しない場合の対応
- ◇ LMI 解法
- ◇ 一般化プラントの設定
- ◇ 重み関数の選び方
- ◇ 実習 : (1) ハードディスクのヘッド位置決め制御 , (2) 2 慣性系の位置決め制御
- ◇ 実例 : 自動車変速器の変速ショック低減制御

記号集

◇ 伝達行列

$$\begin{aligned} D + C(sI - A)^{-1}B &= (A, B, C, D) \\ &= \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right] \end{aligned}$$

◇ 線形分数変換

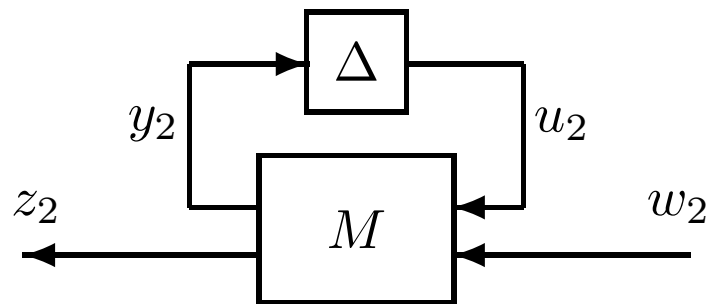
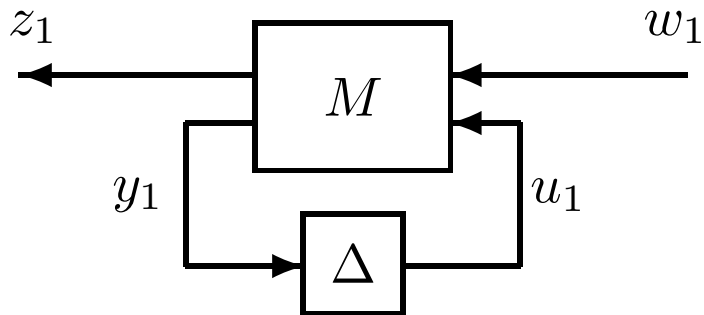
$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}$$

Δ に関する下 LFT:

$$\mathcal{F}_l(M, \Delta) := M_{11} + M_{12}\Delta(I - M_{22}\Delta)^{-1}M_{21}$$

Δ に関する上 LFT :

$$\mathcal{F}_u(M, \Delta) = M_{22} + M_{21}\Delta(I - M_{11}\Delta)^{-1}M_{12}$$



左の図：

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} w_1 \\ u_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ u_1 \end{bmatrix}$$

$$u_1 = \Delta y_1$$

$$z_1 = \mathcal{F}_\ell(M, \Delta)w_1$$

右の図：

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} u_2 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ w_2 \end{bmatrix}$$

$$u_2 = \Delta y_2$$

$$z_2 = \mathcal{F}_u(M, \Delta)w_2$$

伝達行列 \mathcal{H}_∞ ノルムと入出力の関係



$$\|G\|_\infty = \max_{\|u\|_2 \neq 0} \frac{\|y\|_2}{\|u\|_2} \geq \frac{\|y\|_2}{\|u\|_2}$$

- ◇ 一つの外乱でなく, **外乱集合を制御する問題と対応** .
- ◇ $\|y\|_2/\|u\|_2$ は入出力のエネルギーの比であり, すべての入力 u について計算したこの比の最大値は $\|G\|_\infty$ となる .
- ◇ 外乱 $u(t)$ の応答 $y(t)$ を小さくするには,

$$\|G\|_\infty \rightarrow 0$$

とすればよい . また, 外乱応答の減衰率を小さい数 $\gamma > 0$ 未満にしたいとき, 次式のようにすればよい。

$$\|G\|_\infty < \gamma$$

外乱制御と重みの導入（重要）

$$\|G\|_{\infty} = \max_{\omega} |G(j\omega)|$$

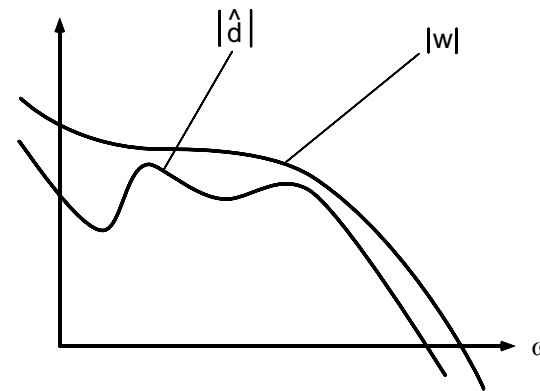
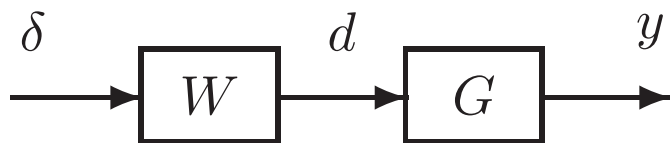
がインパルス入力の周波数応答の最大値である．外乱 d のモデル $W(s)$ が分かれば, $y(t)$ は GW のインパルス応答となる．指定値 γ について

$$\|\hat{y}\|_{\infty} = \|GW\|_{\infty} < \gamma$$

が成立すれば外乱応答は抑えられる．これは**重み付き \mathcal{H}_{∞} 問題** といい, $W(s)$ は重み関数と呼ばれる．さらに,

$$|\hat{d}(j\omega)| \leq |W(j\omega)|, \quad \forall \omega$$

の外乱 $d(t)$ についても同じことが言える．



一般化プラントの導入

例 3.1 車間距離制御問題:

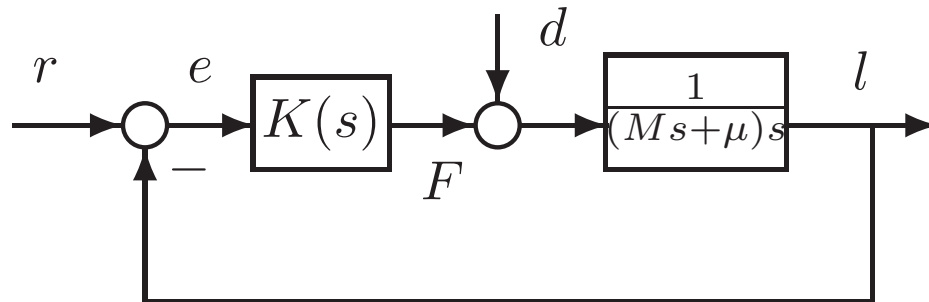
質量の変化:

$$M = M_0 + \Delta c, \quad |\Delta| \leq 1$$

実車モデル:

$$\tilde{P} = \frac{P}{1 + \Delta W}, \quad |\Delta| \leq 1$$

$$P = \frac{1}{(M_0 s + \mu)s}, \quad W = \frac{cs}{M_0 s + \mu}$$

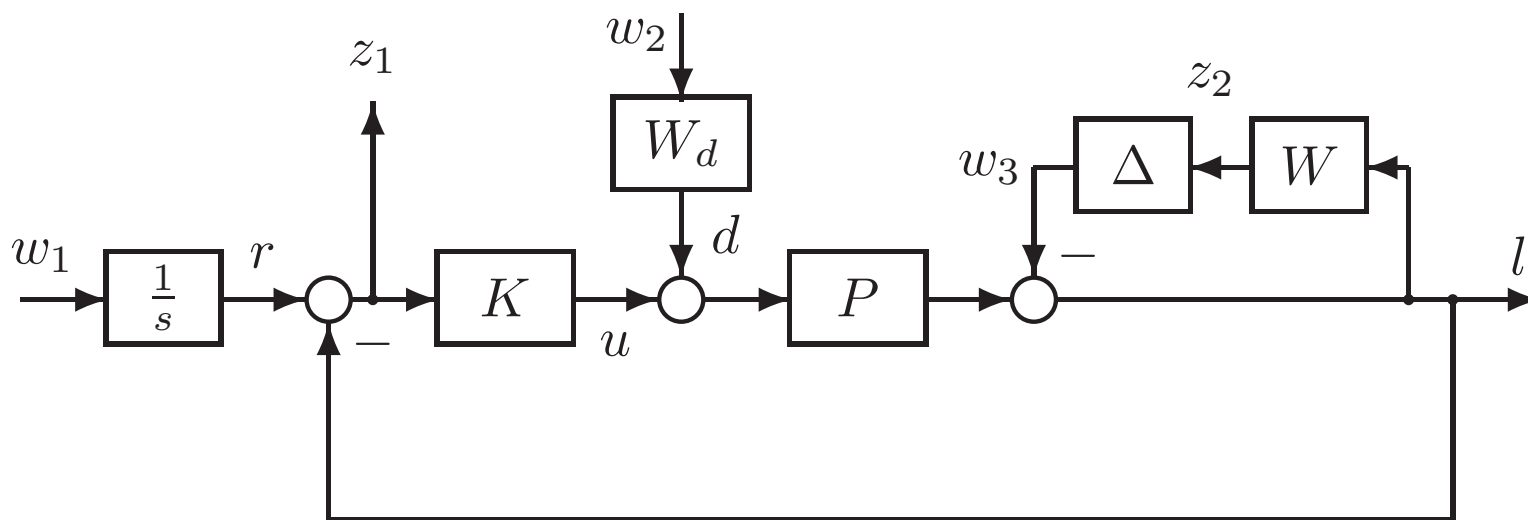


目標値 $r(t)$: 一定値, 走行抵抗 $d(t)$:

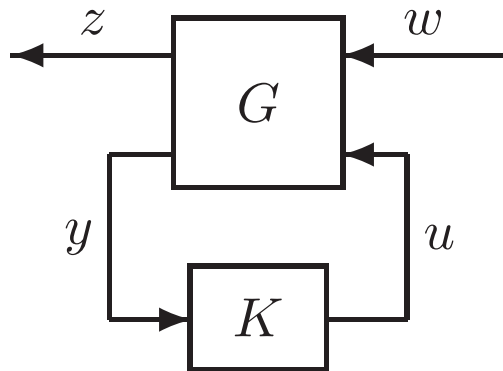
$$|\hat{d}(j\omega)| \leq |W_d(j\omega)| \quad \forall \omega$$

ロバスト性能条件により, $(w_1, w_2, w_3) \rightarrow (z_1, z_2)$ の重み付き公称閉ループ伝達行列の \mathcal{H}_∞ ノルムを 1 未満にすることができれば, ロバスト追従と外乱抑制が保証される.

- ◇ $(z_1, z_2) \neq$ 測定出力 l , $(w_1, w_2, w_3) \neq$ 実際の外乱 (r, d)
- ◇ 新しい入出力表現法が必要となる.



一般化フィードバック系



$$\begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} = G \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix}$$
$$u = Ky$$

- ◇ G : プラントと重みを含んだ**一般化プラント**
- ◇ K : 制御器
- ◇ z : 制御性能およびモデル変動を評価するための出力ベクトルで,
評価出力 という
- ◇ y : 制御器への入力 (例えば, センサで測定している出力や追従誤差) ベクトルで, **測定出力** という
- ◇ w : 制御性能およびモデル変動を評価するための外部入力ベクトルで, **外乱** という
- ◇ u : アクチュエータに加える指令ベクトルで, **制御入力** という

例 3.1 のロバスト追従問題では,

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & -PW_d & 1 & -P \\ 0 & WPW_d & -W & WP \\ \frac{1}{s} & -PW_d & 1 & -P \end{bmatrix}$$

$$w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}, \quad z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}, \quad y = r - l$$

さらに, $w \rightarrow z$ までの閉ループ伝達行列を $H_{zw}(s)$ とすると, ロバスト追従の十分条件は

$$\|H_{zw}\|_{\infty} < 1$$

で与えられる.

- ◇ この問題は閉ループ伝達関数の \mathcal{H}_{∞} ノルムを与えられた値未満にする問題なので, \mathcal{H}_{∞} 制御問題と呼ばれる.

一般化フィードバック系の範疇

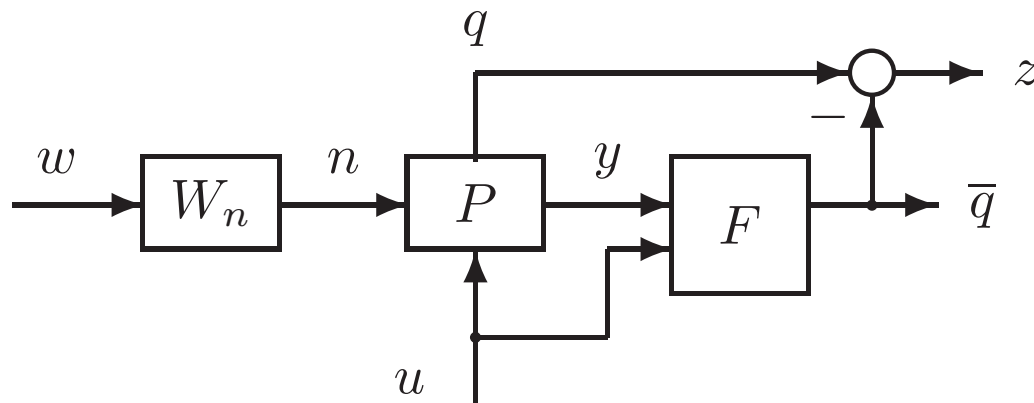
- ◇ フィードバック問題だけでなく、フィルター (フィードフォワード) の問題や 2 自由度系の問題も含む。

例 3.2 フィルターの設計問題

目的: 雑音 n の混ぜた出力 y から信号 $q = Q[w \ u]^T$ を推定 (\bar{q})

設計基準: 推定誤差 $z = q - \bar{q}$ をなるべく小さくしたい

$$\begin{bmatrix} z \\ y \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 & -I \\ P_1 W_n & P_2 & 0 \\ 0 & I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ u \\ \bar{q} \end{bmatrix}, \quad \bar{q} = F \begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix}$$



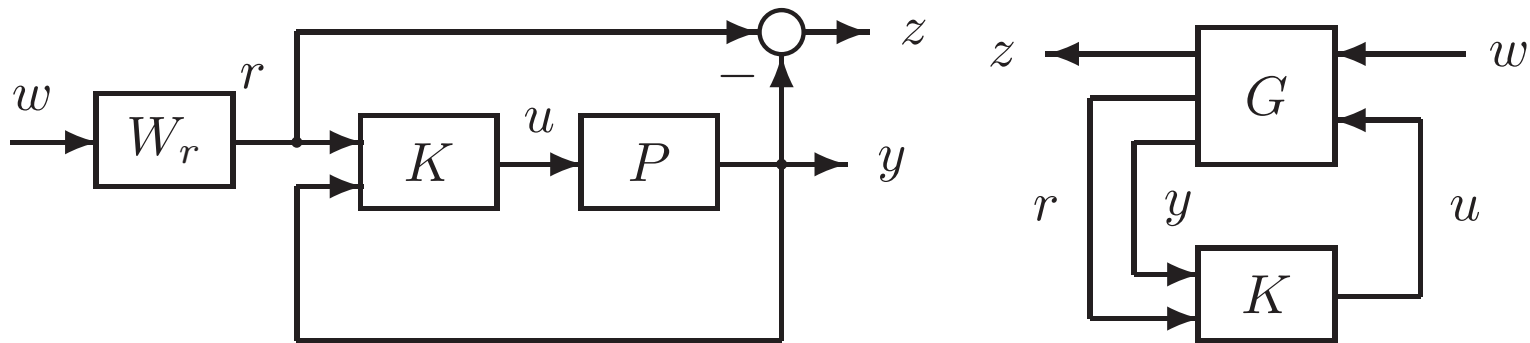
フィルタリング問題

例 3.3 2 自由度制御系

目的： 追従誤差 $z = r - y$ をなるべく小さくする

$$\begin{bmatrix} z \\ r \\ y \end{bmatrix} = G \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_r & -P \\ W_r & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix}$$

$$u = K \begin{bmatrix} r \\ y \end{bmatrix}$$

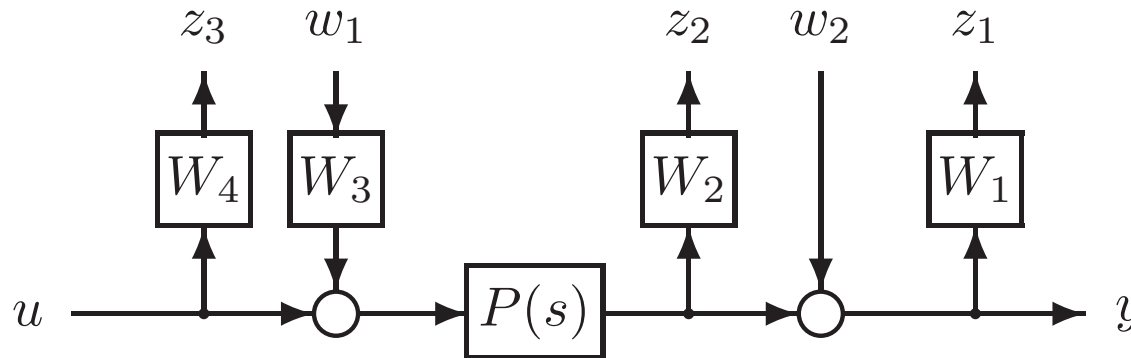


2 自由度系問題の一般化フィードバック系への帰着

一般化プラントの状態方程式の求め方

- ◇ 推奨法：一般化プラントのブロック線図から数値的に求める
- ◇ MATLAB コマンド: `sysic`

例 3.1



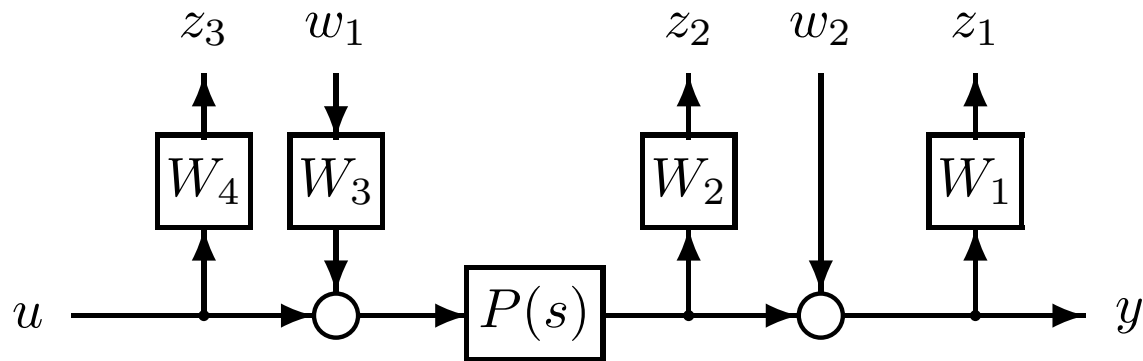
%%% システムの結合

```
systemnames='P W1 W2 W3 W4';           %結合するブロックの名前を設定
inputvar=' [w1; w2; u]';               %入力変数の名前を設定
outputvar=' [W1; W2; W4; P+w2]';       %出力変数の名前
input_to_P=' [u+W3]';                  %P への入力を設定
input_to_W1=' [P+w2]';                 %W1 への入力を設定
```

```

input_to_W2=' [P] ' ;           %W2 への入力を設定
input_to_W3=' [w1] ' ;         %W3 への入力を設定
input_to_W4=' [u] ' ;           %W4 への入力を設定
sysoutname='HPlant' ;          %結合後のプラント名を与える
cleanupsysic='yes' ;           %前回の結合データをリセット
sysic ;                          %結合を開始
[a,b,c,d]=unpck(HPlant) ;      %一般化プラントを取り出す

```



- ◇ 求めた状態方程式を数値的によいものにまず変換してから hinfsyn を使うべきである. 一般的に, **平衡実現** というものに変換する.

```
> [HP,sv]=sysbal(HPlant);
```

平衡実現された一般化プラントは HP となる。

\mathcal{H}_∞ 制御問題とは

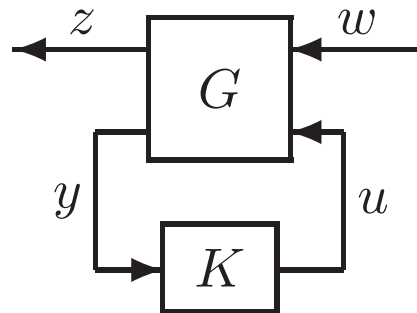
一般化プラント $G(s)$

$$G(s) = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{array} \right]$$

について, $w \rightarrow z$ の (重みつき) 閉ループ伝達行列

$$H_{zw}(s) = G_{11} + G_{12}K(I - G_{22}K)^{-1}G_{21}$$

の \mathcal{H}_∞ ノルムを与えられた値 $\gamma > 0$ 未滿にする制御器を設計



◇ \mathcal{H}_∞ 制御問題に対する解法 :

(1) Riccati 方程式解

(2) LMI(線形行列不等式) 解

Riccati 方程式解法 (ロバスト, μ ツールボックス)

次の**正則条件** が仮定される。

(A1) (A, B_2) は可安定, (C_2, A) は可検出

$$(A2) \quad D_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}, \quad D_{21} = \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix}$$

(A3) $\begin{bmatrix} A - j\omega I & B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{bmatrix}$ はすべての ω について列フルランク

(A4) $\begin{bmatrix} A - j\omega I & B_1 \\ C_2 & D_{21} \end{bmatrix}$ はすべての ω について行フルランク

- ◇ (A1) : 重み関数がすべて安定であること
- ◇ (A2) : すべての制御入力 that 独立に評価されること;
すべての測定出力に外乱が混入していること
- ◇ (A3) と (A4): 技術的な理由で置いたもの

可解条件

Riccati 方程式 1:

$$\begin{aligned} & (A - BR^{-1}D_{1\bullet}^T C_1)^T X_\infty + X_\infty (A - BR^{-1}D_{1\bullet}^T C_1) - X_\infty BR^{-1}B^T X_\infty \\ & + C_1^T (I - D_{1\bullet} R^{-1} D_{1\bullet}^T) C_1 = 0 \end{aligned} \quad (ARE1)$$

Riccati 方程式 2:

$$\begin{aligned} & (A - B_1 D_{\bullet 1}^T \tilde{R}^{-1} C) Y_\infty + Y_\infty (A - B_1 D_{\bullet 1}^T \tilde{R}^{-1} C)^T - Y_\infty C^T \tilde{R}^{-1} C Y_\infty \\ & + B_1 (I - D_{\bullet 1}^T \tilde{R}^{-1} D_{\bullet 1}) B_1^T = 0 \end{aligned} \quad (ARE2)$$

$$R := D_{1\bullet}^T D_{1\bullet} - \begin{bmatrix} \gamma^2 I_{m_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{1\bullet} := [D_{11} \quad D_{12}]$$

$$\tilde{R} := D_{\bullet 1} D_{\bullet 1}^T - \begin{bmatrix} \gamma^2 I_{p_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{\bullet 1} := \begin{bmatrix} D_{11} \\ D_{21} \end{bmatrix}$$

$$D_{11} = \begin{bmatrix} D_{1111} & D_{1112} \\ D_{1121} & D_{1122} \end{bmatrix}$$

DGKF 可解条件

仮定 (A1)–(A4) が成り立つとする. 一般化プラント G を内部安定化し, かつ $\|\mathcal{F}_\ell(G, K)\|_\infty < \gamma$ を満たす制御器 $K(s)$ の存在条件:

1. $\gamma > \max(\sigma_{\max}[D_{1111}, D_{1112},], \sigma_{\max}[D_{1111}^T, D_{1121}^T])$
2. (ARE1) が $A - BR^{-1}(D_{1\bullet}^T C_1 + B^T X_\infty)$ を安定化する解 $X_\infty \geq 0$ をもつ
3. (ARE2) が $A - (B_1 D_{\bullet 1}^T + Y_\infty C^T) \tilde{R}^{-1} C$ を安定化する解 $Y_\infty \geq 0$ をもつ
4. $\rho(X_\infty Y_\infty) < \gamma^2$

(1) \mathcal{H}_∞ 制御問題が解を持つか否かはノルム上界 (γ) の値による. これは, 制御系が任意に小さいノルムを達成できないことに起因するものである. γ の値が小さすぎると, \mathcal{H}_∞ 制御の解は存在しなくなる可能性がある.

(2) γ の値は設計された制御系の性能の良さを表している. γ が小さければ小さいほど制御系の性能はよい.

2分法アルゴリズム：

1. \mathcal{H}_∞ 制御問題が解を持つような十分に大きい γ_{\max} と解を持たないような十分に小さい γ_{\min} を選んでおく.
2. $\gamma = \frac{\gamma_{\max} + \gamma_{\min}}{2}$ とおき, 可解条件を調べる. 解が存在するならば, $\gamma_{\max} = \gamma$ と置き換える. 解が存在しなければ, $\gamma_{\min} = \gamma$ とおく.
3. ステップ 2 に戻り, 計算を繰り返す. $\gamma_{\max} - \gamma_{\min}$ が許容できる十分に小さい範囲に入ったら, 計算を終了させ, このときの γ に関する \mathcal{H}_∞ 制御器を求める.

上記の 2 分法アルゴリズムは Matlab のコマンド `hinfsyn` に組み込まれている. 使うときは, γ の上界 γ_{\max} と下界 γ_{\min} , および計算を止める誤差範囲だけを与えれば, 勝手にやってくれる.

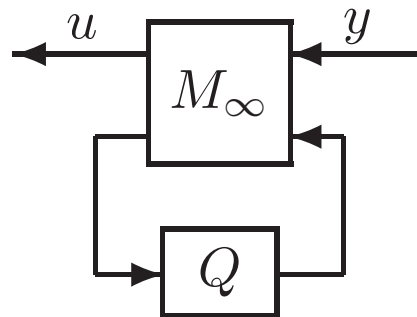
\mathcal{H}_∞ 制御器の公式

\mathcal{H}_∞ 制御問題が解を持つとき、解は一意的ではなく、自由パラメータ Q でパラメータ化される。

任意の $Q \in \mathcal{RH}_\infty$, $\|Q\|_\infty < \gamma$ に対して

$$K = \mathcal{F}_\ell(M_\infty, Q), \quad M_\infty = \left[\begin{array}{c|cc} \hat{A} & \hat{B}_1 & \hat{B}_2 \\ \hline \hat{C}_1 & \hat{D}_{11} & \hat{D}_{12} \\ \hat{C}_2 & \hat{D}_{21} & 0 \end{array} \right]$$

である。 $M_\infty(s)$ は一般化プラントのデータと Riccati 方程式の解から求められる。



正則条件が成立しない場合の対応

(1) D_{12} が列フルランクでない場合

新たに評価出力

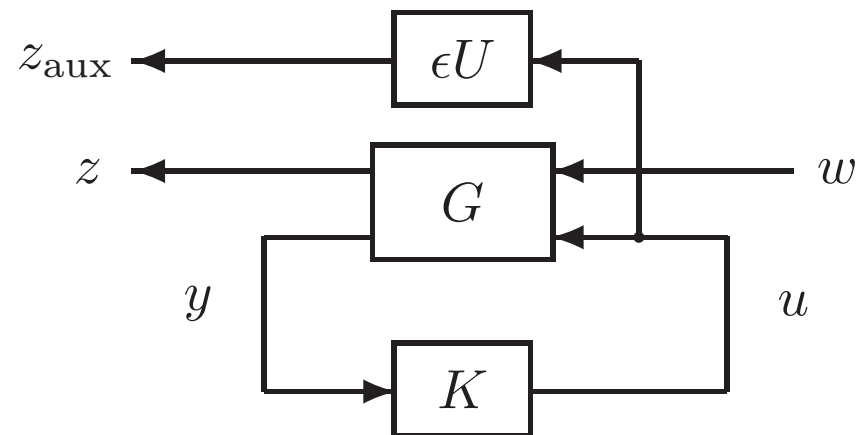
$$z_{\text{aux}} = \epsilon U u$$

を追加する. 行列 U は

$$\begin{bmatrix} D_{12} \\ U \end{bmatrix}$$

が列フルランクとなるように選ぶ.
新一般化プラント:

$$\begin{bmatrix} z \\ z_{\text{aux}} \\ y \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ 0 & 0 & \epsilon U \\ \hline C_2 & D_{21} & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix}$$



(2) D_{21} が行フルランクでない場合
 新たに外乱

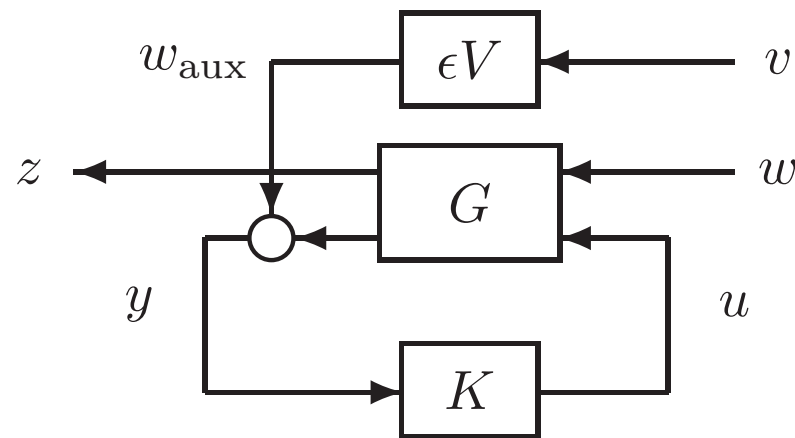
$$w_{\text{aux}} = \epsilon V v$$

を追加する. 行列 V は

$$\begin{bmatrix} D_{21} & V \end{bmatrix}$$

が行フルランクとなるように選ぶ. 新一般化プラント:

$$\begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|ccc} A & B_1 & 0 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & 0 & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & \epsilon V & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} w \\ v \\ u \end{bmatrix}$$



D_{21} を行フルランクにする

LMI 解法 (LMI ツールボックス)

特徴： **正則条件** を必要としない, LMI を用いる

(A1) (A, B_2) が可安定, (C_2, A) が可検出

のみが仮定される。幅広く応用できる。

LMI 可解条件

(A1) を仮定する。行列

$$N_Y = [C_2, D_{21}]_{\perp}, \quad N_X = [B_2^T, D_{12}^T]_{\perp}$$

をおく。閉ループ系を内部安定化し、かつ $\|H_{zw}\|_{\infty} < \gamma$ を満たす制御器 $K(s)$ が存在するための必要十分条件は

$$\begin{bmatrix} N_X^T & 0 \\ 0 & I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} AX + XA^T & XC_1^T & B_1 \\ C_1X & -\gamma I_q & D_{11} \\ B_1^T & D_{11}^T & -\gamma I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_X & 0 \\ 0 & I_p \end{bmatrix} < 0$$

$$\begin{bmatrix} N_Y^T & 0 \\ 0 & I_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} YA + A^TY & YB_1 & C_1^T \\ B_1^TY & -\gamma I_p & D_{11}^T \\ C_1 & D_{11} & -\gamma I_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_Y & 0 \\ 0 & I_q \end{bmatrix} < 0$$

$$\begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} \geq 0, \quad \text{rank} \begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} \leq n + n_K$$

を満たす $X > 0$ と $Y > 0$ が存在することである。

一般化プラントの設定

1. 外乱制御の考慮

- ◇ 実際に存在する外乱を特定し, 影響の大きい外乱を選び出す.
- ◇ 外乱の出力応答を必ず評価する.
- ◇ 外乱の周波数特性を調べ, その見積りを重みとする.

2. モデル誤差の考慮

- ◇ パラメータ誤差やモデル化しなかった高周波数帯域の動特性を見積もる.
- ◇ 変動するパラメータが多数存在する場合, 各変動パラメータを別々に変化させ, そのときのプラントのボード線図を調べる. 共振周波数あるいは共振ピーク値にもっとも影響するものを選び出す.
- ◇ ロバスト性の保証には小ゲイン定理を使う. すなわち, 変動のループを切り, 変動 Δ を取り去り, 入出力間の伝達関数の \mathcal{H}_∞ ノルムを評価する.

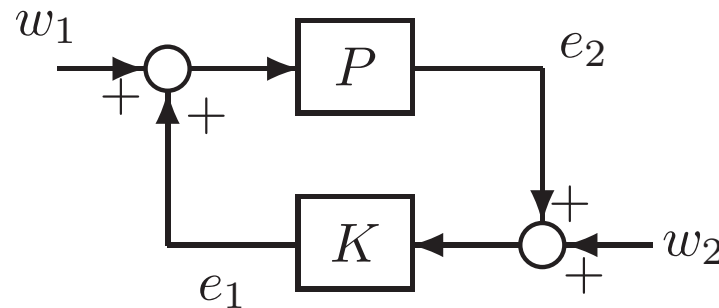
3. 入力飽和の考慮

アクチュエータを飽和させるような制御入力とシステムに悪い影響を及ぼすインパルス状の制御入力を避けるために, 制御入力を必

ず評価に入れる.

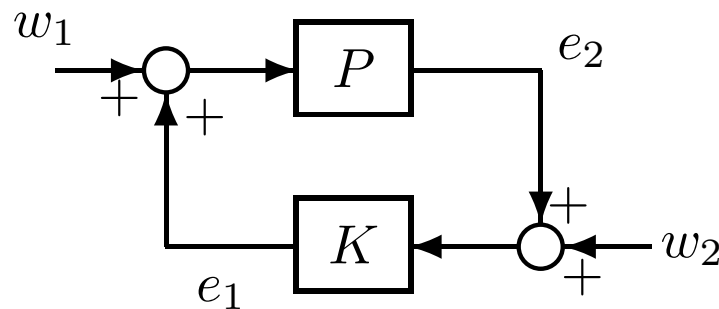
4. 条件 (A3), (A4) の考慮

下図のように, 公称プラント P と制御器 K の接続部に外乱 (w_1, w_2) を入れ, その出力 (e_1, e_2) を評価出力にとれば, 条件 (A3), (A4) はたいてい満足される. 特に, P が虚軸上あるいはその近傍に極もしくは零点をもつ場合, 条件 (A3), (A4) は成立しない可能性が高いので, このような処置が必要になってくる.



評価の取り方

さらに, プラント P と制御器 K の接続部に外乱および評価出力を入れない場合, \mathcal{H}_∞ 設計に際し PK は一つの伝達関数として整形されるから, P と K の間に安定な極零点相殺が起きる. このとき, 公称制御対象 P に虚軸に近い極あるいは零点があると, これは相殺されて, 評価されなかった外乱の応答は極端に悪くなる. このようなことを避けるためにも, 接続部に外乱と評価出力を入れるべきである.



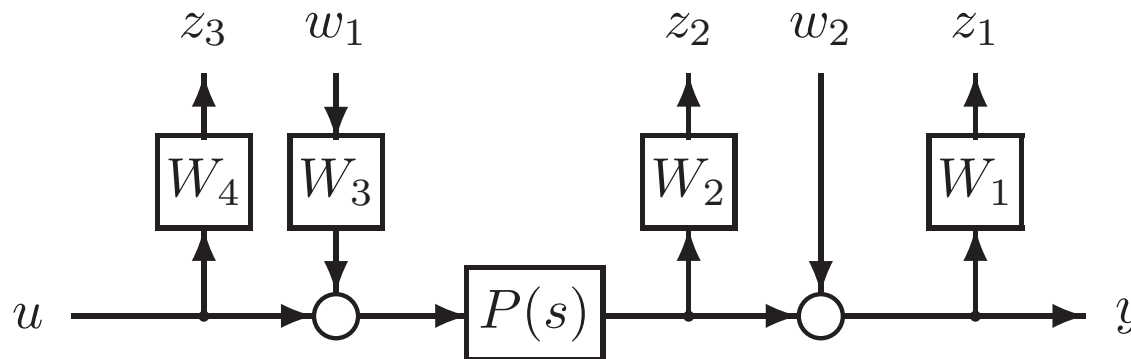
評価の取り方

ハードディスクのヘッド位置決め制御

一般化プラントの選定:

制御の問題点：高周波変動、高速回転時の風外乱（ロバスト外乱抑制問題）

- ◇ w_2 と z_2 は乗法的変動に対するロバスト性を保証する.
- ◇ z_3 は制御入力 u に対する評価である.
- ◇ w_1 と z_1 は外乱応答を評価する.
- ◇ W_2 は乗法変動の幅, W_1 は外乱の動特性を表す. W_3, W_4 はチューニングパラメータである. 主に速応性と入力の大さを調整するために使われる.



重み関数の選び方

1. モデル変動の重み

動的変動

- ◇ 見積もった変動をボード線図上に描き, これを覆うように 1 次ないし 2 次の伝達関数をグラフ上で求める.
- ◇ 折れ線近似で重み関数を決めてから, MATLAB で重みと変動のボード線図を同時に描き, 重みは変動の上にあることを確かめる.
- ◇ 高周波数帯域では制御は行なわないので, この帯域において変動の重みをなるべく高く上げると, 振動的な入力には抑えられる.

パラメータ変動

- ◇ パラメータ変動範囲の見積りを重みとする.
- ◇ 小ゲイン定理はパラメータ変動に対してかなり保守的なので, 変動の重みを実際のパラメータ変動範囲より小さくとる.
- ◇ ロバスト性は変動パラメータの両端点の値に関するシミュレーションか, 根軌跡法や実 μ 解析 (4 章) で確認.

2. 入力の重み

- ◇ 入力重みの効用は制御入力の高周波成分をとる点にある. 基本

的に高域通過伝達関数となる。

- ◇ 速応性の仕様からまず制御帯域を定め、制御帯域においては零に近いゲインとし、制御帯域を超える周波数帯域では高いゲインを持たせる。

3. 性能評価の重み (外乱の動特性)

- ◇ 外乱の重み関数は基本的に低域通過伝達関数となる。
- ◇ 外乱に関する事前情報が分かれば、これをもとにその周波数特性を見積もれる。
- ◇ 重みのゲインの大きさは設計とシミュレーションを繰り返して、試行錯誤的に決める。
- ◇ 性能評価の出力端に重みの動特性、外乱の入力端にゲイン調整のパラメータを置くと効果的である。

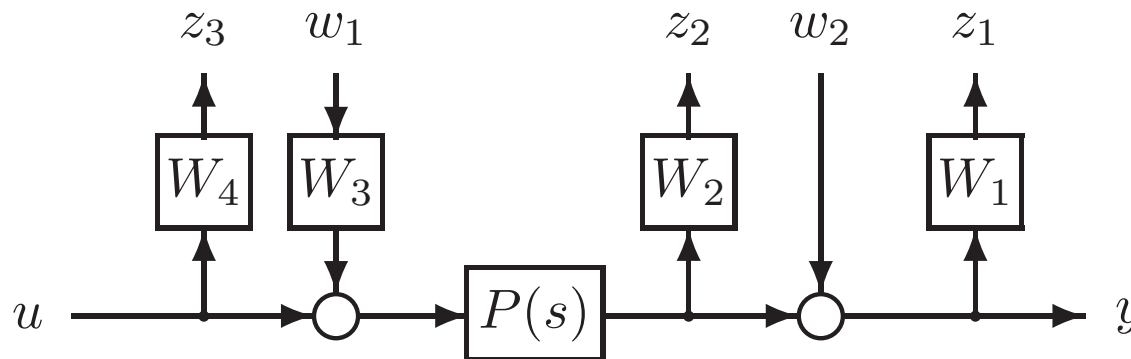
- ### 4. 順序
- :以上の3種類の重みの中に、変動の重みは一番決めやすいので、これを先に決めておく。その後、性能評価の重みと入力重みは制御性能が一番出るように、設計・シミュレーションを繰り返して試行錯誤的に決定する。

ハードディスクのヘッド位置決め制御

一般化プラントの選定:

制御の問題点：高周波変動、高速回転時の風外乱 (ロバスト外乱抑制問題)

- ◇ w_2 と z_2 は乗法的変動に対するロバスト性を保証する.
- ◇ z_3 は制御入力 u に対する評価である.
- ◇ w_1 と z_1 は外乱応答を評価する.
- ◇ W_2 は乗法変動の幅, W_1 は外乱の動特性を表す. W_3, W_4 はチューニングパラメータである. 主に速応性と入力の大さを調整するために使われる.



重み関数の決定

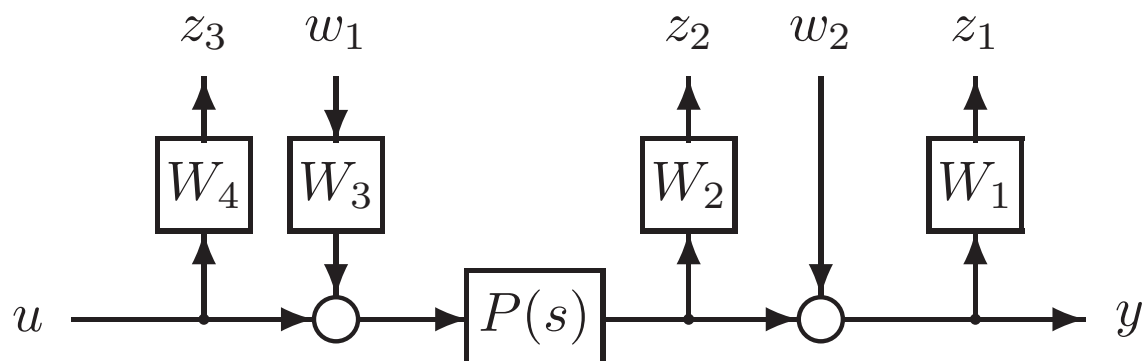
風外乱を**ステップ状の信号**として想定した。乗法変動の重み関数 $W_2(s)$, 外乱の重み $W_1(s)$ は次式に示される。

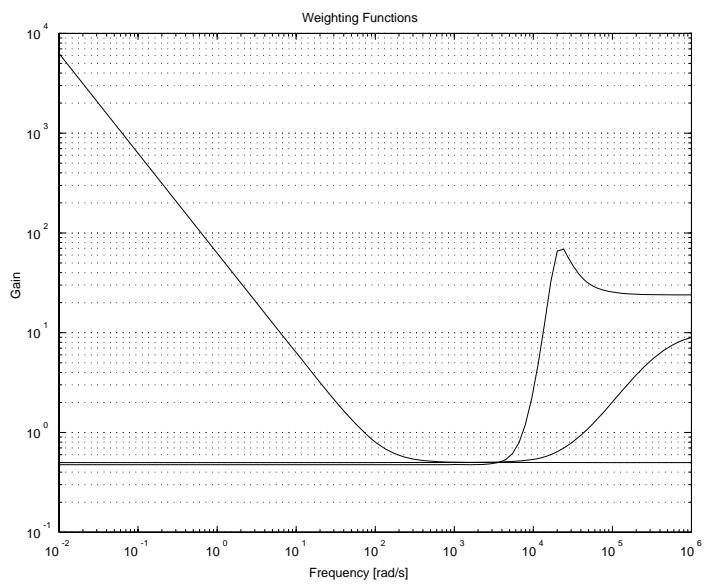
$$W_1(s) = \frac{s + 125.7}{s + 1.0 \times 10^{-4}} \times 0.5$$

$$W_2(s) = \left(\frac{s^2 + 1.0 \times 10^4 s + 5.7 \times 10^7}{s^2 + 1.2 \times 10^4 s + 4.04 \times 10^8} \right)^2 \times 23.9$$

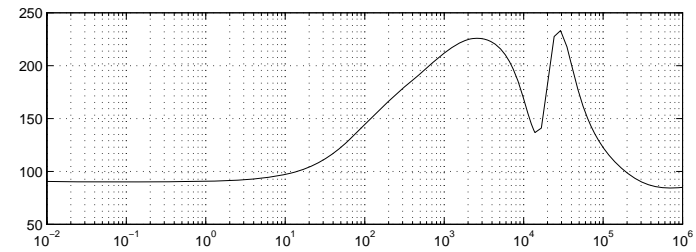
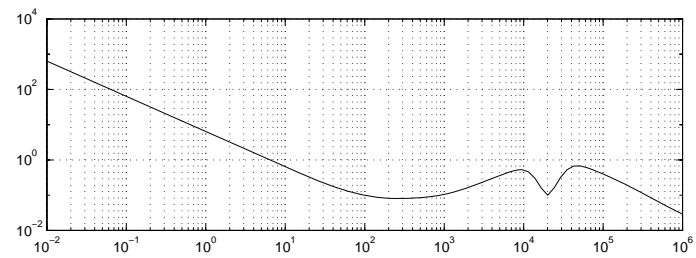
$$W_3 = 0.1$$

$$W_4(s) = \frac{s + 2.5 \times 10^4}{s + 5.0 \times 10^5} \times 10$$

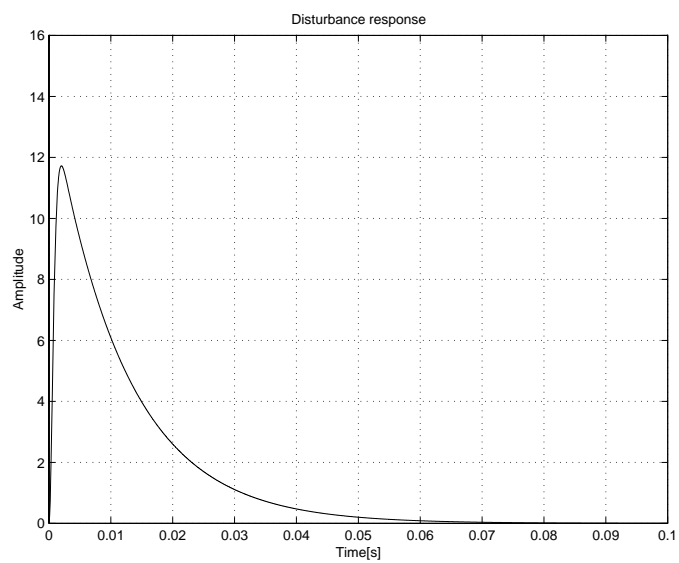




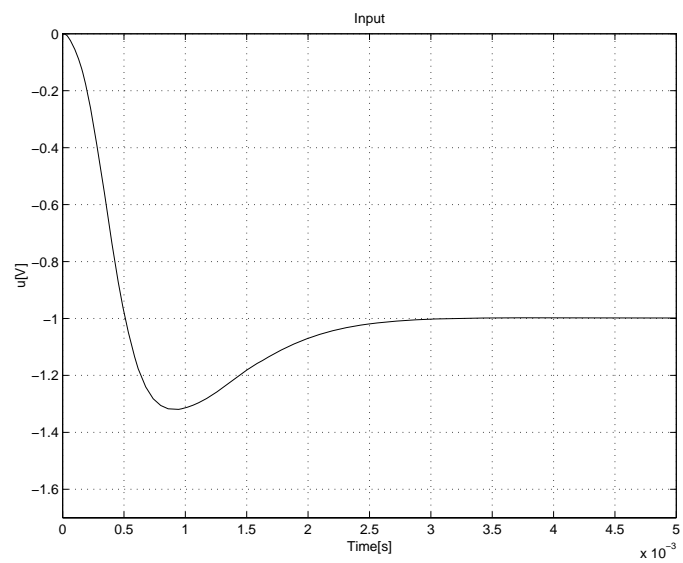
重み



H_{∞} 制御器



単位ステップ外乱の出力応答



入力の応答

設計用 mfile

1. メインファイル: design.m

```
% H 制御設計デモ用
clear
format short e
w=logspace(-2,6,100);
%一般化プラントの作成
gplant                                %サブプログラムを読み込む
%H 制御器の設計
disp('Hoo Controller Design with hinfsys')
K=[];
controller;                            %サブプログラムを読み込む
    disp('Hit any key to plot Bode diagram of Hoo controller')
    pause
if isempty(K)==1
    break;
end;
%制御器ボード線図の表示
contplot;                              %サブプログラムを読み込む
```

```
disp('Hit any key to start the simulation')
pause
%シミュレーション
simu          %サブプログラムを読み込む
disp('Hit any key to end the program')
pause
close all
clc
```

2. 重み関数の設定: gplant.m

%プラントと重みの定義

```
Psys=nd2sys([1],[1 0 0],3.87e7);
W1sys=nd2sys([1 125.7],[1 1e-4],5e-1);
W2num1=[1 1e+4 5.7e+7];
W2den1=[1 1.2e+4 4.04e+8];
W2sys1=nd2sys(W2num1,W2den1);
W2sys=mmult(W2sys1,W2sys1,23.9);
W3sys=0.1;
W4sys=nd2sys([10 10*0.5*5e4],[1 10*5e4]);
%重み関数のボード線図
```

```
Pfr=frsp(Psys,w);
W1fr=frsp(W1sys,w);
W2fr=frsp(W2sys,w);
W3fr=frsp(W3sys,w);
W4fr=frsp(W4sys,w);
figure(1);
vplot('liv,lm',W1fr,W2fr,W3fr,W4fr);
title('Weighting Functions')
xlabel('Frequency [rad/s]')
ylabel('Gain')
grid;
%一般化プラントを作成
systemnames='Psys W1sys W2sys W3sys W4sys';
inputvar=' [w1; w2; u]';
outputvar=' [W1sys; W2sys; W4sys; w2+Psys]';
input_to_W3sys=' [w1]';
input_to_Psys=' [u+W3sys]';
input_to_W1sys=' [Psys+w2]';
input_to_W2sys=' [Psys]';
input_to_W4sys=' [u]';
```

```
sysoutname='Gpsys';  
cleanupsysic='yes';  
sysic;
```

3. \mathcal{H}_∞ 制御器設計 : controller.m

```
%method=='hinfsyn'  
glow=0;ghigh=10;tol=1e-2; % 反復時のノルム下界 ,  
                           上界と許容誤差を設定  
while isempty(K)==1 & ghigh<1e6;  
    [K,CL,gopt]=hinfsyn(Gpsys,1,1,glow,ghigh,tol);  
    if isempty(K)==1 & ghigh<1e6;  
        ghigh=ghigh*10;          %ghigh を 10 倍に設定  
        tol=ghigh*1e-3;  
    end  
    clear CL ghigh glow tol  
end;
```

4. \mathcal{H}_∞ 制御器のボード線図 : contplot.m

```
Kfr=frsp(K,w);  
figure(2);          %2 番目の図ウィンドを開く  
subplot(2,1,1)
```

```
vplot('liv,lm',Kfr);
title('Bode plot of Controller')
xlabel('Frequency [rad/s]')
ylabel('Gain')
grid;
subplot(2,1,2)
vplot('liv,p',Kfr);
xlabel('Frequency [rad/s]')
ylabel('Phase(degrees)')
grid;
```

5. 閉ループ系の作成 : closedlp.m

```
systemnames='Psys K';
inputvar=' [w; r]';
outputvar=' [Psys+r; K]';
input_to_Psys=' [K+w]';
input_to_K=' [Psys+r]';
sysoutname='Clsys';
cleanupsysic='yes';
sysic;
```

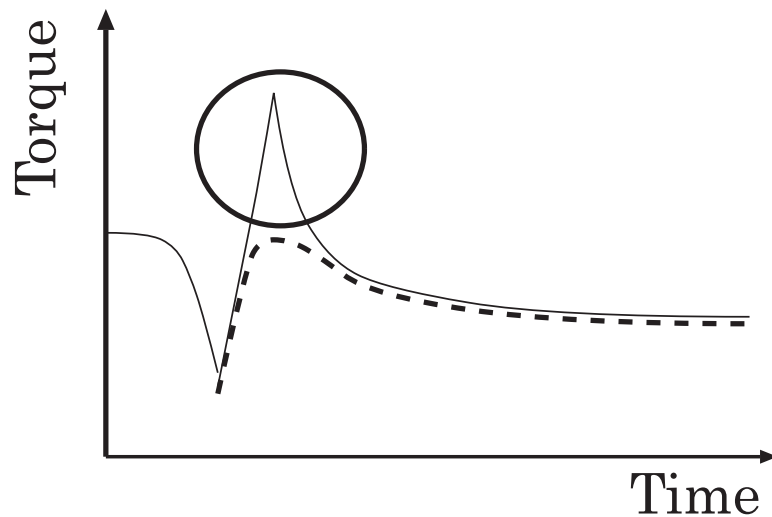
6. シミュレーション: simu.m

```
%H 制御器を用いるシミュレーション
closedlp;
[da,db,dc,dd]=unpck(sel(Clsys,1,1));
[ua,ub,uc,ud]=unpck(sel(Clsys,2,1));
%外乱応答
t=[0:0.0001:0.1];
[y,x,t]=step(da,db,dc,dd,1,t);
[u,x,t]=step(ua,ub,uc,ud,1,t);
figure(3)
subplot(2,1,1)
plot(t,y)
axis([0 0.1 0 16])
xlabel('Time[s]')
ylabel('Amplitude')
title('Step disturbance response')
grid on;
%制御入力
subplot(2,1,2)
plot(t,u)
```

```
axis([0 0.01 -1.7 0])  
xlabel('Time[s]')  
ylabel('u[V]')  
title('Input')  
grid on
```

自動車変速機の変速ショック低減制御

- ◇ 自動変速機の変速時の過渡応答を H_{∞} 制御を使って改善させ、乗り心地の向上をはかる.
- ◇ オートマチック車で変速が行われたとき、下図の実線のように変速のショックを感じる. 丸で囲んだ部分を抑え、点線のような出力トルクを実現する.

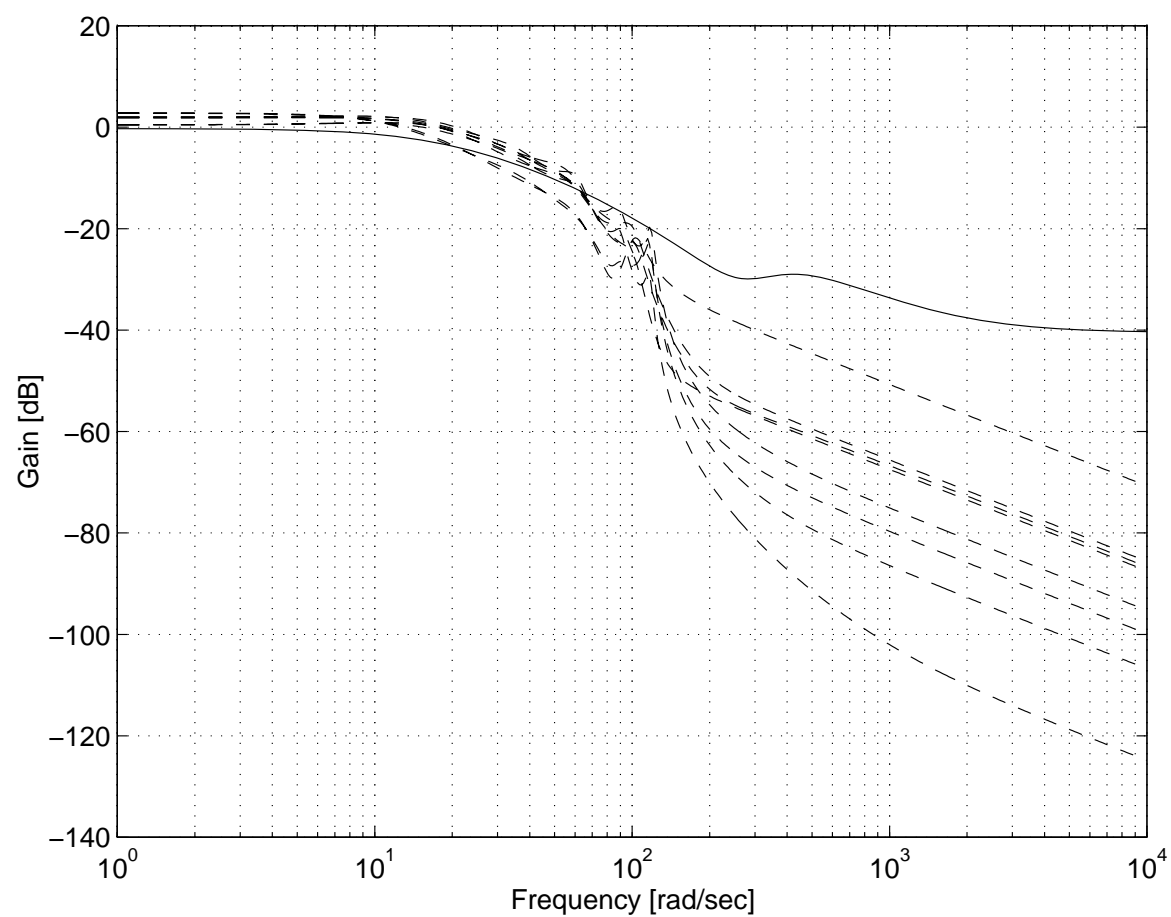


変速時の出力トルク

システム同定結果

スロットル開度 : 3/8, 5/8

油温 : 30 – 50°C, 75 – 80°C, 110 – 115°C



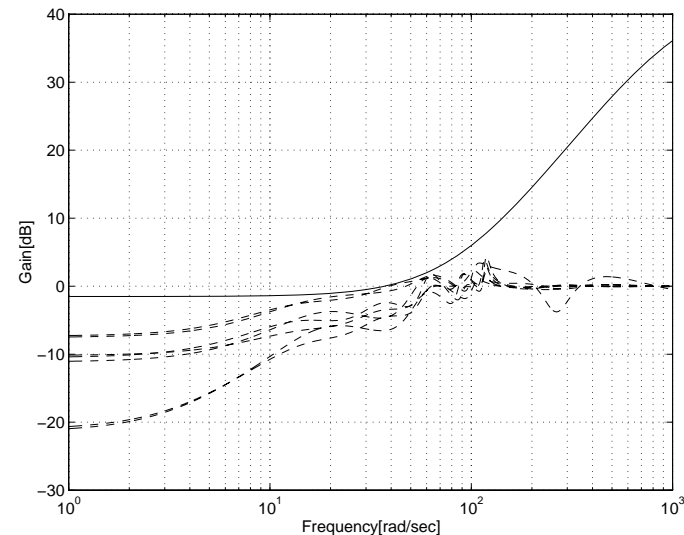
公称プラントと変動幅

公称プラントを前の図の**実線**で示されるものとした.

$$P = 9.49 \times 10^{-3} \cdot \frac{P_{num}}{P_{den}}$$

$$P_{num} \begin{cases} 1.92 \times 10^3 \\ 1.05 \times 10^2 \pm j2.44 \times 10^2 \\ 2.15 \times 10^2 \pm j3.57 \times 10^1 \\ 1.64 \times 10^2 \end{cases}$$

$$P_{den} \begin{cases} -2.72 \times 10^2 \pm j3.43 \times 10^2 \\ -1.54 \times 10^2 \pm j1.07 \times 10^2 \\ -8.20 \times 10^1 \\ -1.89 \times 10^1 \end{cases}$$



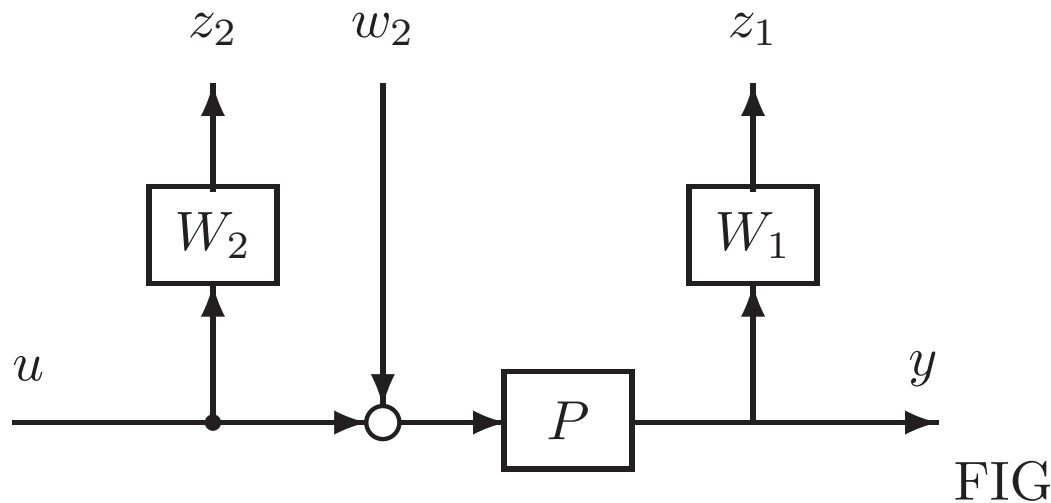
乗法変動の幅

一般化プラント

制御仕様:

- (1) 外乱を抑圧し, 応答速度を早くする.
- (2) プラントの変動に対してロバストである.
- (3) インパルス的な入力を出さない

制御入力 : H/C 油圧
観測出力 : 出力トルク
重み : W_1 (外乱)
 W_2 (変動)



一般化プラント

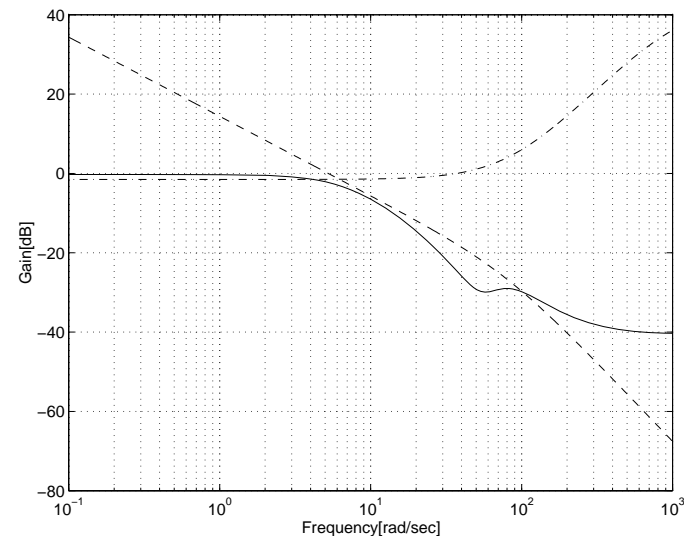
J

重み付けについて

実線 : 公称プラント, 破線 : W_1 , 一点破線 : W_2

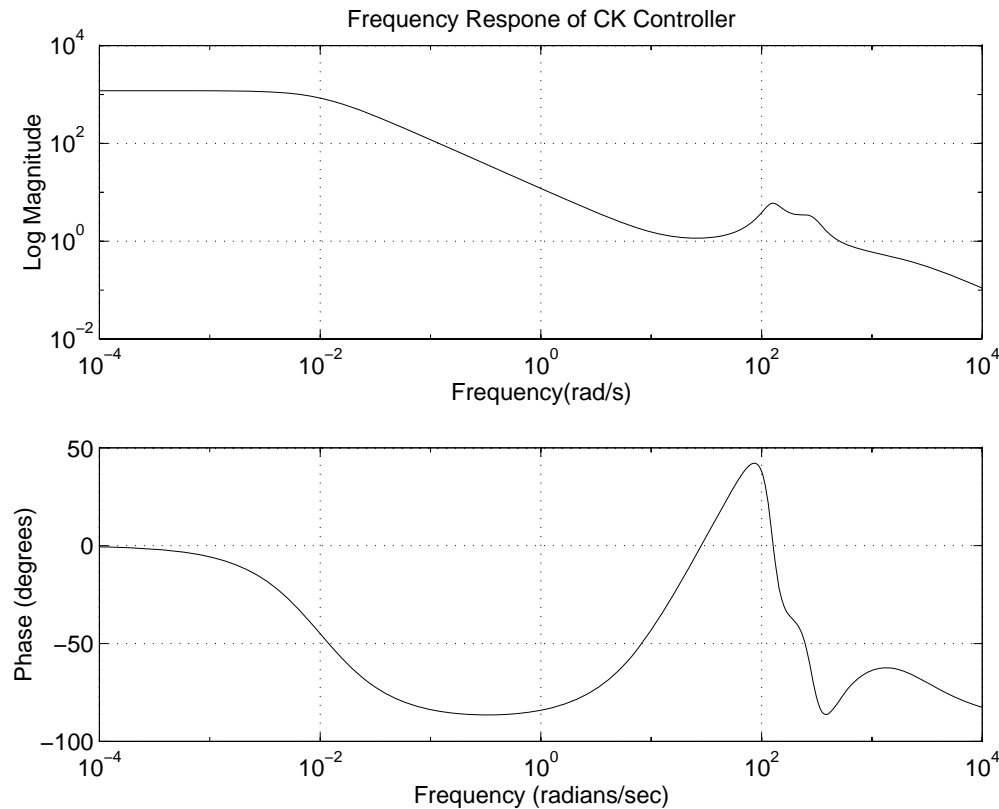
- ◇ 力などの外乱を抑圧するために W_1 を低域通過型にした.
- ◇ W_2 は高周波数域において本来の変動の見積りよりだいぶ大きくとっている. これは, 振動的な入力を抑え, 機械に負担をかけないためにとったものである.

$$W_1 = \frac{420}{(s + 0.01)(s + 80)}$$
$$W_2 = \frac{(s + 120)(s + 100) \times 140}{(s + 1300)(s + 1200)}$$



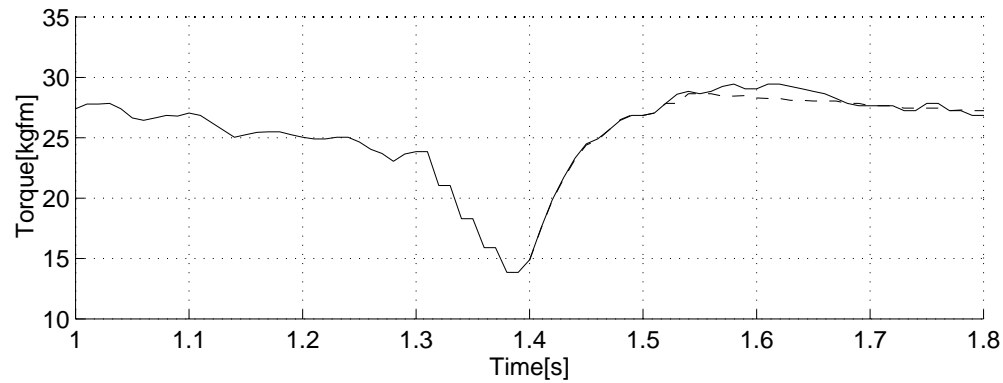
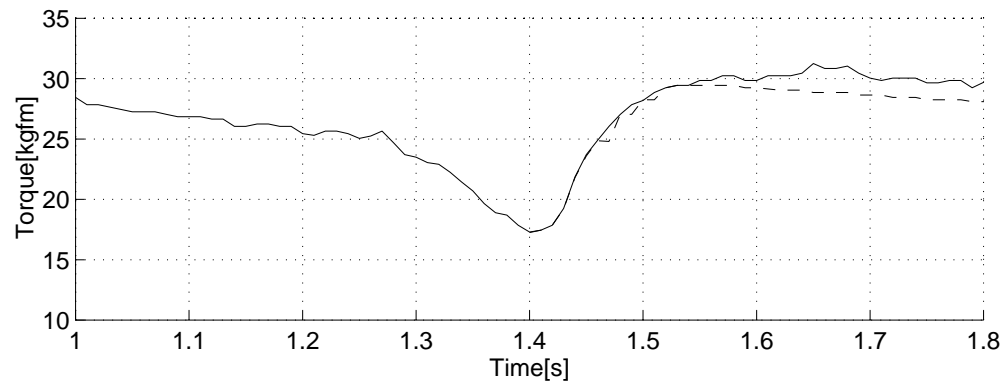
制御器

設計した制御器は 10 次で, 下図に示す. ただし, 実装するときは, Hankel ノルム近似で **7 次** に低次元化し, 10[ms] で離散化したものを用いた.

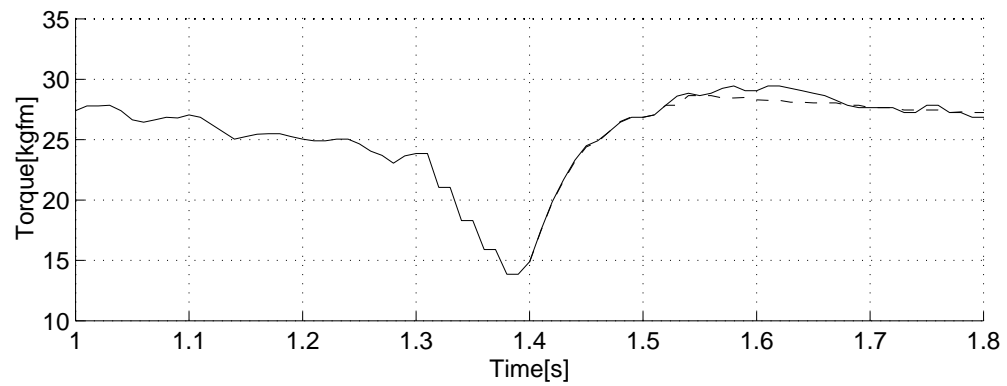
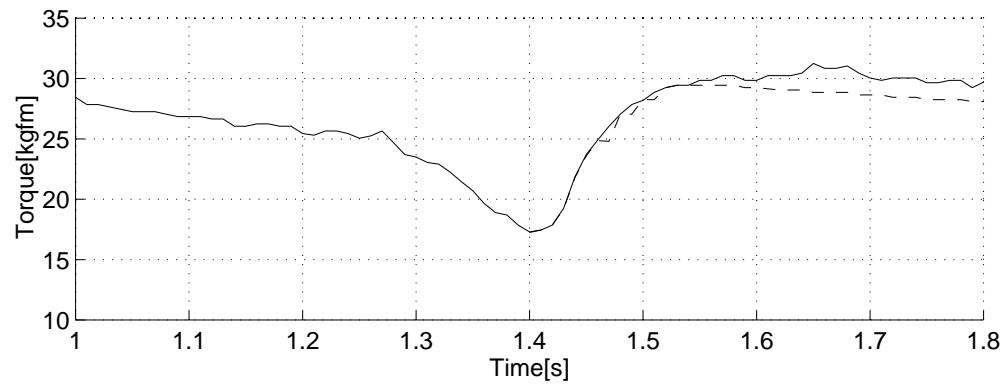


実験結果

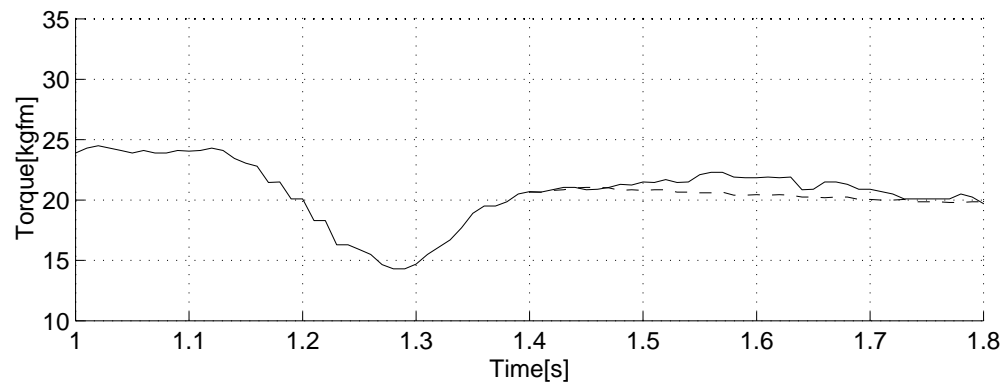
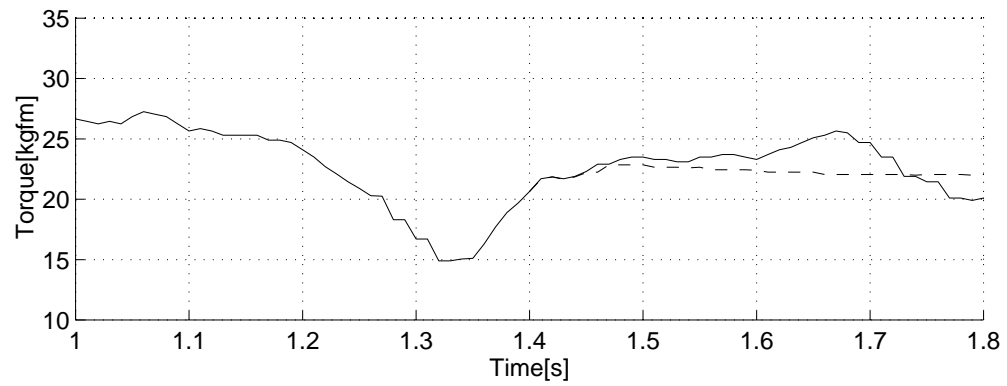
上段: 開ループ, 下段: 閉ループ, 点線: 目標値



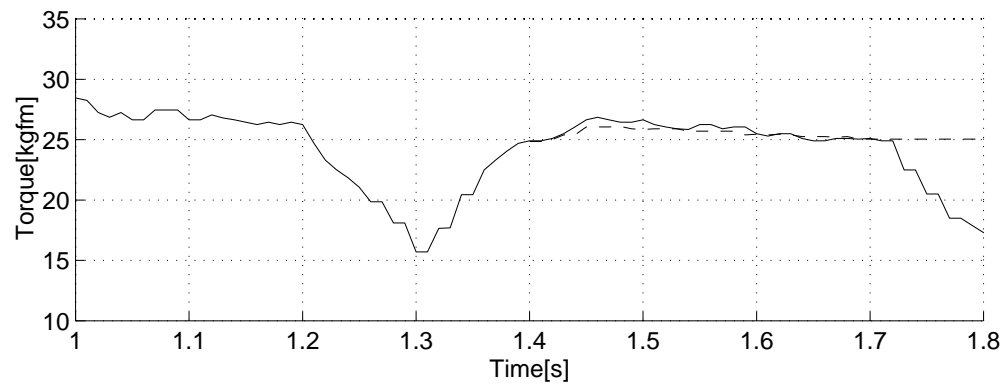
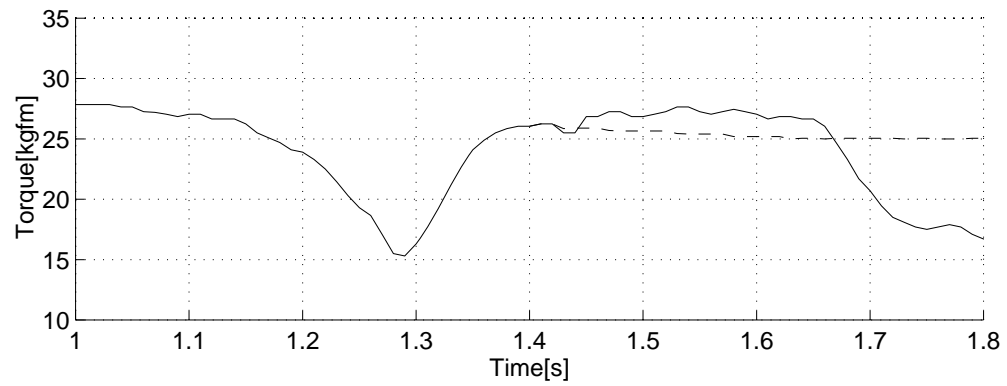
実験結果 1(3/8)



実験結果 1(3/8)



実験結果 2(2/8)



実験結果 3(5/8)

第4章 μ 設計法

- ◇ μ を導入する動機
- ◇ μ の定義と意味, 性質
- ◇ μ の計算法
- ◇ ロバスト性能の必要十分条件
- ◇ D-K 反復設計法
- ◇ 実習：ハードディスク

なぜ μ なのか

複数個の不確かさの問題:

- ◇ これまでに一つだけの不確かさを持つシステムに関するロバスト制御問題を扱った.
- ◇ 現実にはプラントの変動が一ヶ所に集まるのは稀で, 通常は数ヶ所に分散して存在する.
- ◇ これらを一ヶ所にまとめて小ゲイン定理で処理すると, 非常に保守的な結果しか得られない.

ロバスト性能問題:

定理 2.2 では, ロバスト性能問題は, 性能を表す仮想的な変動を導入することにより, 構造的変動を持つシステムのロバスト安定性と等価となることを示した. これは, 構造的な変動のロバスト安定化を考えることのもう一つの動機づけである.

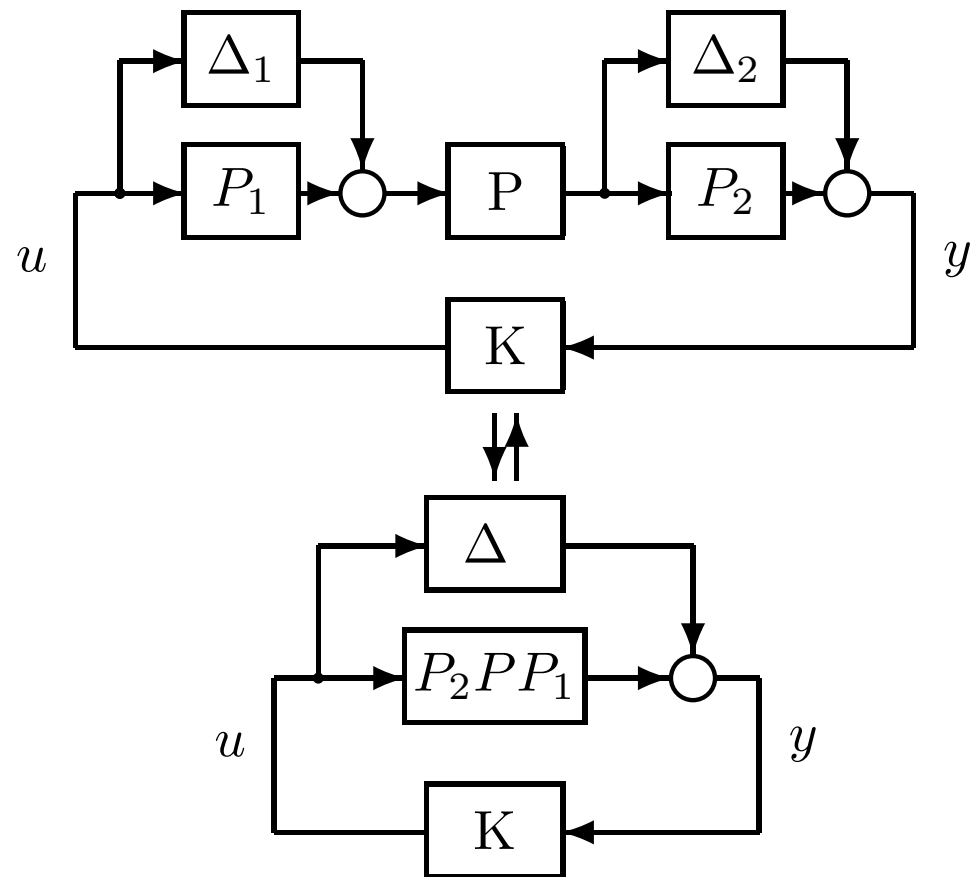
例 4.1 二つの変動を持つプラント:

$$y = (\Delta_2 + P_2)P(\Delta_1 + P_1)u = P_2PP_1u + \Delta u$$

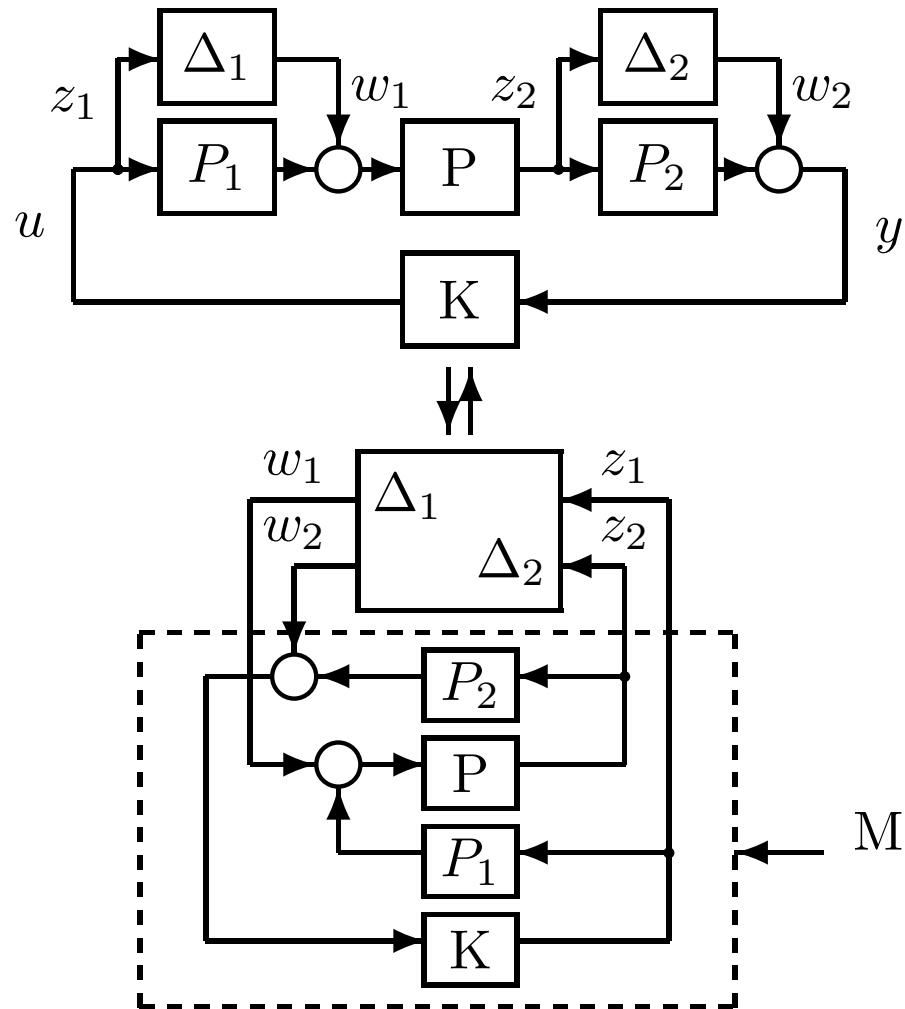
二つの変動を一つにまとめると

$$\Delta = \Delta_2P\Delta_1 + \Delta_2PP_1 + P_2P\Delta_1$$

- ◇ 変動 Δ の上限の見積りは大きくなりがち
- ◇ 制御器により厳しい制約を加える



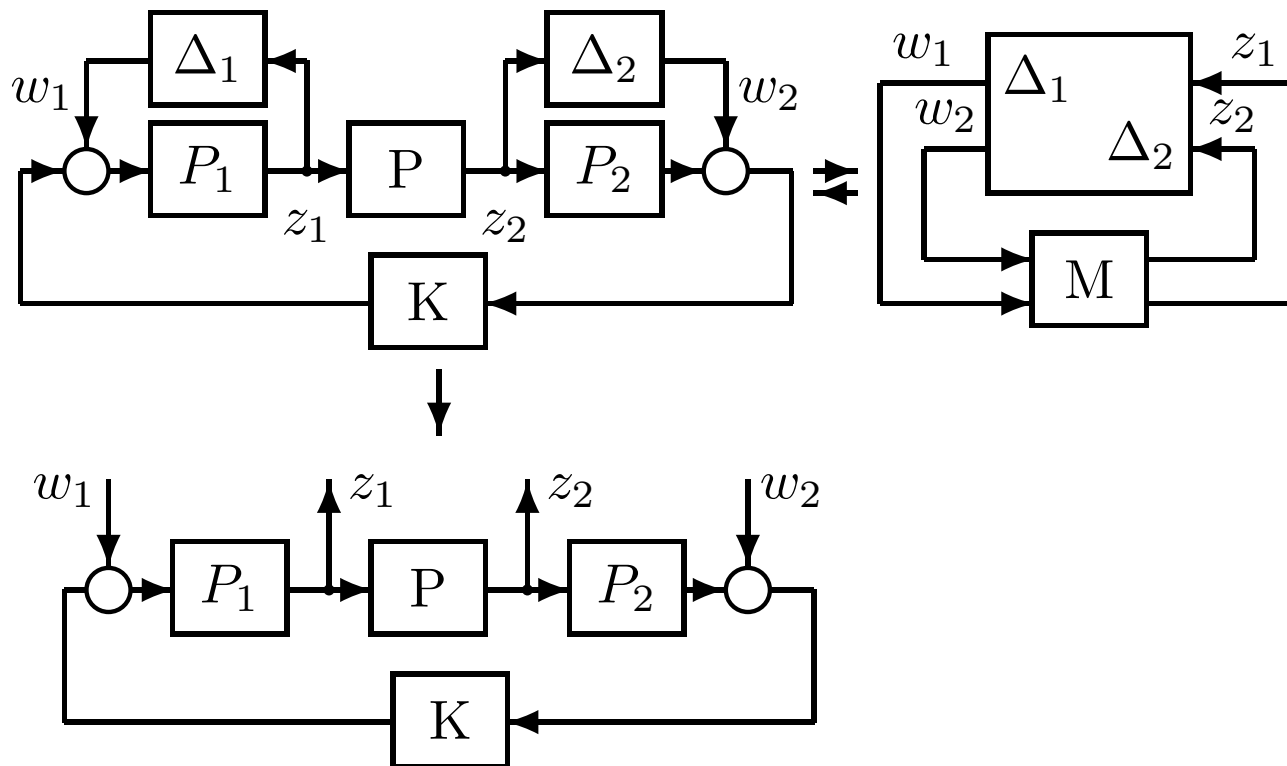
◇ 分散された変動は一つの対角行列変動に変形できる .



$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} KP_2(I - PP_1KP_2)^{-1}P & (I - KP_2PP_1)^{-1}K \\ (I - PP_1KP_2)^{-1}P & PP_1(I - KP_2PP_1)^{-1}K \end{bmatrix}$$

例 4.2 加法的変動とフィードバック型の変動を持つ系:



M 行列の求め方

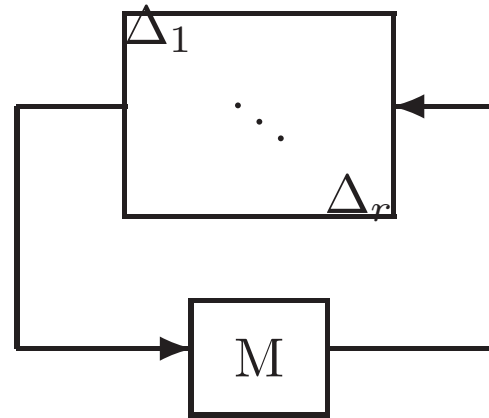
◇ 変動を対角行列にまとめたいとき, まず各変動の入出力に記号をふって, つぎに変動を外し, 変動の出力から入力までの伝達行列 M を求めればよい.

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} (I - P_1 K P_2 P)^{-1} P_1 & (I - P_1 K P_2 P)^{-1} P_1 K \\ P(I - P_1 K P_2 P)^{-1} P_1 & P(I - P_1 K P_2 P)^{-1} P_1 K \end{bmatrix}$$

構造化変動

- ◇ 複数個の変動 Δ_i があるとき，下図のように変換できる．この変形は閉ループ系の内部安定性を変えない．



- ◇ $\Delta = \text{diag} [\Delta_1 \dots, \Delta_r]$, M を安定とする．閉ループ系が内部安定となるための必要十分条件（ナイキストの定理）：

$$\det[I - M(j\omega)\Delta(j\omega)] \neq 0 \quad \forall \Delta \in \Delta, \omega \in (-\infty, \infty)$$

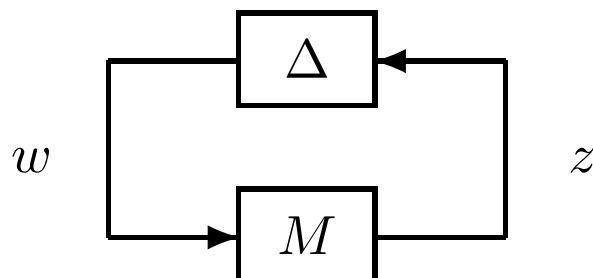
- ◇ 許される変動の大きさ（安定余裕）は Δ の構造と M によって決まる
- ◇ 安定余裕の逆数は，構造化特異値 $\mu_{\Delta}[M(j\omega)]$ である．

μ の定義

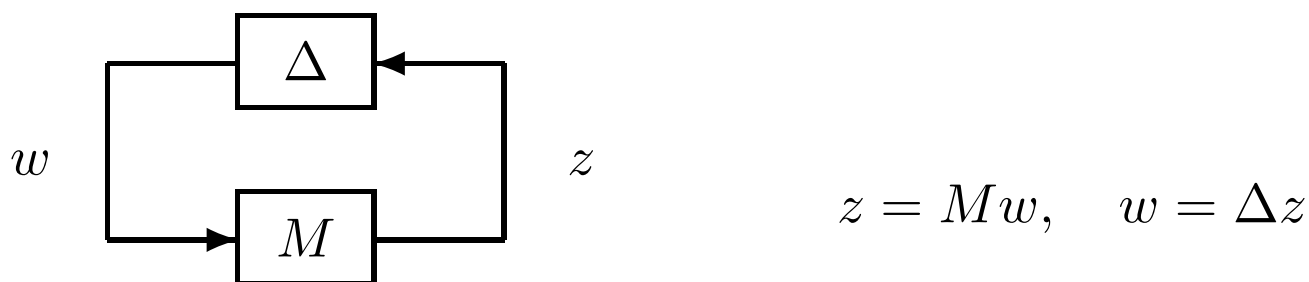
任意に与えられた行列 $M(s) \in \mathbf{C}^{n \times n}$ に対して, $\mu_{\Delta}(M)$ は次式で定義される.

$$\mu_{\Delta}(M(s)) = \frac{1}{\min\{\bar{\sigma}(\Delta) : \Delta \in \Delta, \det(I - M\Delta) = 0\}}$$

$\det(I - M\Delta) = 0$ とする $\Delta \in \Delta$ が存在しないとき, $\mu_{\Delta}(M) = 0$ と定義する.



注釈 4.1 $\mu_{\Delta}(M)$ は次の閉ループ系の安定余裕の逆数として解釈できる.



◇ $M(s)$, $\Delta(s)$ が安定のとき, 閉ループ系の安定条件:

$$\det[I - M(j\omega)\Delta(j\omega)] \neq 0 \quad \forall \omega$$

◇ 虚軸上で次式が成り立てば, 上式の条件は満たされる.

$$\sigma_{\max}(\Delta(j\omega)) < \frac{1}{\mu_{\Delta}(M(j\omega))}$$

◇ $\mu_{\Delta}(M)$ は閉ループ系が安定となる範囲で許容される変動の最大可能な幅の逆数である. $\mu_{\Delta}(M)$ が小さいほど, 許容する変動幅は大きい.

μ の計算

$$\rho(M) \leq \mu_{\Delta}(M) \leq \sigma_{\max}(M)$$

- ◇ $\sigma_{\max}(M)$: M の最大特異値 (M^*M の最大固有値の平方根)
- ◇ $\rho(M)$: M のスペクトル半径 (固有値の最大絶対値)

問題点： この上界と下界の間の差がかなり大きい (×)

解決策： スケーリング行列を導入

$$\mathbf{D} = \{D : D = \text{diag} [D_1, \dots, D_S, d_1 I_{m_1}, \dots, d_{F-1} I_{m_{F-1}}, I_{m_F}]\}$$

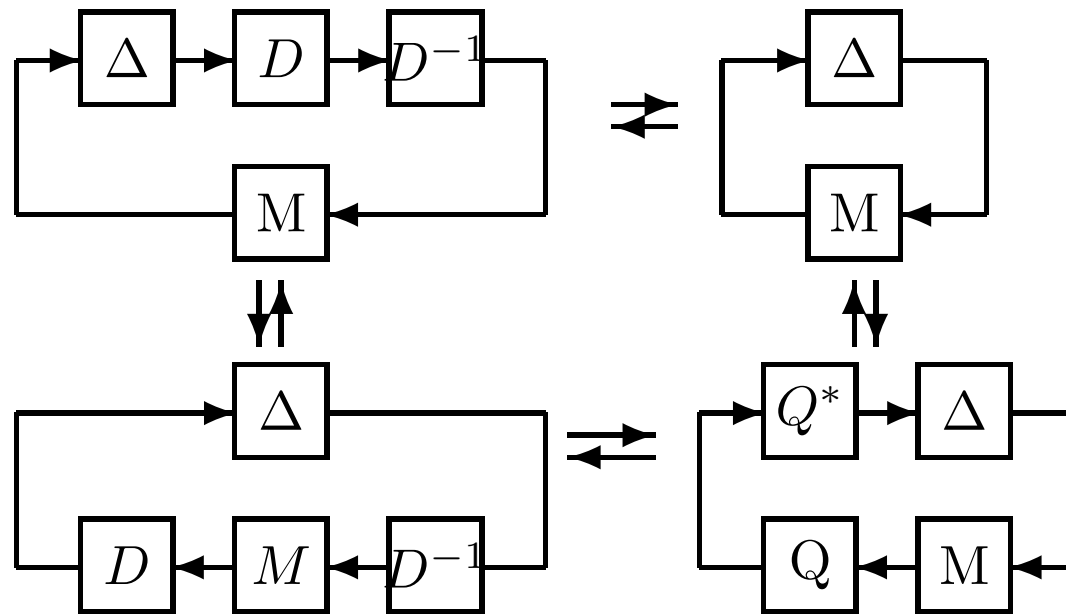
$$: D_i \in \mathbf{C}^{r_i \times r_i}, D_i = D_i^* > 0, \quad d_j > 0 (\in \mathbf{C})$$

$$\mathbf{Q} = \{Q \in \Delta : Q^* Q = I_n\}$$

次の関係が成立:

$$\sigma_{\max}(Q\Delta) = \sigma_{\max}(\Delta Q) = \sigma_{\max}(\Delta)$$

$$D\Delta = \Delta D$$



スケーリング行列の導入

定理 4.1

次式が成り立つ .

$$\mu_{\Delta}(M) = \mu_{\Delta}(DMD^{-1}) = \mu_{\Delta}(QM) = \mu_{\Delta}(MQ)$$

$\mu_{\Delta}(M)$ に関する新しい上界と下界

$$\max_{Q \in \mathbf{Q}} \rho(QM) \leq \mu_{\Delta}(M) \leq \inf_{D \in \mathbf{D}} \sigma_{\max}(DM D^{-1})$$

- ◇ μ を求める問題は最大固有値と最大特異値の最適化問題に落ちる．
上界と下界の差が小さければ，どちらを使っても μ を近似することができる．

(例) ロバスト追従問題の必要十分条件

$$\|WKS\|_{\infty} < 1 \quad \text{かつ} \quad \|W_S S(1 + \Delta WKS)^{-1}\|_{\infty} < 1$$

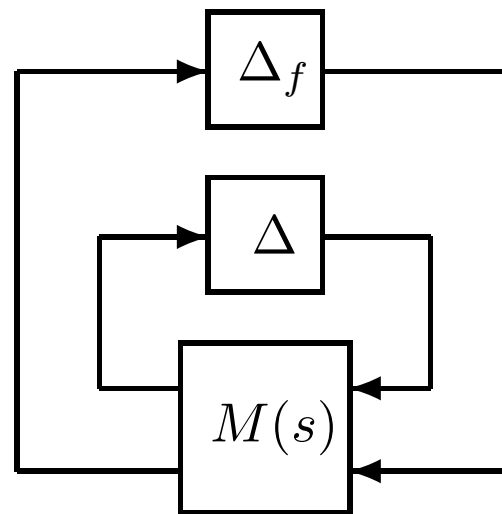
$$\begin{aligned} & W_S S(1 + \Delta WKS)^{-1} \\ &= W_S S - W_S S W(1 + \Delta WKS)^{-1} \Delta KS \\ &= \mathcal{F}_u \left(\begin{bmatrix} -WKS & KS \\ -W_S S W & W_S S \end{bmatrix}, \Delta \right) \\ &= \mathcal{F}_u (M, \Delta) \quad \Rightarrow \end{aligned}$$

と変形できるので、ロバスト追従の条件は

$$\|-WKS\|_{\infty} < 1 \quad \text{かつ} \quad \|\mathcal{F}_u (M, \Delta)\|_{\infty} < 1$$

となる。

-
- ◇ この問題は, 仮想変動 Δ_f を閉ループ系の入出力間に加えた場合のロバスト安定問題と等価



ロバスト性能 vs ロバスト安定性

- ◇ Δ_f は \mathcal{H}_∞ 性能と対応する仮想的な完全ブロック変動

\mathcal{H}_∞ ロバスト性能の必要十分条件

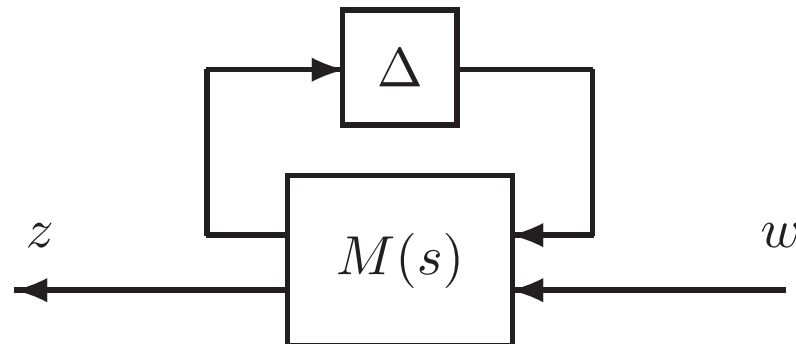
M を安定な伝達関数とする .

$$\Delta_P := \left\{ \begin{bmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & \Delta_f \end{bmatrix} : \Delta \in \Delta, \Delta_f \in \mathbf{C}^{q_2 \times p_2} \right\}$$

定理 4.2

$\|\Delta\|_\infty < 1$ を満足するすべての $\Delta(s) \in \Delta$ に対して, 下記の閉ループ系が内部安定で, $\|\mathcal{F}_u(M, \Delta)\|_\infty \leq 1$ となるための必要十分条件:

$$\sup_{\omega \in \mathbf{R}} \mu_{\Delta_P}(M(j\omega)) \leq 1$$

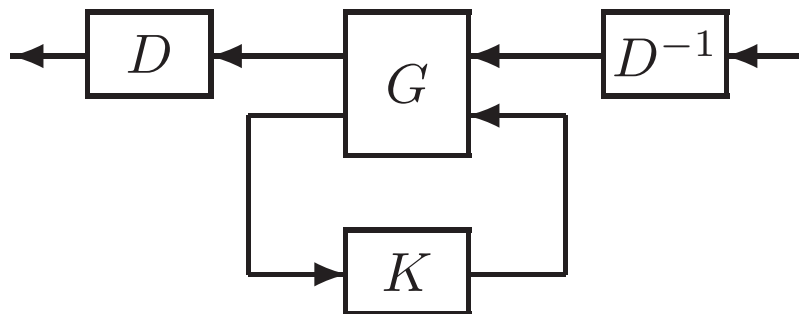


μ 設計

- ◇ μ 設計問題は NP 問題であり, 大変計算しづらい.
- ◇ 逃げ道: μ の上界と下界の条件を用いて近似解を求める

$$\max_{Q \in \mathbf{Q}} \rho(QM) \leq \mu_{\Delta}(M) \leq \inf_{D \in \mathbf{D}} \sigma_{\max}(DMD^{-1})$$

- ◇ 下界は μ と等しいが, 残念ながら凸問題ではない
- ◇ 上界の最小化問題は凸問題である
- ◇ μ の上界値は制御器 K とスケーリング行列 D の二つの設計パラメータに関する最小値で与えられる.



スケーリングによる
 μ 設計

D-K 反復設計法

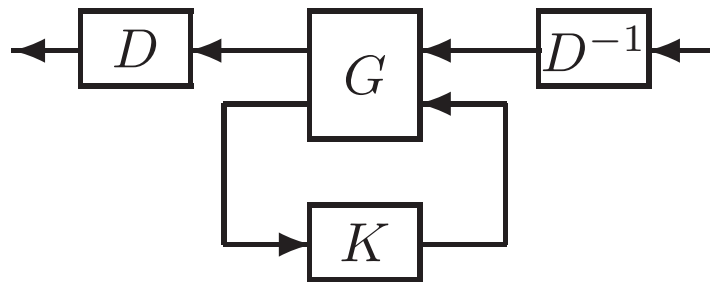
- (1) $\|\mathcal{F}_\ell(G, K)\|_\infty$ を最小にする \mathcal{H}_∞ 問題を解いて $K(s)$ を求める。
- (2) 次の最適問題をとき、 $D(s)$ を求める。

$$\inf_{D \in \mathbf{D}} \|DM D^{-1}\|_\infty, \quad M(s) = \mathcal{F}_\ell(G, K)$$

- (3) 求まった $D(s)$ を前回のものと比較、差が小さければ終了、そうでなければ

$$\begin{bmatrix} D(s) & \\ & I \end{bmatrix} G(s) \begin{bmatrix} D^{-1}(s) & \\ & I \end{bmatrix} \rightarrow G(s)$$

とおき、ステップ (1) に戻る。

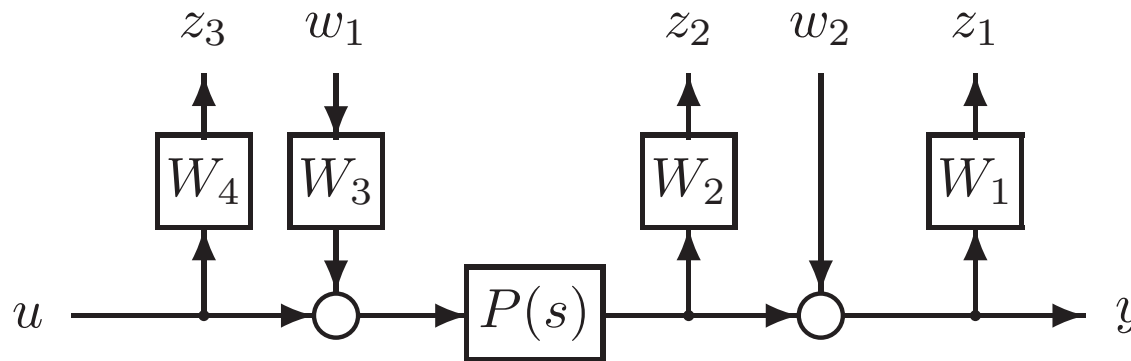


ハードディスクの μ 設計

ハードディスクのヘッド位置決め制御のための \mathcal{H}_∞ 制御器は、ロバスト外乱抑制の十分条件に基づいた設計したものであり、フィードバック制御の性能を十分に引き出していない可能性がある。ここでは、D-K 反復による μ 設計を試みる。 \mathcal{H}_∞ 設計と同じ一般化プラントを使う。重み関数に関しては、

W_1 のゲインだけを 1.6 倍高く

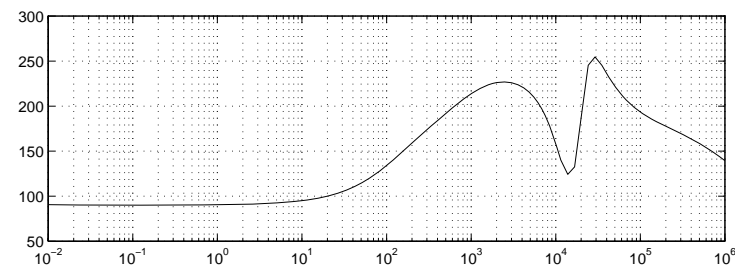
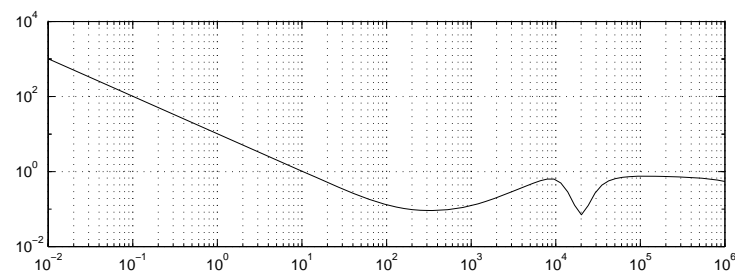
し (外乱制御仕様を厳しくする)、ほかは \mathcal{H}_∞ 設計と同様にした。



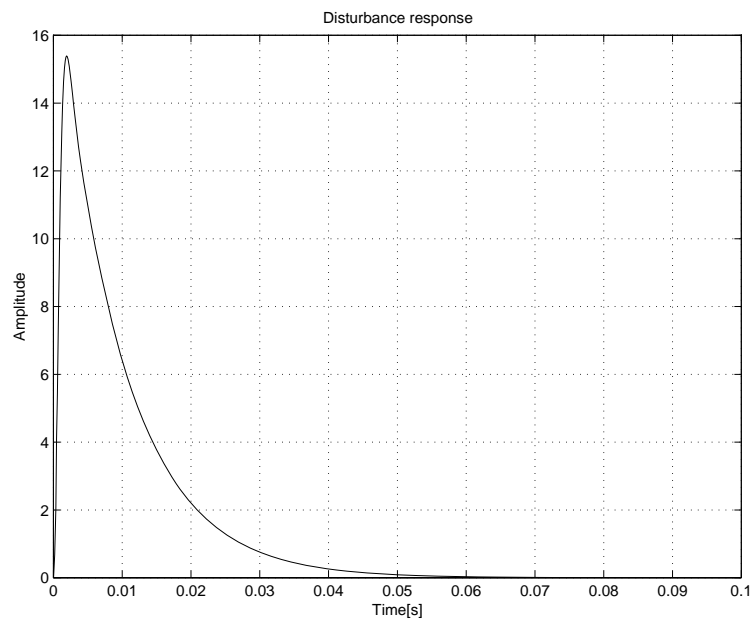
ハードディスクの一般化プラント

μ と \mathcal{H}_∞ の推移

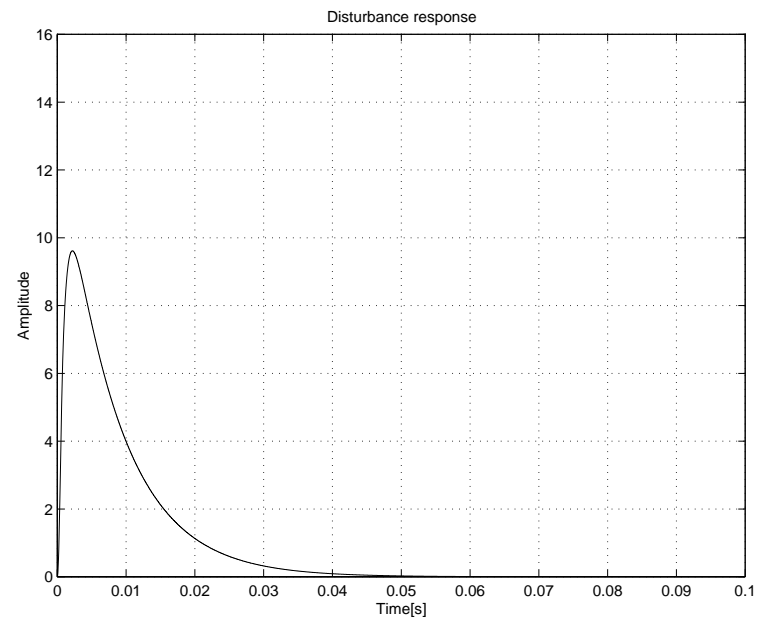
D-K 反復回数	1	2
μ の値	1.623	0.988
\mathcal{H}_∞ ノルムの値	1.737	0.989



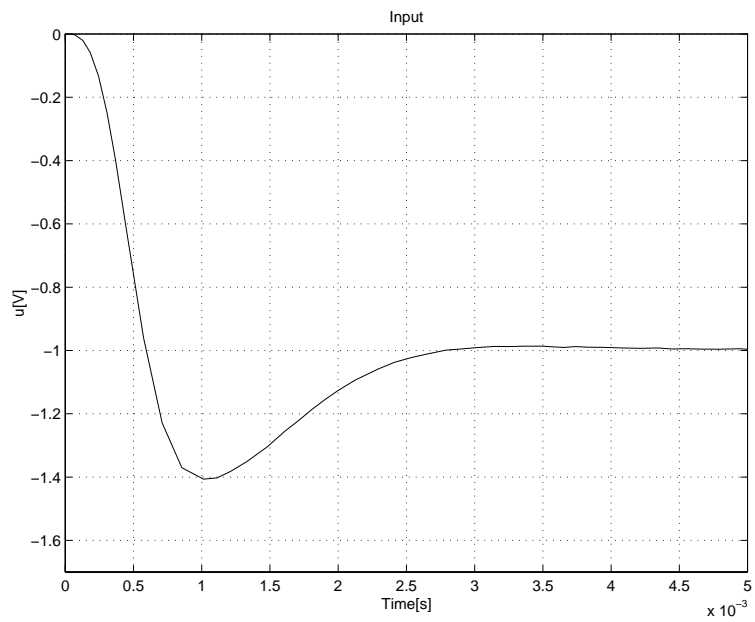
μ 制御器



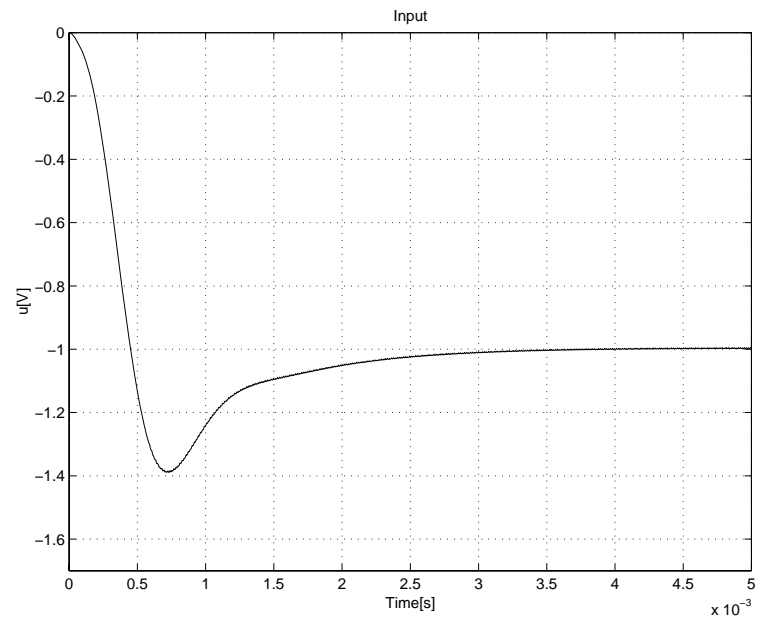
\mathcal{H}_∞ 制御器の外乱応答



μ 制御器の外乱応答



\mathcal{H}_∞ 制御器の入力



μ 制御器の入力

ハードディスクの μ 設計用 mfile

1. メインファイル: musyn.m

```
%  $\mu$  設計デモ用
clear
format short e
DK_DEF_NAME='dk_defin';
w=logspace(-2,6,100);
% 一般化プラントを作成
plant_new4
%  $\mu$  設計
dkit
K=k_dk2suffix;
controllerplot;
% シミュレーション
% 1 回目の反復の制御器を使う
K=k_dk1suffix;
simu2_1
% 2 回目の反復の制御器を使う
K=k_dk2suffix;
```

simu2_2

2. μ 設計を自動的に行なうツール dkit のパラメータ設定:

dk_defin.m

```
NOMINAL_DK=Gpsys;           % 公称開ループ結合構造
NMEAS_DK=1;                 % 測定出力の数
NCONT_DK=1;                 % 制御入力の数
BLK_DK=[1 2;1 0];          %  $\mu$  計算のブロック構造
OMEGA_DK=logspace(2,6,50); % 周波数応答の範囲
DISCRETE_DK=0;             % 連続系を設定
% AUTOINFO_DK (自動反復用)
% 1 回目から開始、2 回目で終了
% 結果をスクリーンに表示
% 次数が最大 3 次のスケーリング行列を使う
AUTOINFO_DK=[1 2 1 3*ones(1,size(BLK_DK,1))];
NAME_DK = 'suffix';        % 制御器に添字をつける
```